FOR THE PEOPLE
FOR EDVCATION
FOR SCIENCE

LIBRARY
OF
THE AMERICAN MUSEUM
OF
NATURAL HISTORY

Bound at
A.M.N.H.
1916

NOVI COMMENTARII ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS PETROPOLITANAE

TOM. IX.

pro Annis MDCCLXII. et MDCCLXIII.



PETROPOLI

TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM

MDCCLXIV.

16.70273 April 28

SVMMARIVM DISSERTATIONVM

QVAS CONTINET

NOVORVM COMMENTARIORVM

TOMVS IX.

MATHEMATICA.

I.

De Reſolutione Formularum quadraticarum indeterminatarum per numeros integros.

Auctore Leon. Eulero pag. 3.

Conſideratio numerorum, quamuis plerisque omni vſu carere videatur, tamen per ſe non ſolum admodum eſt iucunda, ſed etiam animum ad veritatis indagationem non mediocriter acuit, eiusque vires quaſi magis intendit. Maxime enim abundat doctrina numerorum veritatibus abſtruſiſſimis, quarum inueſtigatio et demonſtratio tantam ingenii penetrationem poſtulat, vt nunquam cuncta, quae inuoluit, myſteria erui et explicari poſſe videantur. Quod certe eo magis mirum videri debet, quod numeri nusquam per ſe re vera exiſtant, ſed per ſolam abſtractionem in mente formentur, qua primo quidem ſeries numerorum naturalium ab vnitate in infinitum progredientium conſtituitur, tum vero ad interualla implenda numeri fracti et ſurdi, atque adeo tranſcendentes, introducuntur. Quorum generum tractatio etſi ad Arithmeticam referri ſolet, tamen in hac ſcientia inſignes proprietates, quibus numeri ſunt affecti,

vix attinguntur, quippe quae vulgo tantum ad vſitatas numerorum operationes explicandas reſtringitur. Accuratius autem numerorum natura inueſtigatur in ea Analyſeos parte, quae ab antiquiſſimo auctore methodus Diophantea vocari ſolet, vbi eiusmodi problemata perpenduntur, quae in ſe ſunt indeterminata, atque infinitas ſolutiones admittunt, ex quibus autem eas elici oportet, quae numeris vel ſaltem rationalibus, vel integris tantum contineantur. Cuius methodi vis per exemplum clariſſime perſpicietur: Sumamus eiusmodi numeros quaeri debere, quorum quadrata duplicata vnitate aucta iterum fiant quadrata, ſeu vt forma $2xx-11$ extractionem radicis quadratae admittat. Quodſi fractiones non excludantur, huic quaeſtioni facillime ſatisfit, aequando formulam $2xx-11$ huic quadrato $(xy-1)^2$. Quia enim aequatio $2xx-11 = xxyy-2xy-11$, vnitate vtrinque deleta, per x diuiſionem admittit, prodit $2x = xyy-2y$, hincque $x = \frac{2y}{yy-2}$, vbi quicunque numeri pro y accipiantur, ſiue integri, ſiue fracti, pro x ſemper eiusmodi numeri rationales reſultant, quibus formula $2xx-11$ euadit quadratum, quippe cuius radix quadrata futura $xy-1$. Qui numeri, quo facilius obtineantur, loco y ſcribi poteſt fractio $\pm\frac{p}{q}$, vnde prodit vel $x = \frac{2pq}{pp-2qq}$, vel $x = \frac{2pq}{2qq-pp}$. Hic igitur ſufficit, pro p et q numeros quoscunque integros accipi, veluti ſi capiatur $p=5$ et $q=3$, prodit $x=\frac{30}{7}$ qui eſt huiusmodi numerus, vt eius quadratum $\frac{900}{49}$ ſi duplicetur $\frac{1800}{49}$, et vnitas adiiciatur $\frac{1849}{49}$, ſumma haec ſit quadratum radice exiſtente $\frac{43}{7}$. Verum ſi pro x tantum nume-

numeri integri deſiderentur, qui hac proprietate gaudeant, ſolutio modo data nihil vtilitatis affert, cum pro p et q eiusmodi numeri aſſumi deberent, vt $2pq$ diuiſibile fieret per $pp-2qq$, quod non minus eſt difficile, quam ipſum problema, de quo agitur. Interim tamen hac conditione adiecta problema etiamnum recipit innumeras ſolutiones, et numeri pro x aſſumendi hac lege procedunt: 0, 2, 12, 70, 408, 2378, 13860, etc. vbi continuo ſequens aequatur ſextuplo vltimi demto penultimo, cuiusmodi ſeries vocari ſolent recurrentes, vnde euidens eſt, harum ſolutionum multitudinem eſſe infinitam, etiamſi continuo rarius occurrant. Ideoque facile intelligitur, earum inuentionem multo magis eſſe arduam.

Cel. Auctor huius diſſertationis methodum peculiarem exponit huiusmodi problemata facile reſoluendi, quibus in genere omnis numeri integri pro x aſſumendi quaeruntur, vt haec formula $\alpha xx+\beta x-\gamma$ euadat numerus quadratus, dum α, β, γ denotant numeros quoscunque datos. Vbi primo quidem obſeruat, ſolutionem non ſuccedere, niſi α ſit numerus poſitiuus non quadratus, tum vero neceſſe eſſe, vt vna ſaltem ſolutio iam aliunde ſit cognita, cuiusmodi ſolutio vnica ſtatim ac ſi praeſto fuerit, quemadmodum inde omnes reliquae in infinitum inueniri queant, perſpicue docet. Cum autem hoc problema iam alibi ſit pertractatum, etſi methodo minus commoda, Auctor hic inprimis naturam huiusmodi problematum accuratius perſcrutatur, et criteria elicit, quibus problemata huius generis impoſſibilia a poſſibilibus diſtingui poſſunt. Denotante ſcilicet α nume-

numerum quemcunque poſitiuum non quadratum, quia expreſſionem ſuperiorem ſemper ad hanc formam $\alpha xx + \gamma$ reuocare licet, oſtendit, quinam numeri pro γ aſſumti problema reddant poſſibile, nec ne. Veluti ſi ſit $\alpha = 3$, notum eſt, has formulas $3xx+2$, $3xx+5$, $3xx+8$ etc. nunquam fieri poſſe quadratas. In maioribus autem numeris pro α ſumtis hoc iudicium multo magis fit arduum; verum tamen Auctor criteria certiſſima indicat, quibus in omnibus caſibus expedite vti licet, vbi multa, quibus miranda numerorum natura non mediocriter illuſtratur, occurrunt, et quae in aliis quaeſtionibus vſum inſignem habitura videntur.

II.

De progreſſionibus arcuum circularium, quorum tangentes ſecundum certam legem procedunt.

Auctore L. Eulero pag. 40.

Plurimae iam paſſim traditae ſunt methodi progreſſionum, in infinitum excurrentium, ſummas inueſtigandi, in quo Analyſeos genere cum ab aliis tum a Cel. *Eulero* inſignia ſpecimina ſunt edita. Seriem autem fractionum continuo decreſcentium, etiamſi in infinitum continuentur, ſummam habere poſſe finitam aſſignabilem, aduerſus difficultates e principiis methaphyſicis perperam intellectis petitas, nemo nunc quidem amplius

in

in dubium vocare ſuſtinet, veluti ex primis adeo elementis oſtendi poteſt, huius ſeriei geometricae: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} +$ etc. in infinitum ſummam binario eſſe aequalem. Quanquam autem haud difficulter iudicare licet, vtrum huiusmodi ſerierum, quarum termini continuo fiunt minores, dummodo certa lege progrediantur, ſummae ſint finitae, nec ne? tamen ſaepe numero accidit, vt ſumma, etiamſi certo ſit finita, nihilo minus aſſignari nequeat, quemadmodum vſu venit in hac ſerie $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{17} + \frac{1}{33} +$ etc. cuius denominatores, quia vnitate ſuperant praecedentes, ſumma ſine omni dubio minor eſt, quam illius, neque vero eius verus valor vllo modo adhuc inueſtigari potuit, ita vt is non ſolum non rationaliter, ſed etiam non per numeros ſurdos, quin ne per tranſcendentes quidem vſu ſatis tritas, cuiusmodi ſunt, quae vel a quadratura circuli, vel logarithmis pendent, exprimi poſſe videatur. Simili modo haec fractionum ſeries: $\frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{13} + \frac{1}{21} + \frac{1}{31} + \frac{1}{43} +$ etc. cuius lex denominatorum differentiis ſumendis, quae ſunt 4.6.8.10.12 etc. per ſe eſt perſpicua, etſi certe eſt finita, nullo tamen quantitatum genere cognito exhiberi poteſt: ex quo eo magis mirum videri debet, quod ſi in circulo, cuius radius $= 1$, arcus capiuntur, quorum tangentes ſint ſucceſſiue $\frac{1}{3}.\frac{1}{7}.\frac{1}{13}.\frac{1}{21}$ etc. horum omnium arcuum in infinitum continuatorum ſumma aſſignari poſſit, atque adeo quartae peripheriae parti ſit aequalis.

In hac igitur diſſertatione Cel. Auctor plura huiusmodi ſerierum genera perpendit, quarum termini ſinguli ſunt arcus circulares, quorum tangentes certo

modo progrediuntur, et quemadmodum ſummae earum pariter ad arcus circulares deduci queant, oſtendit. Methodum autem perfacilem proponit, innumerabiles huiusmodi ſeries ſummabiles inueſtigandi, in quo negotio ne calculus formulis nimis intricatis perturbetur, in ſubſidium vocat algorithmum quendam nouum ac peculiarem, cuius indoles in ſequentibus exponetur. Tum vero etiam theoriam fractionum continuarum in ſuperioribus voluminibus prolixius expoſitam ad has inueſtigationes felici ſucceſſu accommodat, ita vt iam huius generis ſeries perinde tractari poſſint, atque eae, quae per ſimplices fractiones progrediuntur, dum arcus illius, cui ſeriei ſumma aequatur, tangens ſatis concinne per fractionem continuam exprimi poteſt.

III.

Specimen algorithmi ſingularis.

Auct. L. Eulero pag. 53.

Accuratius inquirenti cur Analyſis mathematica aliis ſcientiis, quae in veritatis inueſtigatione verſantur, tantopere antecellat, mox patebit cauſam in idoneo et ſuccincto ſignorum vſu potiſſimum eſſe quaerendam. Cum enim in omni ratiocinatione ſermo atque vſus vocabulorum, quibus ideae plerumque ſatis complicatae deſignari ſolent, maximum affert ſubſidium, vt ſermone ſublato vix vllus rationis vſus nobis relinqui videatur; vtilitas horum ſigno-

ſignorum manifeſto in eo eſt poſita, quod eorum beneficio menti ideae valde compoſitae vno quaſi intuitu ſimul ita repraeſentantur, vt, ſi vim cuiusque ſigni, quantumuis eius ſignificatus fuerit complexus, ſemel intellexerit, id deinceps in mente vicem omnium idearum, quas comprehendit, gerat. Atque hoc idem per vniuerſam Analyſin mathematicam multo clarius cernitur, vbi omnes formulae in calculo receptae nihil aliud ſunt, niſi ſigna idonea, quibus ideae et operationes tantopere compoſitae menti vno quaſi ictu offeruntur, vt earum explicatio plerumque maximam verborum ambagem requireret; vbi hoc imprimis eſt obſeruandum, huiusmodi ſignum, cum eius vis ſemel fuerit percepta, menti deinceps perpetuo inſigni compendio vniuerſam rem ſignificatam repraeſentare. Quemadmodum ergo in communi ſermone ſingula verba ideas ſimpliciores in animo excitant, ita in Analyſi mathematica eiusmodi ſigna vſurpantur, quae ideas multo magis compoſitas animo ſimul exhibent, eundemque effectum praeſtant, ac ſi omnia verba eius ſignificatum explicantia ordine recitarentur; quae prolixitas, cum animum maxime eſſet diſtractura, vires etiam ingenii in comparatione plurium huiusmodi repraeſentationum plurimum eſſet perturbatura. Ex quo perſpicuum eſt, praeſtantiam Analyſeos vſui potiſſimum idoneorum ſignorum, quibus res maxime complicatae deſignantur, acceptam eſſe referendam. Veluti quoties in calculo analytico hanc formulam $\sqrt{(aa+bb)}$ conſpicimus, hoc ſigno menti oblato intelligimus, litteris a et b certas quantitates deſignari, quarum quadrata per additionem

tionem coniungi, et ex ſumma radicem quadratam extrahi oportere; hancque radicem quadratam iſta formula indicari. Statim autem atque hunc ſignificatum probe percepimus, nobisque familiarem reddidimus, ſolus aſpectus huius formulae $V(aa+bb)$ vno quaſi ictu menti totam illam deſcriptionem repraeſentat, ita vt ea tanquam idea ſimplici in vlteriori inueſtigatione vti poſſit. Similis eſt ratio omnium reliquorum ſignorum in Analyſi receptorum, quae omnia ita ſunt comparata, vt iis quantitates, per certas ſaepiusque repetitas operationes natae, vno quaſi aſpectu menti diſtincte repraeſententur. Quodſi ergo eueniat, vt in Analyſi nouae quaedam operationes in vſum vocentur, nouoque modo inter ſe combinentur, ad calculi ſubſidium plurimum interea quantitates inde natas nouis iisque idoneis ſignis deſignari, vt iis deinceps ſimili ſucceſſu in calculo vti liceat. Cum igitur Cel. Auctor obſeruaſſet, in euolutione fractionum continuarum, quarum vſus in Analyſi eſt ampliſſimus, quantitates certo quodam modo per varias operationes inter ſe combinari, quantitates hinc ortas ſignis peculiaribus denotare ſtatuit, ſimulque ſpecimen noui algorithmi circa has quantitates exhibere decreuit, cuius vſum inſignem adeo iam in praecedente diſſertatione oſtendit, et in ſequentibus fortaſſe adhuc vberius eſt declaraturus. Propoſitis nimirum quotcunqne numeris a, b, c, d, e, formula hoc ſigno expreſſa $(a, b, c, d, e,)$ numerum denotat per certas quasdam operationes inde oriundum, cuius valor per pauciores continuo procedendo ita ſe habet, vt, ſi nulla littera vncinulis includatur, veluti $()$ valor ſit perpe-

perpetuo vnitas; deinde ſi vnica littera ſit incluſa, vt (a), valor ſit hic ipſe numerus a. Hinc autem ſi plures litterae includantur, valores per praecedentes ſequenti modo definiuntur:

$$()=1$$
$$(a)=a$$
$$(a,b)=b(a)+()$$
$$(a,b,c)=c(a,b)+(a)$$
$$(a,b,c,d)=d(a,b,c)+(a,b)$$
$$(a,b,c,d,e)=(a,b,c,d)+(a,b,c)$$

etc.

circa numeros autem hoc modo natos plures eximias proprietates demonſtrat, veluti quod indicum ordine inuerſo idem valor ſemper reſultet, ſitque $(a,b,c,d,e) = (e,d,c,b,a)$ vnde plures aliae inſignes affectiones concluduntur.

IV.

De Reſolutione aequationum cuiusuis gradus.

Auct. L. Eulero pag. 70.

Quaeſtio hic verſatur circa aequationes algebraicas, quorum gradus aeſtimatur ex poteſtate ſumma quantitatis incognitae, cuius valorem inde determinari oportet, ita poſtquam huiusmodi aequationes ad debi-

tam formam fuerint perductae, ſecundum gradus ita in genere repraeſentari poſſunt:

gradus	aequationes
I.	$x + A = o$
II.	$x^2 + Ax + B = o$
III.	$x^3 + Ax^2 + Bx + C = o$
IV.	$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = o$
V.	$x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = o$
VI.	$x^6 + Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F = o$

etc.

Iam notum eſt, harum aequationum reſolutionem in genere non vltra quartum gradum adhuc eſſe inueſtigatam, quod eo magis mirandum videtur, quod cum ſecundus gradus iam ab antiquiſſimis Geometris Graecis et Arabibus, tertius vero et quartus iam pridem a Scipione ferreo et Bombello in ipſa quaſi Analyſeos infantia ſint expediti, ab illo tempore, poſtquam Analyſis ſummo ſtudio eſt exculta, nondum vltra hos limites propredi licuerit. Cum autem conſtet, reſolutionem cuiusque gradus ab omnibus gradibus inferioribus pendere, et quantitatem incognitam tot valores recipere, quoti gradus fuerit aequatio. Cel. Auctor huius diſſertationis iam olim coniecturam propoſuit, quod pro quouis gradu, veluti quinto $x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = o$, detur aequatio vno gradu inferior, vti $y^4 + \alpha y^3 + \beta y^2 + \gamma y + \delta = o$, quam vocat illius reſoluentem, ita vt ſi huius radix fuerit p, q, r, s, illius radix ita ſe ſit habitura $x = f + \sqrt[5]{p} + \sqrt[5]{q} + \sqrt[5]{r} + \sqrt[5]{s}$, vbi quidem perſpicuum eſt, fore $f = -\frac{1}{5}A$, quae coniectura eo minus

minus ratione deſtituta videtur, quod non ſolum cum reſolutione cognita aequationum ſecundi, tertii et quarti gradus egregie conſentiat, ſed etiam caſus illos reſolubiles particulares altiorum graduum a *Moiuraeo* olim detectos in ſe complectatur. Nunc autem Cel. Auctor animaduertit iſtius coniecturae formam, qua verbi gratia aequationis quinti gradus radix ita exprimitur: $x = f + \sqrt[5]{p} + \sqrt[5]{q} + \sqrt[5]{r} + \sqrt[5]{s}$, nondum ſatis eſſe limitatam. Cum enim ſingulae hae formulae radicales quinos diuerſos valores natura ſua inuoluant, facile intelligitur, non omnes combinationes eorum locum habere poſſe, quia alioquin numerus diuerſorum valorum ipſius x in immenſum excreſceret, quem tamen quinarium ſuperare non poſſe certum eſt. Formam igitur illam nimis vagam nunc ita reſtringit, vt ſtatuat aequationis quinti gradus radicem ita in genere exprimi: $x = f + \mathfrak{A}\sqrt[5]{p} + \mathfrak{B}\sqrt[5]{p^2} + \mathfrak{C}\sqrt[5]{p^3} + \mathfrak{D}\sqrt[5]{p^4}$, ſimilique modo de reliquis gradibus; vbi iam perſpicuum eſt, plures, quam quinque diuerſos valores, pro x locum habere non poſſe. Statim enim ac ſignificatus partis $\sqrt[5]{p}$ definitur, quod quinque modis fieri poteſt, ſimul etiam reliquae partes determinantur. Deinde etiam patet, expreſſionem pro caſu allato non plures, quam quinque partes, complecti poſſe, quoniam formulae vlteriores $\sqrt[5]{p^5}$, $\sqrt[5]{p^6}$ etc. ſponte ad praecedentes redirent, neque nouam irrationalitatem implicarent. Hanc igitur nouam coniecturam quam pulcre cum reſolutionibus iam cognitis conſentiat, oſtendit, et quamuis ex hoc fonte minime adhuc aequationum quartum gradum ſuperantium

tium reſolutionem in genere perficere liceat, tamen hinc pro ſuperioribus gradibus alios inſuper caſus reſolubiles praeter *Moiureanos* deducit, vnde non parum luminis in hanc maxime abſconditam Analyſeos partem redundare videtur.

V.

De numeris primis valde magnis.

Auctore L. Eulero pag. 99.

Cum primum a *Pellio*, ac deinceps ab aliis, tabula numerorum primorum ad centena millia vsque ſit conſtructa, nunc quidem propoſito quocunque numero hunc limitem non ſuperante facillime iudicare licet, vtrum is ſit primus, nec ne? atque adeo ex iſta tabula pro lubitu numeri primi excerpi poſſunt, ſi forte vſus exigat, qui quidem centena millia non excedant. Verum ſi quis deſideret numeros primos hoc termino maiores, nonniſi exantlato immenſo fere labore, voti ſui compos reddi poterit, quandoquidem alia methodus numeros primos inueſtigandi vix patet, niſi vt ſucceſſiue omnes numeri per alios minores diuiſibiles expungantur, quippe quo facto numeri primi ſoli relinquentur. Quin etiam propoſito numero praegrandi, vtrum is ſit primus, nec ne? ante pronunciare non licet, quam eius diuiſio per omnes numeros primos, eius radice quadrata minores, fuerit tentata. Ita ſi quis quaerat, vtrum hic

ſhic numerus 2237791 primus ſit, nec ne? diuiſionem per omnes numeros primos vsque ad 1496 tentare cogitur, hocque labore maxime taedioſo ſuſcepto tandem diuiſionem per 1481 ſuccedere deprehendet. Ex quo patet problema olim inter *Fermatium* et *Wallifium* tractatum, quo methodus certa requiritur, numeros primos dato quouis maiores inueſtigandi, maxime eſſe arduum, atque adeo vires ingenii humani ſuperare, poſtquam ſolutio a *Fermatio* tradita iam olim ab Auctore huius diſſertationis eſt profligata. Quin etiam quaeſtio iam maxime difficilis eſt reputanda, ſi numeri primi centenis millibus vel adeo vno millione maiores deſiderentur. Interim tamen in hac diſſertatione methodus ſatis expedita traditur hoc praeſtandi, dum Auctor alios numeros non contemplatur, niſi qui vnitate ſuperent quadratos, ſeu in hac forma $aa+1$ ſint contenti. Cum enim huiusmodi numeri alios diuiſores non recipiant, niſi qui ipſi ſint duorum quadratorum aggregata, atque adeo in hac forma $4m+1$ contineantur, ex ſerie numerorum formae $aa+1$ quamuis longe continuata, quae quidem ſeries mox ad maximos numeros excreſcit, facili negotio numeri compoſiti expunguntur, ita vt de relictis certi ſimus, eos eſſe primos. Huius igitur artificii beneficio labore non nimis operoſo omnes numeros primos formae $aa+1$ vltra binos milliones eſt adeptus, quos in tabula peculiari complexus eſt; vnde iam certo conſtat, hunc v. gr. numerum praegrandem 2232037 eſſe primum, quae veritas ſi more conſueto eſſet exploranda, diuiſionem per omnes numeros primos vsque ad 1494 tentari oporteret. Quo

autem multitudo huius modi grandium numerorum primorum magis augeatur, etiam eos caſus indicat, quibus formulae $\frac{aa+1}{2}$ et $\frac{aa+1}{5}$ praebent numeros primos.

VI.

De Reſolutione aequationis

$$dy + ayy\,dx = bx^m\,dx.$$

Auctore L. Eulero pag. 154.

Aequatio haec, iam dudum a Comite *Riccati* Geometris propoſita, tanto ſtudio a ſummis ingeniis eſt pertractata, vt vix quicquam noui circa eius reſolutionem proferri poſſe videatur. Statim quidem infiniti valores pro exponente *m* aſſumendi ſunt obſeruati, quibus integrale exhibere liceat, qui valores hac ſerie progrediuntur: $0 - 4 - \frac{3}{4}, -\frac{8}{3} - \frac{8}{5} - \frac{12}{5}, -\frac{12}{7}, -\frac{16}{7} - \frac{16}{9}$ etc. ac methodus, qua hi caſus ſunt euoluti, ita erat comparata, vt ex cognito cuiusque caſus integrali, integrale ſequentis definiretur, neque adeo caſuum poſteriorum integralia exhiberi poſſent, niſi iam omnes antecedentes fuerint expediti. In hac autem diſſertatione id praeſtatur, vt vnica operatione omnium illorum caſuum integralia ſimul eruantur, indeque ſtatim vel centeſimi caſus integrale aſſignari poſſit. Methodus, qua hoc commodi eſt aſſecutus, omnino eſt ſingularis, dum primo aequationem

nem propoſitam, ope certae ſubſtitutionis, in aliam, quae adeo differentialia ſecundi gradus inuoluit, transformat, eamque deinceps per ſeriem infinitam integrat, quae autem ſeries ita eſt comparata, vt ſupra memoratis caſibus alicubi abrumpatur, expreſſionemque finitam ſuppeditet, vnde integrale quaeſitum facillime colligatur. Verum tamen omnia haec integralia non niſi ſunt particularia, neque totam vim aequationis differentialis propoſitae exhauriunt, deinde etiam, quoties quantitas *b* eſt negatiua, imaginariis ita inquinantur, vt omni plane vſu deſtituantur. Vtrique incommodo Cel. Auctor ita medetur, vt primo methodum exponat, ex cognito huiusmodi aequationum integrali quopiam particulari integrale completum eliciendi, quod ſi quantitas *b* fuerit poſitiua, quantitates exponentiales implicat: deinde vero oſtendit, quomodo iſtae quantitates exponentiales, quae, exiſtente *b* negatiuo, fiunt imaginariae, per tangentes arcuum circularium realiter exprimi queant. Denique cum methodus illa, ex integrali particulari completum eliciendi, certam quandam integrationem exigat, quae moram faceſſere queat, etiam huic incommodo occurrit, dum obſerua, tpro quouis caſu primam euolutionem non vnum, ſed adeo duo integralia particularia, praebere, quoniam ibi formula radicalis $\sqrt{b}$ ingreditur, quam aeque negatiue, ac poſitiue, accipere licet. Alia igitur methodo vtitur, cuius ope ex cognitis duobus integralibus particularibus integrale completum, ſine vlla noua integratione, concludi queat. Quod cum ab eo, quod priori methodo erat erutum, diſcrepare nequeat, ex vtriusque collatione integrationem priori implicatam effi-

cere licet, vnde poſtremo hanc integrationem maxime memorabilem deducit, quod ſit

$$\int \frac{e^{\frac{2ac}{n}x^n}dx}{uu} = \frac{Ce^{\frac{2ac}{n}x^n}z-u}{Cu(2acx^{n-1}uz+\frac{udz}{dx}-\frac{zdu}{dx})}$$

vbi quantitates z et u per x ita definiuntur, vt ſit:

$$z = x^{\frac{-n+1}{2}} + \frac{(nn-1)}{8nac}.x^{\frac{-3n+1}{2}} + \frac{(nn-1)(9nn-1)}{8.n16\,n\,a^2c^2}x^{\frac{-5n+1}{2}} + \text{etc.}$$

$$u = x^{\frac{-n+1}{2}} - \frac{(nn-1)}{8nac}x^{\frac{-3n+1}{2}} + \frac{(nn-1)(9nn-1)}{8n16na^2c^2}x^{\frac{-5n+1}{2}} - \text{etc.}$$

Cum igitur hae formae z et u adeo in infinitum excurrere queant, eo magis eſt mirandum, quod formula $e^{\frac{2ac}{n}x^n}\frac{dx}{uu}$ integrale, idque per expreſſionem ſatis ſimplicem, exhiberi poſſit. Tum vero etiam hoc conſuetae integralium formae aduerſari videtur, quod quantitas conſtans arbitraria C, per integrationem ingreſſa, quae alioquin nude adiicitur, hic ipſi formae integrali ſit implicata. Quod ſingulare phaenomenon ſi attentius perpendatur, mox patebit, integrationem illam veritati conſentaneam eſſe non poſſe, niſi denominatoris pars

$$2acx^{n-1}uz + \frac{udz - zdu}{dx}$$

fuerit quantitas conſtans, puta A; tum enim iſtud integrale in formam naturalem abit:

$$e^{\frac{2ac}{n}x^n}\frac{z}{Au} - \frac{1}{AC}.$$

Num autem res ita ſe habeat, hoc modo explicari poteſt: Quoniam quantitates z et u per ſeries exprimuntur, easque ipſas, quae initio ex euolutione aequationis

nis differentialis ſecundi gradus ſunt eruta, viciſſim patet, eas ita pendere ab x, vt ſit:

$$ddz + 2acx^{n-1}dxdz + (n-1)acx^{n-2}zdx^2 = 0 \text{ et}$$

$$ddu - 2acx^{n-1}dxdu - (n-1)acx^{n-2}udx^2 = 0.$$

Nunc prior aequatio per u, poſterior vero per z, multiplicetur, ac productorum differentia dabit

$$uddz - zddu + 2acx^{n-1}dx(udz + zdu) + 2(n-1)acx^{n-2}uzdx^2 = 0,$$

cuius integrale manifeſto eſt

$$udz - zdu + 2acx^{n-1}uzdx = Adx.$$

Cum autem, facto $ac = \infty$, fiat $u = z = x^{\frac{-n+1}{2}}$ et $uz = x^{-n+1}$, euidens eſt, ſtatui debere $A = 2ac$, ſicque integratio ſuperior abit in hanc formam:

$$\int e^{\frac{2ac}{n}x^n}\frac{dx}{uu} = e^{\frac{2ac}{n}x^n}\frac{z}{2acu} - \text{Conſt.}$$

quae non ſolum principiis eſt conformis, ſed etiam, facta differentiatione, ob

$$udz - zdu = 2acdx(1 - x^{n-1}ux)$$

eius veritas egregie confirmatur. Hinc autem iam aequationis $dy + ayydx = accx^m dx$, poſito $m = 2n - 2$, et quantitatis z valore per ſuperiorem ſeriem expreſſo, integrale multo ſuccinctius ita exhiberi poterit, vt ſit:

$$y = cx^{n-1} + \frac{dz}{azdx} + \frac{2Cce^{\frac{-2ac}{n}x^n}}{z(Cz - Ce^{\frac{-2ac}{n}x^n}u)} \quad \text{ſeu}$$

$$y = cx^{n-1} + \frac{dz}{azdx} + \frac{2c}{z(De^{\frac{2ac}{n}x^n}z - u)}$$

vbi D eſt illa conſtans arbitraria per integrationem iniecta ad integrale completum conſtituendum.

VII.

Inueſtigatio functionum ex data differentialium conditione.

Auctore L. Eulero pag. 110.

In ſuperiori volumine a Cel. Auctore huius diſſertationis iam nouus quaſi campus Analyſeos infinitorum eſt detectus, in quo colendo Geometrae vires ſuas ad ſummum vniuerſae matheſeos ſublimioris incrementum exercere queant. Poſtquam enim obſeruaſſet omnia praecepta, quae vulgo circa differentiationem et integrationem tradi ſolent, ad functiones tantum vnicae variabilis referri, ita vt etiamſi plures variabiles in calculo occurrant, tamen ſemper per eliminationem negotium eo perduci debeat, vt tandem ad aequationem duas tantum variabiles complectentem perueniatur, ex qua, qualis altera alterius ſit functio, definiri oporteat. Hinc iſtam Analyſeos partem, quae adhuc fere ſola eſt exculta, ita definiuit Auctor, vt ſit methodus functionem vnius variabilis ex data eius differentialium cuiusque gradus conditione inueſtigandi, ex quo ſecunda Analyſeos pars circa functiones binarum variabilium verſari eſt cenſenda, ita vt ex data quapiam relatione inter eius differentialia eius vera indoles inueſtigari debeat, quae inueſtigatio denuo in partes ſubdiuidetur, prout in relationem illam differentialia, vel tantum primi, vel etiam ſecundi, altiorumue ordinum ingrediantur.

diantur. Iam in hac diſſertatione prima iſtius ſubdiviſionis elementa ſtabiliuntur, atque variae methodi proferuntur, functiones binarum variabilium indagandi, ex data quacunque differentialium primi gradus relatione. Quodſi nimirum littera V denotet functionem quamcunque binarum variabilium x et y, quas a ſe invicem prorſus independentes intelligi oportet, ita vt vtramque ſeorſim per omnes valores variare liceat, geminas inde formulas differentiales naſci, eſt manifeſtum, hoc modo indicari ſolitas $(\frac{dV}{dx})$ et $(\frac{dV}{dy})$, quarum illa ex variatione ſolius x, haec vero ſolius y oritur, vtraque autem eſt quantitas finita, et more ſolito ita per differentiationem reperitur, vt, ſi differentiatio praebeat $dV = P\,dx + Q\,dy$, vbi ſine dubio litterae P et Q iterum erunt certae functiones ipſarum x et y, futurum ſit $P = (\frac{dV}{dx})$ et $Q = (\frac{dV}{dy})$. Nunc igitur omnes quaeſtiones huc pertinentes ita ſunt comparatae, vt data quacunque relatione inter quantitates x, y, V, et P, Q, inde litterae P et Q eliminentur, et aequatio ab illis libera tantum inter x et y et V indagetur, quippe qua indoles functionis V, quemadmodum a binis x et y pendet, declarabitur. Cum autem, quando de functionibus vnicae variabilis agitur, plurimae quaeſtiones adhuc calculi vires ſuperent, tum hoc idem multo magis in his quaeſtionibus circa duas variabiles vſu venit, vt numerus earum, quas quidem reſoluere licet, admodum ſit limitatus, praeſertim hoc tempore, quo iſta noua Analyſeos pars demum tractari eſt coepta. Interim tamen methodi, quas Auctor hunc in finem excogitauit, mox vberiorem tractationem polliceri videntur.

PHYSICO-

PHYSICO - MATHEMATICA.

I.

De motu vibratorio fili flexilis corpuſculis quotcunque onuſti.

Auctore L. Eulero pag. 215.

Problema hoc, iam ab aliis ſolutum, Cel. Auctor hic ita tractat, vt id ad ſolutionem generalem problematis de cordis vibrantibus accommodet. Poſtquam enim motus omnes, cuius corda tenſa et aequaliter craſſa eſt capax, facili conſtructione determinaſſet, plures obiectiones contra hanc ſolutionem, a more Analyſeos ſolito recedentem, eſt expertus, quarum vis eo potiſſimum erat directa, vt, niſi cordae initio certa quaedam figura fuerit inducta, eius motus nullo plane modo per Analyſin definiri poſſe aſſeueraretur, quamvis negari non poſſet, ad quamcunque figuram corda initio fuerit detruſa, ea demiſſa certum quendam motum neceſſario ſubſequi debere. Controuerſia igitur non tam in hoc agitabatur, quod Auctoris ſolutio ſit, erronea, ſed quod problema ipſum ita ſit comparatum, vt nullam plane ſolutionem admittat, atque adeo nefas ſit, ſolutionem a quoquam tentari. Facile quidem Auctor concedebat, ſolutionem a ſe datam a conſueto more huiusmodi problemata reſoluendi diſcrepare, atque adeo vires Analyſeos adhuc plerumque excultae ſuperare, ſcilicet ideo

ideo iſta Analyſeos pars huiusmodi quaeſtionibus ſoluendis non ſufficit, quia in functionum tantum vnicae variabilis inueſtigatione verſatur; indeque enim certe nunquam eiusmodi ſolutionem obtinere licet, quae curuam quamcumque, pro lubitu ductam, nullaque certa lege contentam, qualis forte cordae initio fuerit impreſſa, in ſe complecteretur. Verum vel hoc exemplo alterius illius Analyſeos partis ſupra laudatae vis maxime eluceti, ex qua ſola huius problematis ſolutio eſt petenda. Durante enim cordae motu, interuallum, quo punctum eius quoduis a ſitu naturali diſtat, re vera, vt functio duarum variabilium, debet tractari, quoniam id non ſolum a loco puncti in corda, ſed etiam a tempore iam elapſo, pendet. Docuit vero Cel. Auctor, quoties per integrationes ad huiusmodi functiones deducimur, tum non, vti in integrationibus vulgaribus, quantitatem conſtantem arbitrariam in calculum inuehi, ſed eius loco adeo functionem arbitrariam cuiuspiam variabilis, quam deinceps hoc caſu chordarum ita determinari oporteat, vt ad figuram illam prorſus arbitrariam, quae cordae initio fuerit inducta, accommodetur. Quam inſignem obſeruationem cum Auctor poſtmodum demum clariſſime illuſtraſſet, in hac disquiſitione, loco cordae, filum perfecte flexile ponduſculis quotcunque onuſtum, dataque vi tenſum, conſiderat, et poſtquam ſingula ponduſcula a ſitu naturali pro lubitu vtcunque fuerint diducta, ſubitoque dimiſſa, motum eorum ſecuturum determinat; quod cum ſine ſubſidio ſublimioris illius Analyſeos partis praeſtari queat, ſiquidem ſingulorum corpuſculorum motus ſeorſim indagare licet, ex ipſa ſo-

lutione luculenter apparet, motum huiusmodi fili, quotcunque ponduſculis onuſti, ſemper analytice aſſignari poſſe, quomodocunque ſingula ponduſcula initio a ſitu naturali fuerint deducta. Nunc igitur, tam ponduſcula, quam eorum interualla, in infinitum diminuantur, vt hoc modo corda continua craſſitie praedita exoriatur, quo facto nulli quoque dubio relinquetur locus, quin huiusmodi cordae motus, poſtquam ipſi initio figura quaecunque fuerit inducta, per Analyſin determinari poſſit. Ad hoc vero neceſſario altera illa Analyſeos pars, circa functiones binarum variabilium occupata, requiritur, neque iam amplius de ſolutione generali, quam Auctor pro motu cordarum vibrantium inuenit, dubitare licebit. Caeterum inter infinitos motus, quos tale filum ponduſculis onuſtum recipere poteſt, et qui plerumque maxime ſunt irregulares, imprimis notaſſe iuuabit, dari quoque motus ſpecies regulares, aequalibus vibrationum interuallis diſtinctas, quae propterea ſonos determinatos edant. Si tam interualla, quam ponduſcula, ſint aequalia, ſi um duobus onuſtum duos ſonos edere poteſt, qui ſunt inter ſe, vt ſinus angulorum 30° et 60°, hoc eſt, vt 1 ad $\sqrt{3}$; filum autem tribus onuſtum tres ſonos edere poteſt, qui ſunt inter ſe, vt ſeries angulorum $22\frac{1}{2}°$ 45°. et $67\frac{1}{2}°$; quatuor vero ponduſculis onuſtum quatuor ſonos, qui ſunt, vt ſinus angulorum 18°.36° 54°72°. et ita porro, qui ergo ſoni plerumque ſunt irrationales inter ſe, ac propterea maxime diſſoni.

II.

II.

De motu cordarum inaequaliter craſſarum.

Auctore L. Eulero pag. 246.

Notum eſt inter muſicos, cordas, quibus in inſtrumentis muſicis vti ſolent, ſonos harmoniae aptos non edere, niſi eae per totam longitudinem eandem vbique habeant craſſitiem, atque a cordis inaequaliter craſſis ſonos rudes et maxime ingratos produci, ex quo huiusmodi cordae falſae appellantur. Quod autem cordae aequaliter craſſae ſonos ad muſicam idoneos edant, id non ſolum inde venit, quod earum vibrationes aequalibus temporis interuallis abſoluantur, ſicque ſonum certi tenoris exhibeant, ſed etiam potiſſimum eam ob cauſam, quod eadem corda pulſata, praeter ſonum principalem, ſimul alios ſonos acutiores auditui percipiendo offerat, qui cum principali gratiſſimam harmoniam conſtituant. Huiusmodi ſcilicet corda pulſa, praeter ſonum principalem, alii ſoni, cum octaua, tum duodecima, porro duplici octaua, ſeu decima quinta, ac denique decima ſeptima altiores, debiliter quidem, ſed ſatis diſtincte, percipiuntur, qui ſoni, cum ad principalem ſint, vt numeri 2, 3, 4, 5, ad vnitatem, egregia harmonia ſenſum auditus permulcent. Quomodo autem hi ſoni ab eadem corda ſimul producantur, quo phaenomeno pleriſque vniuerſa motus vibratorii theoria

euerti eſt viſa, primum ab acutiſſimo Geometra *Daniele Bernoulli* feliciſſime eſt explicatum. Qui autem hanc rationem minus perſpexerunt, mira myſteria in his ſonis ab eadem corda ſimul editis quaeſiuerunt, inter quos adeo peritiſſimus rei muſicae artifex Gallus *de Rameau* principium vniuerſae harmoniae in hoc phaenomeno ſe feliciter detexiſſe gloriatur. Non ideo ſcilicet plures ſonos ſuauem harmoniam auribus exhibere arbitratur, quod vibrationum eodem tempore editarum numeri ſimplicem ac perceptu facilem inter ſe teneant rationem, quemadmodum omnes ſcriptores muſici adhuc ſtatuerunt, ſed potius, euerſo hoc principio indoli vibrationum innixo, ideo plures ſonos nobis placere, ſi ab eodem corpore ſonoro ſimul excitari queant: hoc modo putat verum harmoniae principium nobis ab ipſa natura declarari, neque id alibi quaeri oportere. Verum praeterquam quod ſententia recepta circa harmoniae principium ſolidiſſimis rationibus ſit confirmata, neque ea tali phaenomeno, quod ab eodem corpore plures ſoni harmonici ſimul edi queant, infringatur; haec noua opinio, omni ratione deſtituta, penitus refelletur, ſtatim atque eiusmodi corpora ſonora in natura exiſtere oſtendentur, quae ſimul plures ſonos minime harmonicos edant. Huiusmodi autem exempla iam in ſuperiori diſſertatione ſunt prolata, vbi a filo pluribus corpuſculis onuſto eiusmodi ſoni diuerſi edi poſſunt, qui, dum ne rationalem quidem rationem inter ſe tenent, maxime ab harmonia abhorrent, cuiusmodi plurima alia exempla in corporibus ſonoris, veluti campanis, laminis elaſticis, aliisque, in medium proferri poſſent. Idem

quoque

quoque in cordis inaequaliter craſſis plerumque vſu venit, quarum motum vibratorium Auctor in hac diſſertatione definire eſt aggreſſus. Verum haec inueſtigatio tantis implicatur difficultatibus, vt non niſi pro certis inaequalitatis legibus expediri poſſit, idque euenit ob defectum illius alterius Analyſeos partis iam ſaepius memoratae, quae circa integrationem functionum duas variabiles inuoluentium occupatur, et quae minime adhuc eousque eſt exculta, vt cordae, vtcunque inaequaliter craſſae, motus vibratorius inde definiri poſſit. Duos igitur tantum caſus Auctor expediuit, alterum, quo cordae craſſities ſecundum certam figuram conicam varíatur, alterum vero, quo corda ex duabus partibus diſparibus eſt compoſita, cuiusmodi oritur, ſi duae cordae ordinariae, altera craſſior, altera tenuior, connectantur. Talium cordarum motum ſemper fore maxime irregularem, neque idcirco vlli ſono muſico edendo aptum, obſeruat Auctor, niſi partium longitudo reciprocam teneat rationem diametri craſſitiei, quo ſolo caſu corda perinde ſonabit, atque corda vbique aequaliter craſſa. Praeterea vero quoque ſub certis tantum conditionibus vibrationes iſochronae naſci poſſunt, quas Auctor accurate inueſtigat, ad quod cum calculus ſatis prolixus requiratur, quem in genere expedire haud licet, caſum euoluit, quo ambae partes paris ſint longitudinis, pondus autem alterius altero quadruplo ſit maius; calculoque abſoluto inuenit, talem cordam plures ſonos ſimul edere, qui ſint inter ſe, vt hi numeri 0,30408; 0,69591; 1,30408; 1,69591; 2,30408 etc. qui cum ſint incommenſurabiles, maxime quoque erunt diſſoni, etiam

ſi ab eodem corpore ſonoro ſimul edantur. Denique Auctor iterum ad cordas vtcunque inaequaliter craſſas reuertitur, atque in eos caſus inquirit, quibus ſaltem vibrationes iſochronae produci queant, poſtquam ſcilicet corda initio certo quodam modo fuerit impulſa, hocque ſimilibus caſibus euenire obſeruat, quibus aequationem *Riccatianam*, de qua ſupra eſt actum, reſoluere licet.

III.

Thermometri metallici deſcriptio.

Auctore I. E. Zeihero p. 305.

Omnium thermometrorum ratio huic innititur phaenomeno vniuerſali, quod omnia corpora calore in maius volumen expanduntur, frigore autem in minus contrahuntur. Quodſi ergo cuiusque corporis verum volumen quauis tempeſtate exactiſſime dimetiri liceret, mutatio in caloris gradu facta inde commode diiudicari poſſet, nihilque referret, ſiue corpus illud foret ſolidum, ſiue liquidum; etiamſi forte vera caloris quantitas perperam incremento voluminis proportionalis cenſeatur. Quantumuis autem iſtud thermometrorum principium firmum videatur, et ad ſcopum egregie accommodatum, id tamen in ſe ſpectatum omni plane vſu deſtitueretur, niſi ſingularis conditio ei eſſet adiuncta, qua fit, vt ab eodem caloris gradu in diuerſis corporum generibus omnino diſpares voluminis expan-

ſiones

ſiones producantur, quam circumſtantiam auctores non ſemper ſatis ſollicite perpendiſſe videntur. Quodſi enim omnia corpora pro ratione magnitudinis ab eodem gradu caloris aequalia voluminis incrementa acciperent, nullo plane modo, nobis quidem, has mutationes, quantumuis fuerint magnae, obſeruare liceret, quandoquidem etiam menſurae, quibus vti conſueuimus, parem mutationem ſubirent, ſicque perpetuo ad corpora menſuranda eandem rationem conſeruarent. Neque ergo thermometra vulgaria, etiam in maxima tempeſtatis commutatione, vllam variationem eſſent indicatura, ſi vitrum pari expanſioni a calore oriundae eſſet obnoxium, atque liquor in eo contentus. Ex quo haec thermometra eatenus tantum variationi caloris ac frigoris indicandae ſunt apta, quatenus liquor, quo tubi vitrei cum bulla ſubnexa impleri ſolent minorem mutationem a calore patitur, quam ipſum vitrum; quin etiam neceſſe eſt, vt mutatio vitri multo ſit minor, quam liquoris, quia alioquin effectus parum eſſet ſenſibilis. Hoc idem ergo quoque de corporibus ſolidis, quae ad ſimilem effectum producendum fuerint adhibenda, erit tenendum, vt ſcilicet parietes, vel alius generis ſuſtentacula, iuxta quae menſura inſtitui debet, multo minus a calore afficiantur, quam virgae illae, vel bacilli, ex quorum expanſione gradum caloris diiudicari oportet. Pluribus igitur experimentis edoctus obſeruauit ſolertiſſimus Auctor, in hunc finem optimo ſucceſſu bacillos, ſeu cylindros, metallicos adhiberi poſſe, inter quos argenteos, ſeu ſaltem cupreos, eligendos potiſſimum arbitratur, quod non ſolum a caloris mutatione inſignem variationem accipiant, ſed etiam prae-

praegrandem caloris gradum ſine fuſione ſuſtinere queant. Tum vero modum excogitauit, plures huiusmod cylindros ita inter ſe adaptandi, vt mutationes ope vectium indicandae tandem quantumuis magnae reddantur, neque vero et hunc effectum expectari poſſe euidens eſt, niſi paries, vel fulcrum, in quo, tanquam corpore fixo, hypomochlia illorum vectium conſtituuntur, multo minorem expanſionem ab aucto calore patiantur. His circumſtantiis probe perpenſis nullum eſt dubium, quin huiusmodi noua thermometra metallica aeque commode ad tempeſtatis mutationes indicandas vſurpari queant, atque vulgaria, ſiue ſpiritu vini, ſiue mercurio, impleri ſolita.

IV.

Thermometrorum punctis conſtantibus gaudentium emendatio.

Auctore I. E. Zeihero p. 314.

Nimis ſaepe euenire ſolet, vt cum thermometra omni cura fuerint conſtructa, ac praecipue ſcalae diviſionum, in tabulis metallicis nitidiſſime elaboratae, tum, diffracto forte tubo vitreo, omnis opera pereat, neque eadem ſcala deinceps iterum ad ſimilem ſcopum adhiberi poſſit. Graduum enim in ſcala exſculptorum magnitudo ita pendet a ratione, quam tubi amplitudo tenet, ad bulbi capacitatem, vt niſi in duobus huiusmodi inſtru-

ſtrumentis haec ratio exactiſſime fuerit eadem, quod certe rariſſime contingit, eadem iis inſeruire nequeat. Hinc Cl. Auctor remedium ingenioſe excogitatum proponit, quod in hoc conſiſtit, vt tubo thermometrico loco bulbi vitrei capſula ferrea adaptetur, quae ope cochleae ipſi inſertae facile ita parari poteſt, vt eius cauitas pro lubitu ampliari et coarctari queat. Sic enim paucis experimentis inſtitutis haud difficulter ea capacitas capſulae definietur, quae ad tubi amplitudinem relata praeciſe eandem graduum magnitudinem exigat, quae deſideratur, eique proinde ſcala iam confecta optimo ſucceſſu adiungi queat, ſi modo tantum liquoris infundatur, vt vnicus temperiei gradus recte deſignetur.

V.

Emendatio Microſcopii Solaris.

Auctore F. V. T. Aepino pag. 316.

Obiectorum minimorum per microſcopia ſolaria, qualia adhuc ab artificibus ſunt conſtructa, repraeſentationem pluribus vitiis eſſe inquinatam, vel inde intelligitur, quod cum radii lucidi per ipſa obiecta transmittantur, horum forma eatenus tantum in imagine exprimatur, quatenus ipſa ſunt pellucida, ita vt, ſi hac proprietate carerent, nulla prorſus repraeſentatio efficeretur.

retur. Deinde ob eandem rationem, quod radii ſolares, qui ad illuminationem adhiberi ſolent, per ipſam quaſi ſubſtantiam obiectorum tranſire debent, inſignes refractiones patiuntur, quibus fit, vt imagines intolerabilibus iridis coloribus circumfuſae exhibeantur. Hoc ſcilicet vitio microſcopia ob ingentem ſpeciei multiplicationem multo magis premuntur, quam laternae magicae, quarum conſtructio certam rationem ſequi ſolet. Vtrumque autem horum inſtrumentorum genus Cel. *Eulerus* ab hoc ingenti vitio feliciter liberauit, dum eiusmodi ſtructuram docuit, qua obiectorum maxime opacorum imagines, tam per microſcopia ſolaria, quam per laternas magicas, ſine vlla confuſione nitidiſſime repraeſentantur, dummodo ſufficienti luminis copia illuſtrentur, quod egregium inuentum in Tom. III. Nou. Comment. Academiae noſtrae ita accurate extat explicatum, vt huiusmodi inſtrumenta a ſolerti artifice haud difficulter confici poſſint. Maximum autem ad hunc ſcopum adiumentum Cel. huius diſſertationis Auctor attuliſſe merito eſt cenſendus, dum vulgaria microſcopia ſolaria, ope leuis mutationis in eorum ſtructura faciendae, ad hunc nouum vſum transferre docuit, neque vllum eſt dubium, quin duabus pluribusue lentibus adhibendis repraeſentatio adhuc praeſtantior obtineri poſſit, quem ſummum perfectionis gradum Auctor pollicetur.

VI.

Diſſertatio de Experimento quodam magnetico.

Auctore F. V. T. Aepino pag. 326.

Additamentum ad praecedentem Diſſertationem auctore eodem p. 340.

Virtute magnetica impraegnatur filum ferreum nonſolum, cum ad polos magnetis affricatur, ſed etiam dum quodam interuallo remotum ſuper ambos polos traducitur. Quod cum olim diligentiſſimus naturae ſcrutator Gallus *Du Fay* plurimis experimentis eſſet proſecutus, inſigne ac maxime mirandum phaenomenum obſeruauit, quod poli magnetici, qui filo ferreo in minori diſtantia ſuper polos magnetis traducto imprimuntur, iidem in maiori diſtantia ita inter ſe permutentur, vt qui terminus in minori diſtantia naturam poli borealis eſſet nactus, idem in maiori diſtantia ad polum auſtralem dirigeretur. Quod phaenomenum cum omni Theoriae, quae quidem ad magneticos effectus explicandos excogitari queat, maxime aduerſari videatur, Cel. Auctor in eo eſt occupatus, vt eius egregium conſenſum cum ea Theoria, quam nuper circa vires magneticas et electricas protulit, dilucide demonſtret. Quem in finem ſupponit, vires attrahentes et repellentes amborum cuiusque magnetis po-

lorum in vnicum punctum coactas eſſe, et rationem ſequi inuerſam diſtantiarum, indeque euenire poſſe per calculum omni rigore geometrico inſtitutum oſtendit, vt ab iſtis viribus coniunctis in maiori diſtantia omnino ei contrarius producatur effectus, qui alias in diſtantia minori exeratur. Deinde animaduertit, quod etſi adſumtae hypotheſes naturae minus ſint conſentaneae, et etiamſi verae vires magneticae ab hac lege diſcrepent, ſimilem tamen effectum inde reſultare debere, in quo haud debile Theoriae ſuae firmamentum ſitum eſſe contendit. Iungit tum huic diſſertationi ſupplementum eximium, in quo multa alia experimenta noua, *Fayano* non abſimilia, a priori ex theoria ſua praeuiſa, et experientiae penitus conſona, recenſet et explicat.

VII.

Cogitationes de aggeribus conſtruendis. Auctore L. Eulero pag. 352.

In prouinciis maritimis haec quaeſtio maximi eſt momenti, vbi littora aduerſus fluctuum impetum aggeribus muniri oportet, quorum tam exſtructio, quam conſeruatio, ingentes ſumtus poſtulat. Antequam igitur huiusmodi opus ſuſcipiatur, ſollicite eſt diſquirendum, vtrum reditus ex terris hoc modo munitis percipiendi expenſus ad aggeres requiſitas ſuperent, nec ne? Niſi enim cultura terrae plus fructuum afferret, de aggerum ex-

extructione cogitandum ne quidem ſoret. Tum vero etiam imprimis eſt perpendendum, ſi littorum ora fuerit valde irregularis et ſinuoſa, minime eſſe conſultum, aggeres iuxta ipſam littoris figuram duci, ſed potius praeſtare, vt aggeribus a littore reductis forma commodior tribuatur. Quanquam enim hoc modo minor terrae tractus includitur, vnde propterea minores fructus percipiantur, tamen fieri poteſt, vt haec iactura aggeris contractione ob multo minores ſumtus in eius extructionem requiſitos largiter compenſentur. Semper igitur haec quaeſtio diligentiſſime euolui meretur, qua quaeritur: quomodo data littoris cuiuspiam figura aggeres in eo ſint conſtruendi, vt fructus ex terra percipiendi maximo lucro excedant ſumtus in aggerum tam extructionem, quam conſeruationem, impendendos, in qua diſquiſitione facile intelligitur ſaepius euenire poſſe, vt maxime expediat minorem terrae portionem hoc modo muniri, lucrumque inde expectandum ob aggeris diminutionem multo maius eſſe aeſtimandum. Ad huiusmodi ergo quaeſtiones enodandas ante omnia expendi oportet: primo, quantas expenſas exſtructio aggeris datae longitudinis, veluti vnius perticae, poſtulet; ſecundo, quantum ad conſeruationem talis portionis aggeris quotannis requiratur, quos annuos ſumtus, tanquam vſuram, ad ſortem fixam reuocari conuenit, quibus coniunctis totum pretium vnius perticae aggeris habebitur; tertio vero ad fertilitatem et vſum terrae muniendae eſt ſpectandum, vt pateat, quantos fructus a qualibet pertica quadrata quotannis expectari liceat, quos pariter ad ſortem fixam reduci conueniet. His rebus accurate

determinatis quaeſtio ad meram Geometriam et Analyſin reuocatur, cuius tamen reſolutio ingentem circumſpectionem poſtulat, ideo neceſſariam, quod aggeres quidem quantumuis intra continentem reduci, neutiquam vero vltra extremam littoris oram extendi licet. In prouinciis etiam aggeribus iam munitis haec eadem quaeſtio ſaepius occurrere ſolet, quando ſcilicet fluctus marini ſenſim tantum terrae vltra aggeres alluunt, vt operae pretium videatur, hanc nouam terram nouo aggere cingi, et in vſum conuerti. Quod cum non ita pridem in prouincia Germaniae maritima contigerit, atque haud leuis controuerſia circa noui aggeris extructionem fuerit orta, et ad Auctorem delata, anſam ei praebuit, hoc argumentum, quod ſaepius ſummum vſum habere poteſt, accurate pertractandi.

PHYSICA.

PHYSICA.

I.

Ad Obſeruationes et Experimenta de Mercurio ex ſcriptis *Hermanni Boerhaue.* Supplementum I. receníente *Carolo Friderico Kruſe* p. 381.

Si quis Chemicorum naturam mirabilis metalli Mercurii (quidni enim metallum dicamus, quod noſtra aetate a frigore ambiente condenſari, et iterum ab augmento caloris fluidum fieri experti ſumus?) intelligenter ac indefeſſo ſtudio explorauit, is certe eſt vir ſummus, in arte ſalutari et hermetica communis Medicorum praeceptor, immortalis *Hermannus Boerhaue.* Fidem faciunt huius aſſerti ſcripta eius cum Regia Scientiarum Academia Pariſienſi, et cum Societate Regia Londinenſi communicata. Stupendo labore, conſtantia Herculea, per XV. annos, vno igne, Mercurium torſit, naturam variis artificiis ſollicitauit, immo coegit, vt vel inuita ſecreta ipſi ſua reuelaret. Superaddidit praeterea IV. annorum labores. Perrexit enim in hac opera, quoad vixit, ita vt nil dici poſſit, quod ipſius experimentis et obſeruationibus aequiparari queat. Felici Chemicae artis, imo vniuerſae ſalutaris doctrinae, fato, factum eſt, vt ſcripta viri immortalis, typis nondum exſcripta, poſtquam ab *Hermanno* et *Abrahamo Kaau*, fratribus, *Boerhauiis*, in Ruſſiam perlata eſſent, haere-

haereditaria poſſeſſione ceſſerint Viro Illuſtri *Carolo Friderico Kruſe*, AVGVSTAE omnium Ruſſiarum IMPERATRICIS Archiatro ac Conſiliario Status actuali, Academiae Imperialis Scientiarum Socio, *Hermanni Kaau Boerhauii* genero, qui, quod *Abrahamus* animo conceperat, at immatura morte facere prohibitus eſt, ſcripta *Boerhauiana*, publico emolumento ſtudens, ſingillatim edet. Primum hoc, quod praedicamus, ſpecimen oſtendit, quid inpoſterum expectare debeamus. Academia non poteſt non lubenter recipere et in publicum vſum emittere ſcripta viri, quem inter Collegas quondam ſuos numeraſſe honori ſibi ducit. Scopus tantorum Mercurio impenſorum laborum hic fuit, vt conſtaret, quid de promiſſis Alchemiſtarum, fixationem, ſolidationem, transformationem, Mercurii iactantium, ſperare fas ſit. Si, quod nonnullis placet, primum fauorabiliter ſenſit de via, Mercurii ope, ad magnum, quod vocant, opus ducente, procul dubio ad mirabiles huius metalli qualitates reſpexit, quae quo difficiliores eſſent explicatu, eo magis inducere debuerunt ſincerum atque veritatis amantem virum, vt non omnem prorſus fidem denegaret exemplis, de metallo hermetica arte parato afferri ſolitis. Philoſophi eſt in dubium vocare, quae non intelligit, aut quae explicare neſcit; negare non item. Ad hoc requiritur, vt impoſſibilitatem demonſtrare valeat. Id autem eſt, quod millies et nouies repetita experimenta Philoſophum docuerunt. Obſeruauit namque, Mercurium, varias licet induentem perſonas, aſt re ipſa immutabilem, vehementiore nimirum ignis actione, in priſtinam ſemper formam redire.

Ergo

Ergo non inutiliter operam ſuam collocaſſe eſt cenſendus magnus *Boerhauius*; in periculoſo mari ſyrtes, ad quas multi bonorum ſuorum naufragia fecerunt, euitare docuit: vtilius ſane, quam ſi poſſibilitatem transmutationis Mercurii in aurum oſtendiſſet, aut ſi ipſum aurum, in perniciem aliorum et ſui, conficere docuiſſet.

II. et III.

Obſeruationes meteorologicae annis 1757 et 1758. Petropoli factae, cum animaduerſionibus et conſectariis.

Auctore I. A. Braun p. 392. et 440.

De ipſis obſeruationibus, vt quae eadem methodo, iisdemque ac praecedentes inſtrumentis, ſunt inſtitutae, nil dicere attinet. Operae autem pretium eſt, ſingularia quaedam notatu digna huc transferre.

Anno 1757.

Altitudo Barometrica, maxima ex omnibus, quae Petropoli obſeruatae fuerunt, hoc anno fuit,

29. 12 poll. Pariſ.
30. 35 — Lond.

Calor maximus 97 grad. therm. Delisliani hoc aeque ac ſequente anno obſeruatus eſt, qui aequalis eſt calori

hominis naturali et ſanguinis in homine ſano. Calor fere perpetuus per totam aeſtatem ac intolerabilis. Serenitas dierum per totum annum extraordinaria.

Anno 1758.

Calor maximus, etiamſi calori praecedentis anni aequalis fuit, minus tamen frequenter accidit. Menſe Iulio nullum tonitru, quod ſatis inſolitum. Copia pluviae per omnem aeſtatem 16 poll. Pariſ. quod etiam inſolitum, quare a nimia humiditate annona multa et foenum periere. Declinatio magnetis, vt fere ſemper ſolet $4\frac{1}{2}^\circ$ W. Maculae in ſole copioſiſſimae.

Tempus medium, quo glacies Neuae fluuii ſolui ſolet, eſt circa d 8 Aprilis, congelationis terminus medius circa 20 Nouembris, monſtrante thermometro Delisliano 166 gradus, ſi quidem hoc frigus per aliquod dies durat.

IV.

Deſcriptionis Piſcium rariorum e Muſeo Petropolitano exceptorum continuatio.

Auctore I. T. Koelreuter p. 420.

Sex piſces ſunt, eadem methodo, ac iſti in praecedente volumine, deſcripti, nempe:

Cyprinus pinna caudae horizontali, ſubtrifida; dorſuali faſtigata, paruula.

Gobio

Gobio pinna ventrali ſubrotunda, acetabuliformi, e duobus pedunculis, octoque radiis, valde ramoſis, compoſita.

Gobio pinna dorſuali vnica, longa; pectoralibus latiſſimis, acetabulum planiuſculum includentibus.

Sparus duabus vtrinque maculis notatus; primo pinnarum ventralium radio longiſſimo, aſtaci antennam referente.

Labrus valde oblongus, taeniis tribus candidis, diuerſae longitudinis, inſignitus, cauda integra.

Scomber dorſi anique pinna continua, aculeis ad vtriusque initium acceſſoriis.

ASTRONOMICA.

I.

Obſeruationes aliquot aſtronomicae et meteorologicae, Lipſiae habitae a Godofr. Heinſio p. 473.

Varias continet hoc a Cl. *Heinſio* ad nos transmiſſum ſcriptum Obſeruationes, ſeparatim hic indicandas.

D. 24. Ian. ſtyl. nou. An. 1758. Eclipſin Lunae totalem obſeruabat Cl. Vir, quae vero Obſeruatio per intercurrentes nubes, et male terminatam, praeſertim ſub initium, vmbram telluris, turbata quodammodo fuit.

D. 26. Ian. eiusd. anni poſt merid. hora circ. $2\frac{5}{8}$ occupatus erat in capiendis altitudinibus Solis correſpondentibus, atque direxerat quadrantem ita, vt linea fiduciae $11^{\circ}.40\frac{3}{4}'$. reſponderet. Pronus ad contactum iam erat cum filo tubi horizontali Solis nubi denſiori inuoluti ſuperior limbus, cuius admodum exigua portio infra filum horizontale adhuc perſiſtere videbatur, fruſtra vero per aliquod tempus ipſius contactus celebrationem exſpectabat. Per 20 enim minuta ſecunda nulla ſenſibilis huius portionis imminutio, nullus ſenſibilis acceſſus limbi ad filum, obſeruari poterat, vsque dum tandem $17''$ ſerius, quam fieri debuiſſet, contactus conſe-

conſequeretur. Inuſitata haec a nube interpoſita producta irregularis refractio (pro huius enim effectu ſine dubio hoc phaenomenon habendum eſt) cautos reddere debet Aſtronomos, ne per nubes captis altitudinibus aſtrorum coecam habeant fidem.

Cum Anno 1753. d. 17. Apr. ſt. nou. Lunae partialis obſcuratio contingeret, ob varia incommoda non niſi finem Eclipſeos annotare potuit Cl. Auctor, quem conſequutum eſſe $8^h\ 35\frac{1}{4}'$. ſufficiente cum certitudine ſtatuere ſe poſſe putat.

D. 21 Iun. Anno 1757. $8^h.57'.55''$. emergentem poſt Lunae diſcum ſtellam, primae magnitudinis, *Cor Leonis* vocatam, vidit Cl. *Heinſius*, et d. 10 Iulii eiusdem anni $9^h.31'.20''$. ſecundi Satellitis Iouis emerſionem totalem annotauit.

Indicauit etiam Cl. Auctor, viſam a ſe An. 1756. vltimis Septembr. primisque Octobr. diebus Venerem interdiu oculis nudis, per duas tres ve horas, poſt Solis ortum, vt anno 1748. in Obſeruationibus ad Academiam miſſis, et in Tom. III. Comm. noſtrorum euulgatis, praedixerat, ac denique obſeruationes quasdam meteorologicas communicauit, ex quibus patet, maximum calorem aeſtiuum, barometrique altitudinem mediam Lipſienſem, Petropolitanis fere aequari, Petropoli vero barometrum ab hoc termino vtrinque notabiliter longius excurrere, quam Lipſiae fieri ſolet.

II.

Obſeruatio Eclipſeos Solaris, quae contigit Anno 1758. d. $\frac{19}{30}$. Decemb. habita Petropoli

a b

A. N. Griſchow pag. 486.

Poſt indicatas obſeruationes, pro examinando motu horologii penduli inſtitutas, finem huius Eclipſeos contigiſſe $9^h. 36'. 45''$ - - - - $9^h. 37'. 0''$. ſtatuit Cl. Auctor. In limite $15''$. dubiam reddiderunt hanc obſeruationem, fumus focorum atque vapores vndantes, qui aerem inquinabant.

III.

Inſtrumentorum Aſtronomicorum, Reticulo, aut Micrometro, inſtructorum, noua emendatio.

Auctore F. V. T. Aepino pag. 428.

Commoditati obſeruatoris, vt in imaginanda inſtrumentorum aſtronomicorum conſtructione, proſpiciatur, res eſt maioris momenti, quam ad primum intuitum videri poſſit, cum obſeruationum fides atque acumen

acumen manifeſto inde patiantur, ſi aſſumere aut diu ſeruare incommodum corporis ſitum cogitur Aſtronomus.

Laborant incommodo tali inſtrumenta aſtronomica micrometro praedita, conſueto more conſtructa, quod obſeruator ipſis vtens, ſi ad obiectum ſuper horizontem valde eleuatum ipſa dirigit, reclinare caput atque corpus, immo ſupinum interdum ſitum aſſumere debeat. Conatur ipſa ab hoc defectu liberare Cl. Auctor, ope ſpeculi metallici plani, quod tubo non longe a foco vitri obiectiui inclinato ad axem viſionis ſitu, ita inſerendum eſt, vt radii per axin tubi incecentes, in directione horizonti parallela ab ipſo reſiliant. Imponit autem prouti auctor monet, nouum hoc inſtrumentorum additamentum, nouae verificationis neceſſitatem Aſtronomo, quae, qua ratione commode perfici queat, ſub finem exponit.

IV.

Obſeruatio Eclipſeos Lunae d. 18. Maii ſt. v. Anno 1760. Petropoli habita. Auctore N. Popow, Andr. Kraſilnikow et Nic. Kurganow pag. 492.

Obſeruatum eſt initium huius Eclipſeos $11^h.18'.47''$. circiter, finis vero $12^h.4'.42''$. cum aliquibus momentis aliis, quorum tamen nullum praeter finem, ſatis ſecurum eſt, vti obſeruatores declarant.

Ad-

Adiunxerunt Cl. *Popow* et *Kraſilnikow* obſeruationem initii Eclipſeos Solaris eod. anno d. 2. Iunii ſt. v. viſae, quod $9^h. 1'. 44''$. accidiſſe ſtatuitur.

V.

Eclipſis Solis Lipſiae viſa hor. mat. d. 13. Iunii ſtil. nou. Anno 1760.

Auctore G. Heinſio pag. 494.

Eiusdem huius Eclipſeos ſimiliter non niſi initium vidit Clar. *Heinſius*, quod ſtatuit cecidiſſe in $7^h.25'\ 34''$. tam exacte, vt ingreſſus Solis in diſcum Lunae ad inſtans quaſi, in oculos incurreret.

VI.

Obſeruatio Eclipſeos Lunaris d. $\frac{7}{18}$. Maii 1761. habita in Obſeruatorio Imper. Petropolitano.

Auctore F. V. T. Aepino pag. 496.

Praeter initium et finem Eclipſeos, diſcique Lunae immerſionem totalem, atque emerſionis initium, praecipuarum quoque macularum immerſionem et emerſionem ex vmbra, annotauit Cl. Auctor, qui monet, ob

ob vapores denſos, ac forte crepuſculum, de immerſione et emerſione macularum ſe ipſum per minutum dimidium immo vlterius inter obſeruandum dubium haeſiſſe, reliquis vero momentis maiorem fidem adſcribit.

Tam denſa erat vmbra terreſtris, vt per ſat longum tempus penitus quaſi Luna ex coelo euaneſceret, neque vllum ipſius veſtigium ſupereſſet.

VII.

Ad Noua Acta Petropolitana Acad. Scient. Tom. III. Additamentum ex Sinis P. *Antonii Gaubil* S. I. p. 499.

Obſeruationes ſatellitum Iouis pro determinanda locorum poſitione Geographica ſedulo ac ſollerter inſtituere, ſuprema Obſeruatoribus Aſtronomis, qui Sibiriam et Kamtſchatkam peragrarunt, lex fuit. Dolendum autem, non valde multas obſeruationes huius generis, et publica luce dignas, ad Academiam perueniſſe, quod vtrum praematurae morti Viri Cl. *Ludouici De l'Isle de la Croyere* d. x. Octobris 1741 in Kamtſchatka extincti, an aliis cauſis, adſcribendum ſit, non inquirimus. Palmam reliquis praeripere viſae ſunt obſeruationes a ſollertiſſimo obſeruatore *Kraſilnikouio* habitae, quare in Vol. III. Nou. Comment. typis exſcriptae ſunt, addita collatione cum ſimilibus in ſpecula Aſtronomica Petropolitana inſtitutis obſeruationibus,

vnde differentia temporis Petropolin inter et varia Siberiae et Kamtſchatkae loca pateſcit.

Aſt dices, ipſius Petropoleos Longitudo adhuc quidem dubia videri poteſt, quia trifariam notata reperitur, et vtra determinatio reliquis praeferenda ſit, non liquet. Tom. I. Comment. pag. 480. habetur 47°. 57′. 30″. in Syllabo Long et Latit. Atlanti Ruſſico praefixo extat 47°. 49′. et ex Ephemeridibus Aſtronomicis Pariſienſibus colligitur, eſſe 47°.53′.45″. Hac occaſione notare iuuabit, vltimam determinationem, ſecundum obſeruationes b. *Griſchouii* factam eſſe videri, quia in diſſertatione Tom. VIII. Nou. Comm. inſerta p. 434. differentiam temporis Petropolin inter et Pariſios eandem, quam Ephemerides Pariſienſes nobis exhibent, aſſumſit, nimirum: 1^h. 52′. Dum autem *Griſchouium* nominamus, cuius obſeruationes quanta accuratione ſe commendare ſoleant, nemo ignorat, maximam ſimul conciliamus huic determinationi auctoritatem. Ideoque, interea dum Obſeruatores noſtri Aſtronomi certius quid hac de re ſtatuent, non dubitamus, longitudines locorum ex obſeruationibus *Kraſilnikouii* poſita long. Petrop. 47°.53′.45″. ſequentem in modum ſtabilire:

Kirenskoi oſtrog - - -	125°.36′.30″.
Iakuzk - - - - - - -	147. 14. 45.
Portus Petri Pauli - - -	176. 8. 45.
Bolſcherezkoi oſtrog - -	174. 52. 0.
Ochozkoi oſtrog - - -	160. 47. 15.
Iudomskoi kreſt - - -	157. 27. 15.
Tomsk - - - - - -	102. 33. 15.

Addi-

Addimus longitudinem Caſtelli Iamyſchewskaia, quae, cum differentia meridianorum eiusdem et Petropoleos, ſecundum obſeruationes *Kraſilnikouii* a b. *Griſchouio* quondam ſtatuta ſit 43°. 47'. erit 91°. 40'. 45''.

His praemonitis, diſpiciamus nouas locorum determinationes, quas R. P. *Gaubil* in hoc additamento nobis offert. Comparauit obſeruationes *Kraſilnikouii* cum aliis eodem tempore Pekini et in ſtatione Gallica Chandernagor, quae ad Gangetis fluuii oſtium in India orientali exſtat, inſtitutis, differentiamque temporis annotauit, quae quidem opera ſuperuacanea videri nequit, tum quod confirmantur inde poſitiones ſupra determinatae, tum quod duorum locorum determinationes adduntur, quorum obſeruationibus correſpondente ante non extabant. Sciendum autem, quod ex Ephemeridibus Pariſienſibus conſtat, Pekinum et Pariſios differentiam temporis 7h. 36'. 10''. intercedere, Chandernagor Pariſiis 5h. 44'. 37''. diſtare. Iam poſita longitudine obſeruatorii Pariſienſis, vt ex nouiſſimis obſeruationibus ſtabilita eſt 19°. 53'. 45''. emergunt inde longitudines pro

Ilginskoi oſtrog - -	122°. 30'. 0''.
Olecminskoi oſtrog -	137. 4 45.
Iakuzk - - - -	146. 13. 7.
Portus Petri Pauli	
ex obſ. Pekin. -	176. 4. 15.
ex obſ. Chandern. -	176. 28. 31.
Bolſcherezkoi oſtrog -	174. 12. 0.

Vbi obſeruationes, ſi illas, quae vrbem Iakuzk concernunt, excipias, ſic ſatis cum ſuperioribus conſentiunt.

Latitudines recenſitorum hactenus locorum ſecundum eiusdem *Kraſilnikouii* obſeruationes hae ſunt:

Ilginskoi oſtrog - -	54°.42′.
Kirenskoi oſtrog - -	57. 47.
Olecminskoi oſtrog -	60. 22.
Iakuzk - - - -	62. 2.
Iudomskoi kreſt - -	60. 5. 3½″.
Ochozkoi oſtrog - -	59. 20. 10.
Bolſcherezkoi oſtrog -	52. 54. 30.
Portus Petri Pauli -	53°. 1. 20.
Tomsk - - - -	56. 29. 58.
Iamyſchewskaia Caſtellum	51. 53. 10.

Notari meretur altitudo Poli a R. P. *Gaubil* Pekini in Collegio Gallico obſeruata, quae eſt 39°.55′.21″. Ephemerides Pariſienſes habent 39°.54′.0″. quae quidem latitudo competit Collegio Ieſuitarum Luſitanorum et Germanorum, vt infra adparebit.

Finit R. P. *Gaubil* additamentum ſuum obſeruatione de ſitu vrbis Aigun, qua error circa poſitionem huius vrbis in Atlante Ruſſico commiſſus corrigitur. Ex re ſane. Attamen diffitendum non eſt, eundem errorem nos quoque animaduertiſſe, et in Tabula acceſſiones Geographicas in vltima Expeditione Kamtſchatkienſi detectas repraeſentante, ratione habita Atlantis Sinici a Celeb. *Danville* euulgati; correxiſſe. Eſt autem Aigun, vel Aiiunchun, vetus nomen caſtri cuiusdam deſerti, vallo ex terra congeſto muniti, et dimidio fere milliari a Seiae, vel Dſiae, fluuii in Amurem oſtio, ſecundis aquis, diſſiti. Hoc cum Sinenſes

nenſes ſaeculi ſuperioris octogeſimo tertio anno, feruente cum Ruſſis bello, inſederint, duobus annis poſtea ex oppoſito illius, aut paullo infra, ad ripam Amuris meridionalem, vrbem Sagalin - Ula - Choton, vti in Cel. *Danvilli* Tabula Geographica videre eſt, exaedificarunt. In noſtra Tabula nomen Aigun adſcriptum eſt, quia ita quoque vrbs Sinica communiter adpellari ſolet. Ipſe quoque R. P. *Gaubil* non vetus caſtrum deſertum, ſed vrbem a Sinis inhabitatam, ſub nomine Aigun intellexiſſe videtur.

VIII.

Mercurius in Sole obſeruatus Pekini Sinarum Anno 1756. d. 7. Nouemb. a P. *Auguſtino Hallerſtein* S. I. p. 503.

Non haec prima eſt, quam ex Sinis habemus, Mercurii in Sole viſi obſeruatio; namque iam annis ſuperioris ſaeculi 90 et 97 eundem tranſitum Cantoni et in vrbe Tſchaotſcheu contemplatus eſt P. *Fontenay* S. I. cuius obſeruata in Memoriis Academiae Pariſienſis extant; aſt prima eſt atque palmaria haec obſeruatio, ſi indefeſſum Auctoris ſtudium, ſi inſtrumentorum aptitudinem, ſi laborum ſucceſſus ſpectes; prima, quam doctiſſimus Auctor ex ditiſſima penu obſeruationum ſuarum aſtronomicarum, quam praelo parat, excerpſit, et cum Academia communicauit. Pergunt nimirum eodem ſemper ſtudio Ieſuitae in Sinis aſtrorum ſcientiam

obſeruationibus ſuis locupletare, cognitionem ſyſtematis noſtri Solaris, terreſtrisque globi, amplificare, et perfectiorem reddere. Quod niſi eſſet, multa ſane incognita nobis manſiſſent, quae illorum ope comperta habemus atque explorata. Vnum dicam, quod vtilitatem obſeruationum Sinenſium clare oſtendit. Innumera phaenomena coeleſtia contingunt, dum atra nox tegit Europam, eadem autem in extremitate Aſiae, in Sinis, expertum ac ſedulum obſeruatorem non effugiunt. Huc quoque pertinet obſeruatus in Sinis Mercurii ſub Sole tranſitus, qui 7. Nouembris 1756. accidit. Hunc in Europa totum conſpicere non licuit, quoniam, cum inciperet, Sol adhuc ſub horizonte morabatur. Perfectiorem autem, quam, quae hoc loco exhibetur, obſeruationem, vix Aſtronomi deſiderabunt. Praeter initium atque finem huius phaenomeni exacte notata, Mercurii ſub Sole incedentis 58 loca determinauit R. Auctor, capiendo Micrometri ope differentias declinationum, et ex appulſibus ad horarium differentias aſcenſionum rectarum deducendo. Eſt autem R. Pater *Auguſtinus Hallerſtein* Tribunalis mathematici in Sinis Praeſes, PP. *Adami Schall*, *Ferdinandi Verbieſtii* et *Ignatii Koegleri* dignus ſucceſſor, vir, cuius ſingularem eruditionem, humanitatem et ardorem in bonas artes, ex commercio epiſtolico, quod nobis cum ipſo intercedit, hac occaſione data, encomio celebrare, officii ratio poſtulat.

INDEX

INDEX
COMMENTARIORVM.

Mathematica.

L. Euleri, De Reſolutione Formularum quadraticarum indeterminatarum per numeros integros p. 3.

Eiusdem, De progreſſionibus arcuum circularium, quorum tangentes ſecundum certam legem procedunt p. 40.

Eiusdem, Specimen Algorithmi ſingularis p. 53.

Eiusdem, De Reſolutione aequationum cuiusuis gradus p. 70.

Eiusdem, De numeris primis valde magnis p. 99

Eiusdem, De Reſolutione aequationis $dy + ayydx = bx^m dx$ pag. 154.

Eiusdem, Inueſtigatio functionum ex data differentialium conditione p. 170.

Phyſico - Mathematica.

L. Euleri, De motu vibratorio fili flexilis, corpuſculis quotcunque onuſti p. 215.

Eiusdem, De motu vibratorio cordarum inaequaliter craſſarum p. 246.

Zeiheri, Thermometri metallici deſcriptio p. 305.

Eiusdem, Thermometrorum punctis conſtantibus gaudentium emendatio p. 314.

Aepini, Emendatio Microſcopii Solaris p. 316.

Eiusdem, Diſſertatio de Experimento quodam magnetico p. 326. Additamentum ad praecedentem Diſſertationem auctore eodem p. 340

L. Euleri, Cogitationes de aggeribus conſtruendis p. 352.

Phyſica.

Phyſica.

Ad Obſeruationes et Experimenta de Mercurio ex manu ſcriptis *Hermanni Boerhaue* Supplementum I. recenſente *Carolo Friderico Kruſe* p. 381.

Braunii, Obſeruationes meteorologicae annis 1757 et 1758 Petropoli factae, cum animaduerſionibus et conſectariis p. 392. et 400.

Koelreuteri, Deſcriptionis Piſcium rariorum e Muſeo Petropolitano exceptorum continuatio p. 420.

Aſtronomica.

Heinſii, Obſeruationes aliquot aſtronomicae et meteorologicae, Lipſiae habitae p. 473.

Griſchouii, Obſeruatio Eclipſeos Solaris, quae contigit Anno 1758. d. $\frac{19}{30}$. Decemb. habita Petropoli pag. 486.

Aepini, Inſtrumentorum Aſtronomicorum, Reticulo, aut Micrometro, inſtructorum, noua emendatio p. 488.

Obſeruatio Eclipſeos Lunae d. 18. Maii ſt. v. Anno 1760. Petropoli habita a *N. Popow*, *Andr. Kraſilnikow* et *Nic. Kurganow* p. 492.

Heinſii, Eclipſis Solis Lipſiae viſa hor. mat. d. 13. Iunii ſtil. nou. Anno 1760. p. 494.

Aepini, Obſeruatio Eclipſeos Lunaris d. $\frac{7}{18}$. Maii 1761. habita in Obſeruatorio Imper. Petropolit. p. 496.

A. Gaubil, Ad Noua Acta Petropolitana Acad. Scient. Tom. III. Additamentum ex Sinis p. 499.

Hallerſtein, Mercurius in Sole obſeruatus Pekini Sinarum Anno 1756. d. 7. Nouemb. p. 503.

* * *

MATHE-

MATHEMATICA.

DE
RESOLVTIONE FORMVLARVM
QVADRATICARVM INDETERMINATARVM PER NVMEROS INTEGROS.

Auctore

L. EVLERO.

Problema I.

1.

Propoſita formula irrationali $\sqrt{(\alpha xx+\beta x+\gamma)}$ inuenire numeros pro x ſubſtituendos, qui eam rationalem reddant.

Solutio.

Ante omnia notantum eſt, hanc inueſtigationem fruſtra ſuſcipi, niſi vnus ſaltem caſus conſtet, quo ea fiat rationalis. Ponamus ergo hoc euenire caſu $x=a$, eoque eſſe:

$$\sqrt{(\alpha aa+\beta a+\gamma)}=b$$

ita vt b ſit numerus rationalis. Huiusmodi autem caſus, vnico cognito, innumerabiles alios ex eo deriuare licet. Ponatur in hunc finem

$$x=a+mz \text{ et } \sqrt{(\alpha xx+\beta x+\gamma)}=b+nz$$

 et

et hac aequatione quadrata fit:

$$\begin{aligned}&+\alpha aa+2\alpha maz+\alpha mmzz=bb+2nbz+nnzz\\&+\beta a+\beta mz\\&+\gamma.\end{aligned}$$

Cum iam per hypotheſin ſit $bb=\alpha aa+\beta a+\gamma$, reliqua aequatio per z diuiſa dabit:

$$2\alpha ma+\beta m+\alpha mmz=2nb+nnz$$

ex qua elicitur:

$$z=\frac{2\alpha ma-2nb+\beta m}{nn-\alpha mm}$$

Quo valore ſubſtituto concludimus:

ſi ponatur $x=\frac{(nn+\alpha mm)a-2mnb+\beta mm}{nn-\alpha mm}$

fore $\sqrt{}(\alpha xx+\beta x+\gamma)=\frac{2\alpha mna-(nn+\alpha mm)b+\beta mn}{nn-\alpha mm}$

Quicunque ergo numeri pro m et n accipiantur, ex caſu cognito: $\sqrt{}(\alpha aa+\beta a+\gamma)=b$, infinitis aliis modis formula $\sqrt{}(\alpha xx+\beta x+\gamma)$ rationalis effici poteſt, et quia numerum b tam negatiue, quam affirmatiue, aſſumere licet, exploratis numeris a et b, ac pro lubitu aſſumtis numeris m et n, capiatur

$$x=\frac{(nn+\alpha mm)a\pm 2mnb+\beta mm}{nn-\alpha mm}$$

eritque:

$$\sqrt{}(\alpha xx+\beta x+\gamma)=\frac{2\alpha mna\pm(nn+\alpha mm)b+\beta mn}{nn-\alpha mm}.$$

Scholion.

2. Ad hoc ergo problema ſoluendum neceſſe eſt, vt aliunde vnus ſaltem caſus ſit cognitus, quo formula propoſita fiat rationalis. Neque vero, pro huiusmodi caſu explorando vlla certa regula praeſcribi poteſt, cum etiam

etiam dentur eiusmodi formulae, quas nullo plane caſu rationales fieri poſſe demonſtratum eſt. Si enim verbi gratia haec formula $\sqrt{(3xx+2)}$ proponeretur, certum eſt, nullum numerum rationalem pro x inueniri poſſe, quo ea fieret rationalis. Quanquam autem ſatis noti ſunt caſus, quibus formula $\alpha xx+\beta x+\gamma$ talis reductionis eſt capax, quippe quod euenit, quoties in hac formula generali $(px+q)^2+(rx+s)(tx+u)$ continetur: tamen hic non curo, vnde caſus ille, quem cognitum aſſumo, ſit hauſtus, ſiue certa quadam ratione, ſiue diuinatione innotuerit. Verum cum cognito vno caſu inuentio infinitorum aliorum nulla laboret difficultate, hic potiſſimum ad ſolutiones, quae numeris integris abſoluuntur, reſpicio. Cum enim valores pro x inuenti per fractionem exprimantur, noua iam oritur quaeſtio, quomodo numeros m et n aſſumi oporteat, vt inde numeri integri pro x obtineantur.

Problema II.

3. Si α, β, γ ſint numeri integri dati, inuenire numeros integros pro x ſumendos, qui formulam $\alpha xx+\beta x+\gamma$ quadratam reddant.

Solutio.

Iterum aſſumo vnum numerum integrum a conſtare, qui quaeſito ſatisfaciat, ita vt ſit:

$$\sqrt{(\alpha aa+\beta a+\gamma)}=b$$

ac modo vidimus,

ſi ſumatur $x=\frac{(nn+\alpha mm)a\pm 2mnb+\beta mm}{nn-\alpha mm}$

 fore

fore $V(\alpha xx + \beta x + \gamma) = \frac{2\alpha mna \pm (nn + \alpha mm)b + \beta mn}{nn - \alpha mm}$
Supereſt ergo tantum, vt videamus, cuiusmodi numeros pro m et n aſſumi oporteat, vt hae formulae integrae euadant. Quod quidem ſtatim fieri perſpicuum eſt, ſi vtriusque denominator $nn - \alpha mm$ ſtatuatur vnitati aequalis. Sit igitur $nn - \alpha mm = 1$, ſeu

$$nn = \alpha mm + 1, \text{ ideoque } n = V(\alpha mm + 1)$$

niſi autem ſit α vel numerus quadratus, vel negatiuus, huic formulae ſemper ſatisfieri poteſt; ſin autem ſit vel quadratus, vel negatiuus, ne problema quidem propoſitum reſoluere licet. Etſi enim quandoque duo pluresue caſus aſſignari queant, tamen infiniti non dantur, cuiusmodi tamen hic euolui conuenit. Sit ergo α numerus integer poſitiuus non quadratus, ac ſemper numeri m et n aſſignari poſſunt, vt fiat $n = V(\alpha mm + 1)$, quod etſi infinitis modis fieri poteſt, tamen ſufficit minimos ſolos noſſe. Erit ergo

$$x = (nn + \alpha mm)a \pm 2mnb + \beta mm \text{ et}$$

$$V(\alpha xx + \beta x + \gamma) = 2\alpha mna \pm (nn + \alpha mm)b + \beta mn,$$

ſicque habetur nouus caſus quaeſtioni ſatisfaciens. Ex hoc vero ſimili modo, quo is ex a et b prodiit, nouus deriuabitur, hincque porro continuo alii in infinitum. Ponantur enim valores hoc modo pro x oriundi ſucceſſiue: a, a^{I}, a^{II}, a^{III}, etc. reſpondentes vero valores formulae $V(\alpha xx + \beta x + \gamma)$ ſint b, b^{I}, b^{II}, b^{III} etc. ac ſequenti modo bini quique poſteriores ex binis antecedentibus definientur,

a^{I}

$$a^{I} = (nn + \alpha mm)a \pm 2mnb + \beta mm;\ b^{I} = 2\alpha mna \pm (nn + \alpha mm)b + \beta mn$$

$$a^{II} = (nn + \alpha mm)a^{I} \pm 2mnb^{I} + \beta mm;\ b^{II} = 2\alpha mna^{I} \pm (nn + \alpha mm)b^{I} + \beta mn$$

$$a^{III} = (nn + \alpha mm)a^{II} \pm 2mnb^{II} + \beta mm;\ b^{III} = 2\alpha mna^{II} \pm (nn + \alpha mm)b^{II} + \beta mn$$

etc.

Hac igitur ratione continuo vlterius progredi licet, ſicque ex vna ſolutione, in numeris integris cognita, innumerabiles aliae in numeris integris quoque elicientur.

Coroll. 1.

4. Vt igitur formula $\alpha xx + \beta x + \gamma$ infinitis modis in numeris integris quadratum effici poſſit, neceſſe eſt, vt α neque ſit numerus quadratus, neque negatiuus, ac praeterea, vt vnus caſus, quo ea fit quadratum, vndecunque ſit cognitus.

Coroll. 2.

5. At ſi α fuerit numerus poſitiuus non quadratus, tum primum quaerantur duo numeri m et n, vt ſit $n = \sqrt{(\alpha mm + 1)}$, id quod ſemper fieri poteſt. Quibus inuentis, ſi ponatur:

$$\sqrt{(\alpha xx + \beta x + \gamma)} = y$$

atque iam cognitus fuerit caſus quaeſtioni ſatisfaciens, qui ſit $x = a$ et $y = b$, ex eo per primam operationem non ſolum vnus, ſed duo noui, inuenientur ob ſigni ambiguitatem. Erit quippe:

$$x = (nn + \alpha mm)a \pm 2mnb + \beta mm \text{ et}$$

$$y = 2\alpha mna \pm (nn + \alpha mm)b + \beta mn.$$

Coroll. 3.

Coroll. 3.

6. Si ſumantur tantum ſignorum ambiguorum ſuperiora, vt continuo ad maiores numeros ſatisfacientes perueniamus, atque valores pro x hoc modo ſucceſſiue prodeuntes deſignentur per $a, a^{I}, a^{II}, a^{III}, a^{IV}$ etc. valores autem pro y reſpondentes per $b, b^{I}, b^{II}, b^{III}, b^{IV}$ etc. erit:

$$a^{I} = (nn + \alpha mm)a + 2mnb + \beta mm; \quad b^{I} = 2\alpha mna + (nn + \alpha mm)b + \beta mn$$

$$a^{II} = (nn + \alpha mm)a^{I} + 2mnb^{I} + \beta mm; \quad b^{II} = 2\alpha mna^{I} + (nn + \alpha mm)b^{I} + \beta mn$$

$$a^{III} = (nn + \alpha mm)a^{II} + 2mnb^{II} + \beta mm; \quad b^{III} = 2\alpha mna^{II} + (nn + \alpha mm)b^{II} + \beta mn$$

etc.

Coroll. 4.

7. Duplicem ergo hinc progreſſionem numerorum $a, a^{I}, a^{II}, a^{III}, a^{IV}$ etc. et b $b^{I}, b^{II}, b^{III}, b^{IV}$ etc. adipiſcimur, quarum vtriusque continuatio ab vtraque pendet, vtraque tamen ab altera iſta ſeiungi poteſt, vt termini vtriusque ſenſim ſine adminiculo alterius continuari queant; formabitur autem tum in vtraque ſerie quilibet terminus ex binis praecedentibus.

Coroll. 5.

8. Si enim in valore a^{II} pro b^{I} eius valor ſubſtituatur, habebitur:

$$a^{II} = (nn + \alpha mm)a^{I} + 4\alpha m^{2}n^{2}a + 2mn(nn + \alpha mm)b + 2\beta mmnn + \beta mm$$

Verum

Verum ex valore ipſius a^{I} eſt:

$$2mnb = a^{I} - (nn + \alpha mm)a - \beta mm$$

quo valore ipſius $2mnb$ ibi ſubſtituto prodibit:

$$a^{II} = (nn + \alpha mm)a^{I} + 4\alpha mmnna + (nn + \alpha mm)a^{I} - (nn + \alpha mm)^2 a - \beta mm(nn + \alpha mm) + 2\beta mmnn + \beta mm.$$

At ob $nn = \alpha mm + 1$, eſt $4\alpha mmnn - (nn + \alpha mm)^2 = -(nn - \alpha mm)^2 = -1$, et $2\beta mmnn - \beta mm(nn + \alpha mm) = \beta mm(nn - \alpha mm) = \beta mm$, vnde fit:

$$a^{II} = 2(nn + \alpha mm)a^{I} - a + 2\beta mm.$$

Coroll. 6.

9. Cum igitur ſimili modo ſit:

$$a^{III} = 2(nn + \alpha mm)a^{II} - a^{I} + 2\beta mm \text{ etc.}$$

Statim atque in ſerie $a, a^{I}, a^{II}, a^{III}$ etc. duo primi termini habentur, primus ſcilicet a vndecunque, et ſecundus ex formula $a^{I} = (nn + \alpha mm)a + 2mnb + \beta mm$, ex his ſequentes omnes per has formulas definientur:

$$a^{II} = 2(nn + \alpha mm)a^{I} - a + 2\beta mm$$
$$a^{III} = 2(nn + \alpha mm)a^{II} - a^{I} + 2\beta mm$$
$$a^{IV} = 2(nn + \alpha mm)a^{III} - a^{II} + 2\beta mm.$$

Coroll. 7.

10. Pari autem modo progreſſio numerorum $b, b^{I}, b^{II}, b^{III}$ etc. eſt comparata. Primo enim eius termino aliunde cognito, et ſecundo per formulam

$b^{I} = 2\alpha mna + (nn + \alpha mm)b + \beta mn$, ſi in b^{II} pro a^{I} valor ſubſtituatur, erit:

$$b^{II} = 2\alpha mn(nn + \alpha mm)a + 4\alpha mmnnb + 2\alpha\beta m^{3}n$$
$$+ (nn + \alpha mm)b^{I} + \beta mn$$

at ex valore ipſius b^{I} eſt $2\alpha mna = b^{I} - (nn+\alpha mm)b - \beta mn$ quo ſubſtituto fit ob $nn - \alpha mm = 1$

$$b^{II} = 2(nn + \alpha mm)b^{I} - b \text{ ſimiliterque}$$
$$b^{III} = 2(nn + \alpha mm)b^{II} - b^{I}$$
$$b^{IV} = 2(nn + \alpha mm)b^{III} - b^{II}$$

etc.

Coroll. 8.

11. Cum igitur vtraque ſeries ita ſit comparata, vt quilibet terminus ex binis praecedentibus ſecundum certam legem definiatur; vtraque ſeries erit recurrens, ſcala relationis exiſtente $2(nn + \alpha mm), -1$. Hinc ergo, formata aequatione $zz = 2(nn + \alpha mm)z - 1$, eius radices erunt:

$$z = 2nn - 1 \pm 2n\sqrt{(nn-1)} = (n \pm m\sqrt{\alpha})^{2}.$$

Coroll. 9.

12. Hinc ergo ex doctrina ſerierum recurrentium progreſſionis $a, a^{I}, a^{II}, a^{III}, a^{IV}$ etc. terminus quicunque indefinite per ſequentem formulam exprimetur:

$$\left(\frac{a}{2} + \frac{\beta}{4\alpha} + \frac{b}{2\sqrt{\alpha}}\right)(n+m\sqrt{\alpha})^{2\nu} + \left(\frac{a}{2} + \frac{\beta}{4\alpha} - \frac{b}{2\sqrt{\alpha}}\right)(n-m\sqrt{\alpha})^{2\nu} - \frac{\beta}{2\alpha} = x$$

alterius vero ſeriei $b, b^{I}, b^{II}, b^{III}$ etc. terminus quicunque per hanc:

$$\left(\frac{b}{2} + \frac{a\sqrt{\alpha}}{2} + \frac{\beta}{4\sqrt{\alpha}}\right)(n+m\sqrt{\alpha})^{2\nu} + \left(\frac{b}{2} - \frac{a\sqrt{\alpha}}{2} - \frac{\beta}{4\sqrt{\alpha}}\right)(n-m\sqrt{\alpha})^{2\nu} = y$$

ſumto pro ν numero quocunque integro.

Scholion.

Scholion.

13. Si hic pro 2ν ſubſtituamus ſucceſſiue omnes numeros integros 0, 1, 2, 3, 4, 5 etc. vtraque progreſſio prodibit interpolata, cuius termini medii quaeſito aeque ſatisfacient, dummodo fuerint integri. At reperiemus: poſito

$$2\nu = 0;\ x = a;$$
$$2\nu = 1;\ x = na + mb + \frac{\beta(n-1)}{2\alpha};$$
$$2\nu = 2;\ x = (nn + \alpha mm)a + 2mmb + \beta mm;$$
$$y = b$$
$$y = nb + \alpha ma + \frac{\beta m}{2}$$
$$y = (nn + \alpha mm)b + 2\alpha mna + \beta mn.$$

Quae vtraque ſeries eſt recurrens, ſcalam relationis habens $2n, -1$; ac pro priori quidem valorum ipſius x, ſi terni termini conſecutiui ſint P, Q, R, erit

$$R = 2nQ - P + \frac{\beta(n-1)}{\alpha};$$

at ſi in progreſſione valorum ipſius y terni termini ſe ordine ſequentes ſint P, Q et R, erit

$$R = 2nQ - P:$$

Quodſi ergo fuerit $\frac{\beta(n-1)}{2\alpha}$ numerus integer, omnes hi termini problema aeque reſoluent, ſicque duplo plures obtinebimus ſolutiones, quam methodus adhibita ſuppeditauerat. Quod autem plures locum habere poſſint ſolutiones, quam inuenimus, inde facile colligitur, quod praeter neceſſitatem primum erutarum formularum $nn - \alpha mm$ vnitati aequalem poſuimus, cum tamen ſine dubio ſaepe etiam numerator per denominatorem diui-

di poſſit, etiamſi hic vnitate ſit maior. Quemadmodum igitur omnes plane ſolutiones in numeris integris inueniri queant, ſequenti problemate accuratius examinemus.

Problema 3.

14. Si α ſit numerus integer poſitiuus non quadratus, dato vno numero integro a, qui pro x poſitus reddat formulam $\alpha xx + \beta x + \gamma$ quadratam, inuenire infinitos alios numeros integros, qui pro x ſumti idem ſint praeſtituri.

Solutio.

Ponatur in genere $\surd(\alpha xx + \beta x + \gamma) = y$, caſu autem cognito, quo $x = a$, eſſe $\surd(\alpha aa + \beta a + \gamma) = b$, atque hinc in genere fractionibus non excluſis fore vidimus:

$$x = \frac{(nn + \alpha mm)a + 2mnb + \beta mm}{nn - \alpha mm}$$

$$y = \frac{(nn + \alpha mm)b + 2\alpha mna + \beta mn}{nn - \alpha mm}$$

Iam quidem, vt hi numeri fiant integri, non abſolute neceſſe eſt, vt denominator $nn - \alpha mm$ ad vnitatem revocetur, verum ſufficit, vt fractiones $\frac{nn + \alpha mm}{nn - \alpha mm}$ et $\frac{2mn}{nn - \alpha mm}$ in numeros integros abeant. Ponamus ergo eſſe

$$\frac{nn + \alpha mm}{nn - \alpha mm} = p, \text{ et } \frac{2mn}{nn - \alpha mm} = q$$

vnde fit $p - 1 = \frac{2\alpha mm}{nn - \alpha mm}$; ideoque

$$\frac{\beta mm}{nn - \alpha mm} = \frac{\beta}{2\alpha}(p - 1) \text{ et } \frac{\beta mn}{nn - \alpha mm} = \tfrac{1}{2}\beta q.$$

Deinde

Deinde autem ex formulis aſſumtis fiet

$$pp - \alpha qq = \frac{(nn + \alpha mm)^2 - 4\alpha m^2 n^2}{(nn - \alpha mm)^2} = 1$$

ita vt ſit $pp = \alpha qq + 1$ et $p = \sqrt{(\alpha qq + 1)}$.
Iterum igitur vt ante ex numero α binos numeros p et q aſſignari oportet, vt ſit $p = \sqrt{(\alpha qq + 1)}$, quibus inuentis habebitur:

$$x = pa + qb + \frac{\beta}{2\alpha}(p - 1) \text{ et } y = pb + \alpha qa + \tfrac{1}{2}\beta q.$$

Dummodo ergo fuerit $\frac{\beta}{3\alpha}(p-1)$ numerus integer, hi valores ſatisfaciunt. Quia autem numeros p et q tam negatiue, quam poſitiue, ſumere licet, hae formulae inſuper tres alias ſolutiones ſuppeditant:

$$x = pa - qb + \frac{\beta}{2\alpha}(p - 1); \text{ et } y = pb - \alpha qa - \tfrac{1}{2}\beta q$$
$$x = -pa + qb - \frac{\beta}{3\alpha}(p + 1); \text{ et } y = -pb + \alpha qa + \tfrac{1}{2}\beta q$$
$$x = -pa - qb - \frac{\beta}{2\alpha}(p + 1); \text{ et } y = -pb - \alpha qa - \tfrac{1}{2}\beta q$$

Quod ſi porro horum bini quicunque pro a et b aſſumantur, ex quolibet quatuor nouae ſolutiones orientur. Hinc tamen non 61, ſed tantum ſex diuerſae oriuntur, inter quas adeo prima cognita $x = a$ et $y = b$, et quae huic eſt affinis $x = -a - \frac{\beta}{\alpha}$, et $y = b$ continentur; reliquae vero quatuor ſunt

$$x = (pp + \alpha qq)a \pm 2pqb + \beta qq;$$
$$y = (pp + \alpha qq)b \pm 2\alpha pqa \pm \beta pq$$
$$x = -(pp + \alpha qq)a \pm 2pqb - \frac{\beta}{\alpha}pp;$$
$$y = (pp + \alpha qq)b \mp 2\alpha pqa \mp \beta pq$$

ex quibus deinceps nouae aliae in infinitum inueniri poſſunt.

Coroll. 1.

15. Quodſi ergo fuerit vel $\beta = 0$, vel eiusmodi numerus, vt $\beta(p-1)$, vel etiam $\beta(p+1)$ per 2α diuiſibile exiſtat, tum hoc modo plures ſolutiones in integris obtinentur, quam modo ante expoſito.

Coroll. 2.

16. In genere autem obſeruandum eſt, ſi ſatisfecerit caſus quicunque $x = v$, tum etiam ſatisfacturum eſſe caſum $x = -v - \frac{\beta}{\alpha}$, ex vtroque enim y eundem valorem nanciſcitur. Quare cum hi caſus ex illis tam facile eliciantur, his omiſſis inueſtigatio ſolutionum conuenientium ad dimidium reducitur.

Coroll. 3.

17. Reiectis ergo caſibus $x = -v - \frac{\beta}{\alpha}$, quippe qui ſponte ſe produnt inuentis caſibus $x = v$, ex caſu $x = a$ et $y = b$ ſtatim bini reperiuntur:

$$x = pa \pm qb + \frac{\beta}{2\alpha}(p-1);\ y = \alpha qa \pm pb + \tfrac{1}{2}\beta q$$

hincque porro per operationem ſecundam bini:

$$x = (pp+\alpha qq)a \pm 2pqb + \beta qq;\ y = 2\alpha pqa \pm (pp+\alpha qq)b + \beta pb$$

quae duplicitas ex ſigno ambiguo numeri b naſcitur.

Coroll. 4.

18. Si haec cum §. §. 12 et 13 conferantur, patebit omnes has formulas in ſequentibus expreſſionibus generalibus contineri, ſiquidem pro μ ſucceſſiue omnes numeri integri ſubſtituantur.

I.

$$\text{I}\begin{cases} x=\frac{1}{4\alpha}(2\alpha a+\beta+2b\sqrt{\alpha})(p+q\sqrt{\alpha})^{\mu}+\frac{1}{4\alpha}(2\alpha a+\beta-2b\sqrt{\alpha})(p-q\sqrt{\alpha})^{\mu}-\frac{\beta}{2\alpha} \\ y=\frac{1}{4\sqrt{\alpha}}(2\alpha a+\beta+2b\sqrt{\alpha})(p+q\sqrt{\alpha})^{\mu}-\frac{1}{4\sqrt{\alpha}}(2\alpha a+\beta-2b\sqrt{\alpha})(p-q\sqrt{\alpha})^{\mu} \end{cases}$$

et

$$\text{II}\begin{cases} x=\frac{1}{4\alpha}(2\alpha a+\beta-2b\sqrt{\alpha})(p+q\sqrt{\alpha})^{\mu}+\frac{1}{4\alpha}(2\alpha a+\beta+2b\sqrt{\alpha})(p-q\sqrt{\alpha})^{\mu}-\frac{\beta}{2\alpha} \\ y=\frac{1}{4\sqrt{\alpha}}(2\alpha a+\beta-2b\sqrt{\alpha})(p+q\sqrt{\alpha})^{\mu}-\frac{1}{4\sqrt{\alpha}}(2\alpha a+\beta+2b\sqrt{\alpha})(p-q\sqrt{\alpha})^{\mu} \end{cases}$$

Coroll. 5.

19. Hinc igitur duplices ſeries pro valoribus numerorum x et y reperiuntur, quae eandem progreſſionis legem tenebunt. Si enim ponamus:

$$x=a;\ a^{\mathrm{I}};\ a^{\mathrm{II}};\ a^{\mathrm{III}};\ a^{\mathrm{IV}};\ a^{\mathrm{V}};\ \text{etc. P, Q, R}$$

$$y=b;\ b^{\mathrm{I}};\ b^{\mathrm{II}};\ b^{\mathrm{III}};\ b^{\mathrm{IV}};\ b^{\mathrm{V}};\ \text{etc. S, T, V}$$

erit pro altera: $a^{\mathrm{I}}=pa+qb+\frac{\beta}{2\alpha}(p-1)$ et $b^{\mathrm{I}}=\alpha qa+pb+\frac{1}{2}\beta q$

et pro altera: $a^{\mathrm{I}}=pa-qb+\frac{\beta}{2\alpha}(p-1)$ et $b^{\mathrm{I}}=\alpha qa-pb+\frac{1}{2}\beta q$

pro vtraque vero haec communis progreſſionis lex valebit, vt ſit:

$$\text{R}=2p\text{Q}-\text{P}+\frac{\beta}{\alpha}(p-1)\ \text{et}\ \text{V}=2p\text{T}-\text{S}.$$

Coroll. 6.

20. Cum ſit $pp-\alpha qq=1$, erit $(p+q\sqrt{\alpha})^{\mu}=(p-q\sqrt{\alpha})^{-\mu}$ et $(p-q\sqrt{\alpha})^{\mu}=(p+q\sqrt{\alpha})^{-\mu}$, hincque, ſi alterae ſeries retrorſum continuentur, prodibunt alterae. Sufficit ergo pro altero caſu has ſeries inſtruxiſſe, quae tam antrorſum, quam retrorſum, continuatae omnes ſolutiones, ex ambiguitate numeri b oriundas, in ſe continebunt.

Scholion.

Scholion.

21. Si ergo fuerit $\beta = 0$, vt habeatur haec formula: $\surd(\alpha xx + \gamma) = y$, rationalis reddenda, caſusque conſtet, quo ſit $\surd(\alpha aa + \gamma) = b$, ſumtis numeris p et q ita, vt ſit $p = \surd(\alpha qq + 1)$, innumerabiles alii valores ſatisfacientes continebuntur in his ſeriebus:

$$x = a,\ a^{I},\ a^{II},\ a^{III},\ a^{IV},\ \ldots\ P,\ Q,\ R$$
$$y = b,\ b^{I},\ b^{II},\ b^{III},\ b^{IV},\ \ldots\ S,\ T,\ V$$

vbi ſecundi termini ita debent accipi, vt ſit

$$a^{I} = pa + qb;\ b^{I} = \alpha qa + pb$$

deinde vtraque ſeries eſt recurrens, ſcala relationis exiſtente $2p, -1$. Erit ſcilicet:

$$a^{II} = 2pa^{I} - a;\ \text{et in genere } R = 2pQ - P$$
$$b^{II} = 2pb^{I} - b;\ \ldots\ldots\ V = 2pT - S$$

ambae vero ſeries etiam retrorſum continuari debent, ſicque duplo plures prodibunt ſolutiones, niſi ſit vel $a = 0$, vel $b = 0$. Neque autem hic in cenſum veniunt ſolutiones negatiuae, quibus ſi ſatisfecerit $x = v$, etiam ſatisfacit $x = -v$. Omnes porro iſtae ſolutiones continentur in his formulis generalibus,

$$x = \tfrac{1}{2\surd\alpha}(a\surd\alpha + b)(p + q\surd\alpha)^{\mu} + \tfrac{1}{2\surd\alpha}(a\surd\alpha - b)(p - q\surd\alpha)^{\mu}$$
$$y = \tfrac{1}{2}(a\surd\alpha + b)(p + q\surd\alpha)_{\mu} - \tfrac{1}{2}(a\surd\alpha - b)(p - q\surd\alpha)^{\mu}$$

Pro variis igitur numeris, qui coefficientem α conſtituunt, ſequentia exempla euoluamus, et quidem generalius, vt etiam coefficientis β ratio habeatur, pro caſibus ſcilicet, quibus forte $\frac{\beta}{2\alpha}(p - 1)$ fuerit numerus integer.

Exem-

Exemplum I

22. *Propoſita formula* $\sqrt{(2xx+\beta x+\gamma)}=y$, *inuenire infinitos valores integros ipſius* x, *quibus haec formula rationalis euadit, ſiquidem vna ſolutio conſtet.*

Sit ſolutio cognita $x=a$ et $y=b$, et ob $\alpha=2$, habebimus $p=\sqrt{(2qq+1)}$, ideoque $q=2$ et $p=3$. Hinc ſecundi valores erunt:

$$a^{I}=3a\pm 2b+\tfrac{\beta}{2};\ b^{I}=4a\pm 3b+\beta.$$

Cum igitur in §. 19. ſit $R=6Q-P+\beta$ et $V=6T-S$, habebimus ſequentes ſeries valorum ſatisfacientium et quidem integrorum, ſi β fuerit numerus par:

Valores ipſius x	Valores ipſius y
a	$\pm b$
$3a\pm 2b+\frac{\beta}{2}$	$4a\pm 3b+\beta$
$17a\pm 12b+4\beta$	$24a\pm 17b+6\beta$
$99a\pm 70b+\frac{49}{2}\beta;$	$140a\pm 99b+35\beta$
$577a\pm 408b+144\beta,$	$816a\pm 577b+204\beta$
$3363a\pm 2378b+\frac{1681}{2}\beta;$	$4756a\pm 3363b+1189\beta$
etc.	etc.

Tum vero cum y eosdem retineat valores, ſi pro x ſcribatur $-x-\frac{\beta}{2}$, etiam hae ſolutiones locum habebunt:

Valores ipſius x	Valores ipſius y
$-a-\frac{1}{2}\beta$	$\pm b$
$-3a\mp 2b-\beta$	$4a\pm 3b+\beta$
$-17a\mp 12b-\frac{9}{2}\beta$	$34a\pm 17b+6\beta$
$-99a\mp 706b-25\beta$	$140a\pm 99b+35\beta$
$-577a\mp 408b-\frac{289}{2}\beta$	$816a\pm 577b+204\beta$
$-3363a\mp 2378b-841\beta$	$4756a\pm 3363b+1189\beta$
etc.	etc.

Etiamſi ergo β non fuerit numerus par, tamen in vtroque ordine ſemiſſis valorum ipſius x fuerit numeri integri.

Exemplum 2.

23. *Propoſita formula* $\sqrt{(3xx+\beta x+\gamma)}=y$, *inuenire infinitos valores integros ipſius* x, *quibus haec formula rationalis euadit, ſiquidem vnus caſus conſtet.*

Praebeat caſus cognitus $x=a$ et $y=b$, tum vero ob $\alpha=3$ capiatur $p=\sqrt{(3qq+1)}$, eritque $q=1$ et $p=2$. Hinc pro ſecundo caſu habebimus:

$$a^{I}=2a\pm b+\tfrac{\beta}{6};\ b^{I}=3a\pm 2b+\tfrac{1}{2}\beta,$$

ex quibus formentur binae ſeries recurrentes, ſecundum has ſcalas relationis:

$$R=4Q-P+\tfrac{\beta}{3};\ V=4T-S,$$

vnde obtinentur:

Valores ipſius x	Valores ipſius y
a	$\pm b$
$2a\pm b+\frac{1}{6}\beta$	$3a\pm 2b+\frac{1}{2}\beta$
$7a\pm b+\beta$	$12a\pm 7b+2\beta$
$26a\pm 15b+\frac{25}{6}\beta$	$45a\pm 26b+\frac{15}{2}\beta$
$97a\pm 56b+16\beta$	$168a\pm 97b+28\beta$
$362a\pm 209b+\frac{361}{6}\beta$	$627a\pm 362b+\frac{209}{2}\beta$
$1351a\pm 780b+225\beta$	$2340a\pm 1351b+390\beta$
etc.	etc.

Praete-

Praeterea vero ſcribendo $-x-\frac{\beta}{3}$ pro x prodibunt

valores ipſius x	valores ipſius y
$-a-\frac{1}{3}\beta$	$\pm b$
$-2a\mp b-\frac{1}{2}\beta$	$3a\pm 2b+\frac{1}{2}\beta$
$-7a\mp 4b-\frac{4}{3}\beta$	$12a\pm 7b+2\beta$
$-26a\mp 15b\frac{9}{2}\beta$	$45a\pm 26b+\frac{15}{2}\beta$
$-97a\mp 56b-\frac{49}{3}\beta$	$168a\pm 97b+28\beta$
$-362a\mp 209b-\frac{121}{2}\beta$	$627a\pm 362b+\frac{209}{2}\beta$
$-1351a\mp 780b-\frac{676}{3}\beta$	$2340a\pm 1351b+390\beta$
etc.	etc.

Prout ergo numerus β diuiſibilis fuerit per 2, vel 3, vel vtrumque, hinc eo plures ſolutiones in integris eliciuntur.

Exemplum 3.

24. *Propoſita formula* $\sqrt{(5xx+\beta x+\gamma)}=y$, *inuenire infinitos valores integros ipſius* x, *quibus haec formula rationalis euadat, ſiquidem vnus caſus fuerit cognitus.*

Pro caſu cognito ſit $x=a$ et $y=b$, et ob $\alpha=5$, quaerantur numeri p et q, vt ſit $p=\sqrt{(5qq+1)}$. Fiet ergo $q=4$ et $p=9$; et hinc ſecunda ſolutio prodibit:

$$a^{I}=9a\pm 4b+\tfrac{4}{5}\beta;\ b^{I}=20a\pm 9b+2\beta.$$

Cum ergo ſit $a^{II}=18a^{I}-a+\frac{8}{5}\beta$ et $b^{II}=18b^{I}-b$, ſequentes ſolutiones habebuntur:

Valores ipſius x	Valores ipſius y
a	$\pm b$
$9a\pm 4b+\frac{4}{5}\beta$	$20a\pm 9b+2\beta$
$161a\pm 72b+16\beta$	$360a\pm 161b+36\beta$
$2889a\pm 1292b+\frac{1444}{5}\beta$	$6460a\pm 2839b+646\beta$
etc.	etc.

vbi pro quolibet valore ipſius x etiam poni poteſt $-x-\frac{\beta}{\varsigma}$.

Scholion I.

25. Cum hoc modo ex vna ſolutione in integris cognita, infinitae aliae ſolutiones etiam in integris eliciantur, quaeſtio naſcitur, an hoc modo omnes plane ſolutiones integrae obtineantur, nec ne? Ac in exemplis quidem primo et ſecundo nullum erit dubium, quin hac methodo omnes ſolutiones integrae obtineantur. Verum in exemplo tertio vtique dantur caſus, quibus multo plures ſolutiones in integris exhiberi poſſunt, quam quidem hac methodo reperiuntur. Veluti ſi propoſita fuerit formula $\sqrt{(5xx+4)}=y$, quae pro caſu cognito praebet $a=0$ et $b=2$, noſtra ſolutio dat:

Valores ipſius x	Valores ipſius y
0	2
8	18
144	322
2584	5778
etc.	etc.

Verum hanc formulam diligentius ſcrutanti patebit, non ſolum his caſibus $\sqrt{(5xx+4)}$ fieri rationalem, ſed etiam iſtis numeris pro x ſubſtituendis

$$x=0,\ 1,\ 3,\ 8,\ 21,\ 55,\ 144,\ 377,\ 987,\ \text{etc.}$$

vnde ſolutionum numerus triplicatur. Cuius rei ratio eſt, quod ad formulam $p=\sqrt{(5qq+1)}$ reſoluendam poſuimus $q=4$; vnde fit $p=9$, quae quidem eſt ſimpliciſſima ſolutio in numeris integris. At quoniam in

ſcala

ſcala relationis ineſt $2p$, ea numeris integris conſtabit, etiamſi p ſit fractio denominatorem habens 2. Hanc ob rem iſtas ſimpliciores ſolutiones nanciſcemur, ſi ponamus $q=\frac{1}{2}$, vnde fit $p=\frac{3}{2}$; ſicque, ob $\alpha=5$, ſecundi valores erunt:

$$a^{\mathrm{I}}=\tfrac{3}{2}a\pm\tfrac{1}{2}b+\tfrac{1}{20}\beta;\quad b^{\mathrm{I}}=\tfrac{5}{2}a\pm\tfrac{3}{2}b+\tfrac{1}{4}\beta$$

ac tertii cum ſequentibus per hanc legem ſuppeditabuntur:

$$a^{\mathrm{II}}=3a^{\mathrm{I}}-a+\tfrac{1}{10}\beta,\quad b^{\mathrm{II}}=3b^{\mathrm{I}}-b,$$

vnde nanciſcimur hos valores:

Valores ipſius x	Valores ipſius y
a	$\pm b$
$\frac{3}{2}a\pm\frac{1}{2}b+\frac{1}{20}\beta$	$\frac{5}{2}a\pm\frac{3}{2}b+\frac{1}{4}\beta$
$\frac{7}{2}a\pm\frac{3}{2}b+\frac{1}{4}\beta$	$\frac{15}{2}a\pm\frac{7}{2}b+\frac{3}{4}\beta$
$9a\pm 4b+\frac{4}{5}\beta$	$20a\pm 9b+2\beta$
$\frac{47}{2}a\pm\frac{21}{2}b+\frac{9}{4}\beta$	$\frac{105}{2}a\pm\frac{47}{2}b+\frac{21}{4}\beta$
$\frac{123}{2}a\pm\frac{55}{2}b+\frac{121}{20}\beta$	$\frac{275}{2}a\pm\frac{123}{2}b+\frac{55}{4}\beta$
$161a\pm 72b+16\beta$	$360a\pm 161b+36\beta$
etc.	etc.

Atque hinc illae triplo plures ſolutiones oriuntur, quoties fuerit $a\pm b$ numerus par, ac β vel $=0$, vel per 20 diuiſibile.

Scholion 2.

26. Quandoque ergo plures ſolutiones in numeris integris reperiuntur, ſi pro p et q fractiones cum denominatore 2 aſſumuntur, quod quando in genere eueniat, operae pretium erit inueſtigaſſe. Plerumque autem hi caſus locum non habent, niſi ſit vel $\beta=0$,

vel formula ad talem formam reduci poſſit. Sit ergo propoſita formula $\sqrt{(\alpha xx+\gamma)}=y$, cui ſatisfaciat caſus $x=a$ et $y=b$; tum ſtatuatur $p=\frac{m}{2}$ et $\frac{n}{2}$, ſeu quaerantur numeri m et n, vt ſit $mm=\alpha nn+4$ et $m=\sqrt{(\alpha nn+4)}$. Tum vero ſolutio prima ſtatim dat ſecundam:

$$a^{\mathrm{I}}=\frac{ma+nb}{2} \quad \text{et} \quad b^{\mathrm{I}}=\frac{\alpha na+mb}{2},$$

vbi quidem numeri m et n tam negatiue, quam affirmatiue, accipi poſſunt. Denique his binis primis inventis, ſequentes per hanc regulam reperientur:

$$a^{\mathrm{II}}=ma^{\mathrm{I}}-a \quad \text{et} \quad b^{\mathrm{II}}=mb^{\mathrm{I}}-b.$$

In genere autem quilibet numerus pro x ſatisfaciens continetur hac formula:

$$x=\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}(a\sqrt{\alpha}+b)\left(\frac{m+n\sqrt{\alpha}}{2}\right)^{\mu}+\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}(a\sqrt{\alpha}-b)\left(\frac{m-n\sqrt{\alpha}}{2}\right)^{\mu},$$

ex qua fit:

$$y=\tfrac{1}{2}(a\sqrt{\alpha}+b)\left(\frac{m+n\sqrt{\alpha}}{2}\right)^{\mu}-\tfrac{1}{2}(a\sqrt{\alpha}-b)\left(\frac{m-n\sqrt{\alpha}}{2}\right)^{\mu}.$$

Quoties igitur $ma+nb$ prodierit numerus par, neque tamen m et n ſint pares, toties triplo plures ſolutiones in integris prodeunt, quam methodo praecedente. Hae vero ſolutiones ita ſe habebunt:

$$=a \qquad\qquad b=b$$

$$a^{\mathrm{I}}=\frac{ma+nb}{2} \qquad b^{\mathrm{I}}=\frac{mb+\alpha na}{2}$$

$$a^{\mathrm{II}}=\frac{(mm-2)a+mnb}{2} \qquad b^{\mathrm{II}}=\frac{(mm-2)b+\alpha mna}{2}$$

$$a^{\mathrm{III}}=\frac{(m^3-3m)a+(mm-1)nb}{2} \qquad b^{\mathrm{III}}=\frac{(m^3-3m)b+\alpha(mm-1)na}{2}$$

$$a^{\mathrm{IV}}=\frac{(m^4-4mm+2)a+(m^3-2m)nb}{2} \qquad b^{\mathrm{IV}}=\frac{(m^4-4m^2+2)b+\alpha(m^3\;\;2m)na}{2}$$

$$a^{\mathrm{V}}=\frac{(m^5-5m^3+5m)a+(m^4-3m^2+1)nb}{2} \qquad b^{\mathrm{V}}=\frac{(m^5-5m^3+5m)b+\alpha(m^4-3m^2+1)na}{2}$$

etc.

Obſer-

Obſeruatio I.

27. Haec altera methodus tum demum plures ſolutiones in numeris integris ſuppeditat, quam prior, cum m et n fuerint numeri impares, ſimulque a et b ambo vel pares, vel impares. Si enim m et n ſint numeri pares, p et q erunt integri, et formula $m = \sqrt{(\alpha nn + 4)}$, easdem ſolutiones praebebit, ac formula $p = \sqrt{(\alpha qq + 1)}$. Deinde ſi $ma \pm nb$ non fuerit numerus par, valores a^{I}, a^{II} non euadent integri, neque propterea plures ſolutiones reperiuntur, quam priore methodo, dum adhibetur formula $p = \sqrt{(\alpha qq + 1)}$. Diſtingui ergo oportet eos caſus, quibus formulae $m = \sqrt{(\alpha nn + 4)}$, numeris imparibus pro m et n accipiendis, ſatisfieri poteſt, id quod ſtatim patet fieri non poſſe, ſi α fuerit numerus formae $4z - 1$, vel etiam huius $8z + 1$. Quare pro α alii numeri impares non relinquuntur, niſi qui ſint formae $4z + 5$. Pro his ergo caſibus minimos valores, formulae $m = \sqrt{(\alpha nn + 4)}$ ſatisfacientes, ſequens tabella exhibet:

Si fuerit	capiatur	eritque	Si fuerit	capiatur	eritque
$\alpha = 5$	$n = 1$	$m = 3$	$\alpha = 61$	$n = 195$	$m = 1523$
$\alpha = 13$	$n = 3$	$m = 11$	$\alpha = 69$	$n = 75$	$m = 623$
$\alpha = 21$	$n = 1$	$m = 5$	$\alpha = 77$	$n = 1$	$m = 9$
$\alpha = 29$	$n = 5$	$m = 27$	$\alpha = 85$	$n = 9$	$m = 83$
$\alpha = 37$	$n = -$	$m = -$	$\alpha = 93$	$n = 57$	$m = 839$
$\alpha = 45$	$n = 1$	$m = 7$			
$\alpha = 53$	$n = 7$	$m = 51$			

quaeritur hic ratio, cur caſus $\alpha = 37$ non recipiat valores impares pro m et n?

Hic

Hic igitur patet, ſi ſit $\alpha = 37$, non dari numeros impares pro m et n, pro reliquis autem caſibus reſolutio ſuccedit. Ita ſi proponatur haec formula $\sqrt{(53xx+28)} = y$, habetur ſtatim $a = 1$ et $b = 9$. Deinde ob $n = 7$ et $m = 51$, erit $a^{I} = \frac{51+63}{2} = 57$ et $b^{I} = \frac{371+459}{2} = 415$, ſeu etiam $a^{I} = -6$; et $b^{I} = -44$; et ſeries recurrentes pro x et y, quarum ſcala relationis eſt $51, -1$, erunt:

$$x = \text{etc.} -307; -6; 1; 57; 2906; \text{etc.}$$
$$y = \text{etc.} +2235; +44; 9; 415; 21156; \text{etc.}$$

Obſeruatio 2.

28. Sufficit autem caſus euoluiſſe, quibus in formula generali $\alpha xx + \beta x + \gamma$ ſecundus terminus deeſt, quoniam haec ad talem formam ſalua numerorum integritate reuocari poteſt. Vulgaris quidem modus, quo ex aequationibus ſecundus terminus tolli ſolet, ponendo $x = y - \frac{\beta}{2\alpha}$, hic locum habere nequit, niſi β ſit numerus per 2α diuiſibilis. Verum ſi $\alpha xx + \beta x + \gamma$ debeat eſſe quadratum, ponatur $\alpha xx + \beta x + \gamma = yy$, ac multiplicando per 4α prodibit $4\alpha\alpha xx + 4\alpha\beta x + 4\alpha\gamma = 4\alpha yy$,

ideoque $4\alpha yy + \beta\beta - 4\alpha\gamma = (2\alpha x + \beta)^2$

Quaerantur ergo caſus, quibus formula $4\alpha yy + \beta\beta - 4\alpha\gamma$ ſit quadratum, indeque habebuntur valores pro x ſubſtituendi, qui formulam $\alpha xx + \beta x + \gamma$ reddant quadratam, ſcilicet ſi fuerit $\sqrt{(4\alpha yy + \beta\beta - 4\alpha\gamma)} = z$, erit $2\alpha x + \beta = z$, hincque $x = \frac{z - \beta}{2\alpha}$.

Quodſi

Quodſi β fuerit numerus par, puta 2δ, poſito: $\alpha xx + 2\delta x + \gamma = yy$, erit $(\alpha x + \delta)^2 = \alpha yy + \delta\delta - \alpha\gamma$ ſicque formula $\alpha yy + \delta\delta - \alpha\gamma$ ad quadratum eſt revocanda; ac ſi inuenimus $\surd(\alpha yy + \delta\delta - \alpha\gamma) = z$, erit $\alpha x + \delta = z$, et $x = \frac{z - \delta}{\alpha}$, vnde plerumque pro x numeri integri reperiuntur; etſi enim forte $\frac{z - \delta}{\alpha}$ non fuerit integer, tamen ex vno valore z cognito, ſi modo ſupra tradito alii eliciantur in infinitum, alterni ſaltem erunt numeri integri. Ex quo perſpicuum eſt, reſolutionem formularum quadraticarum radicalium $\surd(\alpha xx + \beta x + \gamma)$ nulla limitatione affici, etiamſi terminus βx plane omittatur, ſicque totum negotium huc redit, vt formulae huiusmodi $\surd(\alpha xx + \gamma)$ rationales, et quidem in numeris integris reddantur.

Obſeruatio 3.

29. Iam annotaui, formulam $\alpha xx + \gamma$ in numeris integris ſaltem pluribus ac infinitis modis quadratum effici non poſſe, niſi α ſit numerus poſitiuus non quadratus. Exiſtente autem α tali numero, problema non ita reſolui poteſt, vt pro quocunque numero pro γ aſſumto, ſolutio ſuccedat: poſſent enim vtique eiusmodi numeri pro γ dari, vt problema nullam plane ſolutionem admitteret, atque hanc ob rem poſtulari vnam ſaltem ſolutionem cognitam eſſe debere, quo ipſo caſus inſolubiles excluſi. Verum dato α characteres exhiberi poſſunt, ex quibus dignoſci liceat, vtrum numerus γ ſit eiusmodi, qui ſolutionem admittat, nec ne? Ac primo quidem perſpicuum eſt, nullam ſolu-

tionem locum habere poſſe, niſi γ ſit numerus in tali formula $bb-\alpha aa$ contentus. Dato ergo numero α, formetur ſeries omnium numerorum, tam poſitiuorum, quam negatiuorum, qui quidem in formula $bb-\alpha aa$ ſint contenti; ac niſi γ in hac ſerie reperiatur, certo pronunciare licet, formulam $\sqrt{(\alpha xx+\gamma)}$ nullo modo rationalem reddi poſſe: viciſſim autem, quoties γ in hac ſerie comprehenditur, quia tum eſt $\gamma=bb-\alpha aa$, formula $\alpha xx+\gamma$ fit quadratum, ponendo $x=a$, eritque $\sqrt{(\alpha xx+\gamma)}=b$. Haec igitur ſeries, cuius quaſi terminus generalis eſt $bb-\alpha aa$, primo continebit, ſumto $a=0$, omnes numeros quadratos 1, 4, 9, 16, 25, etc. tum vero omnes quadratos per $-\alpha$ multiplicatos nempe: $-\alpha$, -4α, $-\alpha 9$, $-\alpha 16$, etc. Praeterea ſi p et q fuerint numeri in hac ſerie contenti, in ea quoque reperietur eorum productum pq; nam cum ſit $p=bb-\alpha aa$ et $q=dd-\alpha cc$, erit $pq=(bd+\alpha ac)-\alpha(bc+ad)^2$, et ob ambiguitatem ſigni hoc productum duplici modo eſt numerus formae $bb-\alpha aa$, ideoque ſtatim habentur duae ſolutiones $x=bc+ad$ et $x=bc-ad$.

Obſeruatio 4.

30. Hinc ergo conſecuti ſumus hoc Theorema eximium, quod fundamentum ſuperiorum ſolutionum in ſe complectitur:

„Si fuerit $\alpha xx+p=yy$ caſu $x=a$ et $y=b$ tum „vero etiam $\alpha xx+q=yy$ caſu $x=c$ et $y=d$; haec „formula $\alpha xx+pq=yy$ adimplebitur capiendo

$$x=bc\pm ad \text{ et } y=bd\pm\alpha ac$$

Si

Si enim ſit $q = 1$ et $dd = \alpha cc + 1$, praeterea vero formulae $\alpha xx + p = yy$ ſatisfiat caſu $x = a$ et $y = b$; qui eſt caſus ſupra pro cognito aſſumtus; tum eidem formulae ſatisfacient valores:

$$x = bc \pm ad \text{ et } y = bd \pm \alpha ac$$

vnde eadem omnino ſolutio conficitur, quam ſupra exhibuimus, atque ex longe diuerſis principiis elicuimus: quocirca haec poſtrema inueſtigationis ratio ob concinnitatem et perſpicuitatem eo magis eſt notatu digna. Hic vero accedit, quod haec ratio multo latius pateat, quam praecedens, quippe quae ad caſum $q = 1$ fuerat adſtricta. Demonſtratio autem iſtius Theorematis elegantiſſimi ita breuiſſime ſe habebit:

„ Cum ſit $\alpha aa + p = bb$, erit $p = bb - \alpha aa$

„ et ob $\alpha cc + q = dd$, erit $q = dd - \alpha cc$

„ hinc erit $pq = (bb - \alpha aa)(dd - \alpha cc)$, quae expreſ-

„ ſio reducitur ad hanc:

$$pq = (bd \pm \alpha ac)^2 - \alpha(bc \pm ad)^2$$

„ Quodſi ergo fuerit $x = bc \pm ad$ et $y = bd \pm \alpha ac$,

„ erit $pq = yy - \alpha xx$, ideoque $\alpha xx + pq = yy$.

Q. E. D.

Obſeruatio. 5.

31. Cum igitur pro quolibet numero α formulae $\alpha xx + \gamma = yy$ numerus γ debeat eſſe formae $bb - \alpha aa$, numeri in hac forma contenti diligentius examinari merentur; et quoniam, ſi inter eos occurrunt numeri p et q, ſimul quoque eorum productum pq

 occur-

occurrit, praeter numeros quadratos 1, 4, 9, 16, 25 etc. eorumque multipla negatiua $-\alpha$, -4α, -9α, -16α, -25α etc. imprimis numeri primi in hac forma contenti ſunt ſpectandi, quippe ex quibus deinceps per multiplicationem compoſiti naſcuntur.

I. Sit $\alpha = 2$ et numeri primi formae $bb - 2aa$ ſunt:

poſitiui: $+1, +2, +7, +17, +23, +31, +41, +47, +71, +73, +79, +89, +97$ etc.

negatiui: $-1, -2, -7, -17, -23, -31, -41, -47, -71, -73, -79, -89, -97$ etc.

qui praeter $+2$ et -2 omnes in forma $\pm(8n \pm 1)$ continentur.

II. Sit $\alpha = 3$ et numeri primi formae $bb - 3aa$ ſunt:

poſitiui: $+1, +13, +37, +61, +73, +97, +109$, etc.

negatiui: $-2, -3, -11, -23, -47, -59, -71, -83, -107$, etc.

qui praeter -2 et -3 omnes continentur in forma $12n + 1$, ſiquidem pro n tam numeri poſitiui, quam negatiui, capiantur.

III. Sit $\alpha = 5$ et numeri primi formae $bb - 5aa$ ſunt:

poſitiui: $+1, +5, +11, +19, +29, +31, +41, +59, +61, +71, +79, +89, +101$, etc.

negatiui: $-1, -5, -11, -19, -29, -31, -41, -59, -61, -71, -79, -89, -101$ etc.

qui praeter $+5$ et -5, omnes in forma $10n \pm 1$ continentur.

IV.

IV. Sit $\alpha = 6$ et numeri primi formae $bb - 6aa$ ſunt:
poſitiui: $+1$, $+3$, $+19$, $+43$, $+67$, $+73$, $+97$, etc.
negatiui: -2, -23, -29, -47, -53, -71, -101, etc.
qui, praeter -2 et $+3$, omnes in alterutra harum formarum: $24n+1$ et $24n-5$ continentur, ſumendo pro n numeros tam negatiuos, quam poſitiuos.

V. Sit $\alpha = 7$ et numeri primi formae $bb - 7aa$ ſunt:
poſitiui: $+1$, $+2$, $+29$, $+37$, $+53$, $+109$ etc.
negatiui: -7, -3, -19, -31, -47, -59, -83 etc.
qui praeter $+2$ et -7 omnes in vna harum formarum continentur: $28n+1$; $28n+9$; $28n+25$

Obſeruatio 6.

32. Hinc colligimus, omnes numeros primos in formula $bb - \alpha aa$ contentos ſimul in quibusdam huiusmodi formulis $4\alpha n + A$ contineri, dum pro A certi quidam numeri ſubſtituuntur. Quod idem etiam hoc modo oſtendi poteſt: ponatur $b = 2\alpha p + r$ et $a = 2q + s$ ac formula $bb - \alpha aa$ tranſit in hanc:

$$4\alpha\alpha pp + 4\alpha pr + rr - 4\alpha qq - 4\alpha qs - \alpha ss$$

ſtatuatur $\alpha pp + pr - qq - qs = n$ et habebimus:

$$bb - \alpha aa = 4\alpha n + rr - \alpha ss$$

omnes ergo numeri primi formae $bb - \alpha aa$ quoque in hac forma $4\alpha n + rr - \alpha ss$ continentur; atque vt hi numeri ſint primi, r et s ita accipi oportet, vt nu-

 merus

merus $rr - \alpha ss$ ſit vel ipſe primus, vel ſaltem ad 4α primus. Primo ergo ſumto $s = 0$, pro r ſucceſſiue accipi poſſunt numeri impares ad α primi, ac ſi rr fuerit maius quam 4α, inde 4α toties ſubtrahatur, quoties fieri poteſt, vt reſiduum ſit minus quam 4α, et quot hoc modo diuerſi numeri reſultant, ii in formula $4\alpha n + A$ loco A collocentur. Deinde etiam ſimili modo colligantur numeri ex formulis $rr - \alpha$, qui quatenus ſunt diuerſi, ad illos inſuper adiiciantur. Non autem opus eſt, pro s alios numeros praeter vnitatem aſſumere; ſi enim s eſſet numerus par, numerus $-\alpha ss$ iam in forma $4\alpha n$ contineretur, et ſi s eſſet impar, numerus $-\alpha ss$ haberet formam $-4\alpha N - \alpha$, cuius pars $-4\alpha N$ iam in $4\alpha n$ continetur, ſicque ſufficit pro formulis $4\alpha n + A$, quouis caſu has $4\alpha n + rr$ et $4\alpha n + rr - \alpha$ euoluere, eaeque iam omnes numeros primos, qui quidem in formula $bb - \alpha aa$ comprehenduntur, in ſe complectentur. Num autem viciſſim omnes numeri primi, in his formulis $4\alpha n + rr$ et $4\alpha n + rr - \alpha$ contenti, ſimul ſint numeri formae $bb - \alpha aa$? quaeſtio eſt altioris indaginis, quae tamen affirmanda videtur.

Obſeruatio 7.

33. Quo haec exemplo illuſtremus, ſit $\alpha = 13$, et ex $4\alpha n + rr$ et $4\alpha n + rr - \alpha$ orientur hae formulae pro numeris primis:

ex

ex $4an+rr$	ex $4a+rr-a$
$52n+1$	$52n-9$
$52n+9$	$52n+3$
$52n+25$	$52n+23$
$52n+49=52n-3$	$52n+51=52n-1$
$52n+81=52n-23$	$52n+87=52n-17$
$52n+121=52n+17$	$52n+131=52n-25$

quae formulae reducuntur ad has:

$52n\pm1$; $52n\pm3$; $52n\pm9$; $52n\pm17$; $52n\pm23$; $52n\pm25$

ac numeri primi in his contenti ſunt:

±1; ±3; ±17; ±23; ±29; ±43; ±53; ±61; ±79; ±101; ±103;

quibus addi debet ±13; tum vero omnes numeri quadrati; atque ſi inſuper adiiciantur producta ex binis pluribusque horum numerorum, obtinebuntur hoc quidem caſu omnes numeri, qui pro γ ſubſtitui producunt formulam $13xx+\gamma=yy$ in numeris integris reſolubilem; ſeu quicunque illorum numerorum pro γ accipiatur, vnus primo deinde infiniti numeri integri pro x inueniri poſſunt, quibus formula $13xx+\gamma$ quadratum reddatur. Omnes enim iſti numeri ſimul in forma $bb-13aa$ continentur; qui enim huc difficiliores reductu videntur, ſunt: $-1=18^2-13.5^2$

$+13=65^2-13.18^2$; $-3=7^2-13.2^2$; $17=15^2-13.4^2$; $-17=10^2-13.3^2$

$-23=43^2-13.12^2$; $+29=9^2-13.2^2$; $-29=32^2-13.9^2$; $+43=76^2-13.21^2$

-43

$-43 = 3^2 - 13.2^2; +53 = 51^2 - 13.14^2; -53 = 8^2 - 13.3^2;$
$+61 = 23^2 - 13.6^2$
$-61 = 24^2 - 13.7^2; +79 = 14^2 - 13.3^2; -79 = 16^2 - 13.5^2;$
etc.

Cum ergo ſit $-1 = 18^2 - 13.5^2$, ſi fuerit $+\gamma = bb - 13aa$, erit $-\gamma = (18b \pm 65a)^2 - 13(18a \pm 5b)^2$, vnde caſus difficiliores reſoluuntur.

Propoſita ergo reſoluenda hac aequatione $13xx + 43.79 = yy$, cum ſit $\gamma = 43.79 = -43. -79$. habebitur per compoſitionem:

I. $\gamma = (14.76 \pm 13.63)^2 - 13(14.21 \pm 3.76)^2$
ergo $x = 294 \pm 228$ et $y = 1064 \pm 819$

II. $\gamma = (3.16 \pm 13.10)^2 - 13(2.16 \pm 3.5)^2$
ergo $x = 32 \pm 15$ et $y = 130 \pm 48$

vnde ſtatim 4 ſolutiones obtinentur.

Obſeruatio 8.

34. Verum non ſemper ex his numeris primis, quos modo inueſtigare docuimus, cum quadratis omnes plane numeri, qui pro γ aſſumi poſſunt, reperiuntur, cuius rei exemplum eſt caſus $\alpha = 10$, pro quo valores ipſius γ in hac forma $bb - 10aa$ continentur; iique ſunt, tam negatiue, quam poſitiue, ſumti:

1, 4, 6, 9, 10, 15, 16, 24, 25, 26, 31, 36, 39, 40, 41, 49, 54, 60, 64, 65, 71, 74, 79, 81, 86, 89, 90, 96, 100, 104, 106, 111, 121, 124, 129, 134, 135, 144, 150, 151, 156, 159, 160, 164, 166, 169, 185, 186, 191, 196, 199, 201, etc.

inter

inter quos numeros occurrunt primo omnes quadrati: 1,4,9,16,25,36,49,64,81,100,121,144,169,196, etc. deinde numeri primi 31,41,71,79,89,151,191,199, etc. qui in his formulis continentur $40n \pm 1$ et $40n \pm 9$. inſuperque accedunt producta ex binis pluribusue horum numerorum. Tertio vero praeter hos adſunt numeri ex binis numeris primis compoſiti, qui ſunt:

2.3; 2.5; 2.13; 2.37; 2.43; 2.53; 2.67; 2.83; etc.
3.5; 3.13; 3.37; 3.43; 3.53; 3.67; etc.
5.13, 5.37, etc.

At hi numeri primi, quorum ſemper bini ſunt in ſe multiplicandi, ſunt primo 2 et 5, reliqui vero in his formulis continentur $40n \pm 3$ et $40n \pm 13$. Denique etiam ſecundum regulam generalem adiici debent producta ex binis pluribusue numeris, qui per ſe ſatisfaciunt. Ita reſolui poterit haec aequatio $10xx + 13.53.151 = yy$ nam eſt $13.53 = bb - 10aa$ exiſtente $b = 27$ et $a = 2$ et $151 = dd - 10cc$; exiſtente $d = 31$ et $c = 9$. hincque

$$13.53.151 = (bd \pm 10ac)^2 - 10(ad \pm bc)^2$$

et $x = ad \pm bc$ et $y = bd \pm 10ac$.

Deinde cum etiam ſit $-13.53 = BB - 10AA$ et $-151 = DD - 10CC$, hinc duae aliae ſolutiones reperiuntur. Cum autem ſit $-1 = 3^2 - 10.1^2$, ſi fuerit $\gamma = bb - 10aa$, erit $-\gamma = (3a \pm b)^2 - 10(3a \pm b)^2$. Solutiones autem hinc oriundae ſunt:

$x = 181$; $x = 305$; $x = 307$;
$y = 657$; $y = 1017$; $y = 1023$;

duae enim inter ſe conueniunt, ita vt hinc tres tantum reperiantur.

Obſeruatio 9.

35. Hoc ergo caſu $\alpha = 10$ pro γ triplicis generis numeros primitiuos inuenimus, primo ſcilicet numeros quadratos omnes, deinde certos numeros primos in formulis $40n \pm 1$ et $40n \pm 9$ contentos, tertio autem producta ex binis certis numeris primis, qui ſunt 2, 5 et reliqui ex his formulis $40n \pm 3$ et $40n \pm 13$ petendi, atque ex hoc demum triplici ordine omnes numeri pro γ idonei formantur, vt huic aequationi $10xx + \gamma = yy$ ſatisfieri poſſit. Ipſi autem numeri primi in formulis $40n \pm 3$ et $40n \pm 13$ contenti non conueniunt, quia non ſunt formae $bb - 10aa$, ſed tamen hi numeri omnes ſunt formae $2bb - 5aa$; vti etiam duo iis iungendi 2 et 5. Manifeſtum autem eſt, ſi habeantur duo numeri huiusmodi $2bb - 5aa$ et $2dd - 5cc$, eorum productum fore $= (2bd \pm 5ac)^2 - 10(bc \pm ad)^2$, ideoque pro γ adhiberi poſſe. Huiusmodi igitur producta binorum numerorum primorum, qui ipſi non ſatisfaciunt, occurrere nequeunt, ſi α fuerit numerus primus, ſed tantum, vti hic vſu venit, ſi α fuerit numerus compoſitus; quod tamen etiam non ſemper locum habet, vti vidimus caſu $\alpha = 6 = 2 \cdot 3$, quo numeri formae $3bb - 2aa$ conueniunt cum numeris formae $bb - 6aa$. Quodſi ergo in genere fuerit $\alpha = pq$, et aequatio $pqxx + \gamma = yy$ reſolui debeat, numerus γ vel eſſe debet numerus quadratus, vel primus formae $bb - pqaa$, vel productum ex duobus numeris primis formae $pbb - qaa$, propterea quod huiusmodi productum eſt:

$$(pbb - qaa)(pdd - qcc) = (pbd \pm qac)^2 - pq(bc \pm ad)^2$$

Niſi

Niſi ergo tales numeri primi iam ipſi $pbb-qaa$ in forma $bb-pqaa$ contineantur, tertius ille ordo numerorum ex binis numeris primis conflatorum accedit. Quemadmodum deinde numeri primi ſolitarii continentur in formulis

$4pqn+rr$ et $4pqn+rr-pq$

ita numeri primi alteri combinandi ex formula hac:

$4pqn+prr-qss$

deriuari debent.

Exemplum 1.

36. Inueſtigentur omnes valores idonei ipſius γ, vt haec aequatio $30xx+\gamma=yy$ reſolutionem admittat.

Primo quidem pro γ aſſumi poſſunt omnes numeri quadrati, deinde omnes numeri primi in his formis $120n+rr$ et $12\; n+n-30$ contenti, quae reducuntur ad has:

$120n+1$; $120n+49$; $120n+19$; $120n-29$, cum -5

vnde oriuntur hi numeri primi infra 200

poſitiui: $+19, +139$

et negatiui: $-5, -29, -71, -101, -149, -191$

Tertio ob $\alpha=2\ 3.\ 5$, ſumi poſſunt producta trinorum primorum, qui contineantur vel ambo in vna harum formularum:

I. $120n+2rr-15ss$; II. $120n+3rr-10ss$;
III. $120n+5rr-6ss$

harum autem binae priores eosdem numeros primos dant, qui ſunt $+2. +3$, et reliqui in his formulis

 conti-

continentur:

$120n-7$; $120n-13$; $120n+17$; $120n-37$

vnde naſcuntur hi numeri primi infra 200

poſitiui: $+2$; $+3$; $+17$; $+83$; $+107$; $+113$; $+137$

negatiui: -7; -13; -37; -103; -127

quorum binorum producta pro γ capienda ſunt;

$+6, +34, +51, +91, +166$

$-14, -21, -26, -39, -74, -111, -119$

Tertia autem formula continet numerum primum $+5$, cum his formis:

$120n-1$; $120n-19$; $120n+29$; $120n-49$

vnde naſcuntur hi numeri primi infra 200

poſitiui: $5, +29, +71, +101, +149, +191$

negatiui: $-1, -19, -139$

At ex horum combinatione iidem naſcuntur numeri, qui iam ex numeris primis primitiuis oriuntur. Quocirca omnes numeri, qui pro γ ſubſtitui poſſunt, erunt infra 200:

$+1, +4, +9, +16, +25, +36, +49, +64, +81,$
$+100, +121, +144, +169, +196,$

$-5, +19, -29, -71, -101, +139, -149, -191$

$+6, -14, -21, -26, -34, -39, +51, -74, +91,$
$-111, -119, +166$

$-20, +24, -30, -45, +54, -56, +70, +76, -80, -84,$
$-95, +96, -104, +105$

$+114, -116, -125, -126, +130, +136, +145, +150,$
$-156, -170, +171, -189, +195$

reliqui

reliqui autem numeri omnes pro γ aſſumti reddent problema impoſſibile.

Exemplum 2.

37. *Reſoluere in numeris integris aequationem*

$$5xx + 11.\,19.\,29 = yy$$

Quia eſt $\alpha = 5$ et $\gamma = 11.\,19.\,29$, factores hi cum forma $bb - 5aa$ conueniunt, et ſinguli in ea contineri deprehenduntur: nam

pro 11 eſt $b = 4$, $a = 1$ vnde etiam producta ex
19 -- $b = 8$, $a = 3$ binis in eadem forma
29 -- $b = 7$, $a = 2$ continentur

pro 11. 19 eſt $\left\{\begin{matrix} b = 17;\ a = 4 \\ b = 47;\ a = 20 \end{matrix}\right\}$ ergo tertium adiungendo

$$\text{pro } 11.\,19.\,29 \text{ eſt } \left\{\begin{matrix} b = 79; & a = 6 \\ b = 159; & a = 62 \\ b = 129; & a = 46 \\ b = 529; & a = 234 \end{matrix}\right\}$$

Cum iam ſit $1 = 9^2 - 5.4^2$, ſeu $b = 9$ et $a = 4$ pro 1, hae formulae inſuper per 1 multiplicatae duplicabuntur, fietque pro 11. 19. 29

$b = 591;\ a = 262$	$b = 241;\ a = 102$
$b = 831;\ a = 370$	$b = 2081;\ a = 930$
$b = 191;\ a = 78$	$b = 81;\ a = 10$
$b = 2671;\ a = 1194$	$b = 9441;\ a = 4222$

Hinc ergo iam duodecim ſolutiones problematis ſumus nacti, quae ſunt:

I.	$x = 6$; $y = 79$	VII.	$x = 234$; $y = 529$
II.	$x = 10$; $y = 81$	VIII.	$x = 262$; $y = 591$
III	$x = 46$; $y = 129$	IX.	$x = 370$; $y = 831$
IV.	$x = 62$; $y = 159$	X.	$x = 930$; $y = 2081$
V.	$x = 78$; $y = 191$	XI.	$x = 1194$; $y = 2671$
VI.	$x = 102$; $y = 241$	XII.	$x = 4222$; $y = 9441$

ex quibus porro cum formula $1 = 9^2 - 5 \cdot 4^2$ coniungendis infinite nouae eaeque omnes elicientur: ex ſecunda ſcilicet prodit

$x = 414$; $y = 929$; et ex ſexta $x = 1882$; $y = 4209$ ex quinta $x = 1466$; $y = 3279$; ex octaua $x = 4722$; $y = 10559$; ſicque iam ſedecim ſolutiones ſumus adepti.

Concluſio.

38. His expoſitis non amplius coacti ſumus, propoſita huiusmodi aequatione $axx + \gamma = yy$, primum quaſi diuinando vnum caſum ſatisfacientem anquirere, ſed numerum γ examinando ſecundum formulas modo traditas ſtatim pronunciare poſſumus, vtrum aequatio reſolutionem admittat, nec ne? ac ſi admittit, per eadem principia vnam ſaltem ſolutionem elicere licebit, quod quidem promte fieri poterit, ſi numerus γ fuerit reſolubilis in factores non nimis magnos. Verum ſi numerus γ ſit primus ac praegrandis, iudicium quidem ſolubilitatis aeque eſt facile, at inuentio vnius ſolutionis maiorem laborem requirit. Veluti ſi proponatur $30xx + 1459 = yy$, quia 1459 eſt numerus primus formae $120n + 19$, aequatio eſt reſolubilis; verum ei ſatisfieri ſumendo $x = 39$ et $y = 217$ non

non tam facile inueſtigatur. Inueſtigatio tamen ſubleuatur, ſi ſtatuamus $y = 30z + 7$, vnde fit $xx = 30zz + 14z - 47$, et iam citius reperiemus $z = 7$, et $x = 39$ vnde prodit $y = 217$. At ſi ponamus $y = 30z + 13$, fit $xx = 30zz + 26z - 43$, promtiusque inuenitur $x = 5$ et $y = 47$. Verum in numeris multo maioribus labor euadit inſuperabilis, methodusque certa adhuc deſideratur negotium conficiendi: deinde etiam quod omnes numeri primi, in ſupra allatis formulis $4\alpha n + A$ contenti, ſimul ſint numeri huius formae $bb - \alpha aa$, ad eas propoſitiones pertinet, quas veras credimus, etiamſi demonſtrare non valeamus. In quo cum eximia pars Theoriae numerorum verſetur, qui huius generis problemata diligentius perſcrutari voluerit, nullum eſt dubium, quin non contemnendas veritates ſit eruturus; ob eandemque cauſam confido haec ipſa, quae hic attuli, vſu non eſſe caritura: ea ipſa enim quae adhuc ſunt incognita accuratius expoſuiſſe non parum iuuabit.

DE

DE PROGRESSIONIBVS ARCVVM CIRCVLARIVM QVORVM TANGENTES SECVNDVM CERTAM LEGEM PROCEDVNT.

Auctore

L. EVLERO.

I.

Infinitas huiusmodi progreſſiones exhiberi poſſe vel ex his exemplis liquet, quae olim propoſui, ſcilicet denotante π arcum duos angulos rectos metientem inueni, eſſe

$\frac{\pi}{4} = A \tang \frac{1}{2} + A \tang \frac{1}{8} + A \tang . \frac{1}{18} + A \tang . \frac{1}{32} + A \tang . \frac{1}{50} + \text{etc.}$

quae ſeries arcuum in infinitum progreditur, tangente cuiusque indefinite exiſtente $= \frac{1}{2xx}$, ſimili modo eſt

$\frac{\pi}{4} = A \tang \frac{1}{3} + A \tang . \frac{1}{7} + A \tang . \frac{1}{13} + A \tang \frac{1}{21} + A \tang \frac{1}{31} + \text{etc.}$

hac arcuum ſerie pariter in infinitum continuata, cuius quisque terminus indefinite eſt $A \tang . \frac{1}{xx+x+1}$. Tales autem ſeries eo magis videntur omni attentione dignae, quod nulla adhuc conſtet methodus earum ſummam a priori inueniendi, atque etiam ipſi arcus omnes inter ſe ſint incommenſurabiles. Quin etiam ne expectare quidem licet methodum, cuius ope in genere huiusmodi ſerierum, quamcunque legem tangentes ſequantur, ſumma inueſtigari queat; ſed potius, niſi haec

haec lex certis conditionibus ſit adſtricta, nullo modo eae ad ſummam reuocari poſſe videntur, quae quidem arcu circulari exprimatur. Quam ob rem in hoc negotio alia via non patet, niſi vt a poſteriori huiusmodi ſeries inueſtigemus, quarum deinceps contemplatio fortaſſe viam quandam directam patefaciet; hincque modum exponam facilem ad quotcunque huiusmodi ſeries perueniendi, qui cum, ſimpliciſſimis principiis innixus, ad tam ardua perducat, omnino mereri videtur, vt diligentius euoluatur.

2. Non ſolum autem hoc modo ad ſeries infinitas deducimur, ſed pro lubitu progreſſiones dato terminorum numero conſtantes conſequi poſſumus. Fundamentum enim totius inueſtigationis in eo conſiſtit, vt pro lubitu numeros quotcunque aſſumamus, qui ſint:

$$\alpha,\quad \beta,\quad \gamma,\quad \delta,\quad \varepsilon,$$

qui vt tangentes angulorum ſpectentur. Cum enim manifeſto ſit

$$\left.\begin{array}{l} +\text{A tang.}\alpha+\text{A tang.}\beta+\text{A tang.}\gamma+\text{A tang.}\delta \\ -\text{A tang.}\beta-\text{A tang.}\gamma-\text{A tang.}\delta-\text{A tang.}\varepsilon \end{array}\right\}=\text{A tang.}\alpha-\text{A tang.}\varepsilon$$

binis arcubus ſubſcriptis colligendis ob $\text{A tang.}p-\text{A tang.}q = \text{A tang.}\frac{p-q}{pq+1}$ habebimus

$$\text{A tang.}\,\alpha-\text{A tang.}\,\varepsilon=\text{A tang.}\frac{\alpha-\beta}{\alpha\beta+1}+\text{A tang.}\frac{\beta-\gamma}{\beta\gamma+1}$$
$$+\text{A tang.}\frac{\gamma-\gamma}{\gamma\delta+1}+\text{A tang.}\frac{\delta-\varepsilon}{\delta\varepsilon+1}=\text{A tang.}\frac{\alpha-\varepsilon}{\alpha\varepsilon+1}.$$

En ergo formam maxime generalem, vnde omnes huiusmodi ſeries arcuum originem ducunt, ſiue in in-

 finitum

finitum excurrant, ſiue finito terminorum numero conſtent:

$$\text{A tang.}\frac{\alpha-\beta}{\alpha\beta+1}+\text{A tang.}\frac{\beta-\gamma}{\beta\gamma+1}+\text{A tang}\frac{\gamma-\delta}{\gamma\delta+1}+\text{A tang.}\frac{\delta-\varepsilon}{\delta\varepsilon+1}+\dots\dots\dots+\text{A tang.}\frac{\psi-\omega}{\psi\omega+1}=\text{A tang.}\frac{\alpha-\omega}{\alpha\omega+1}.$$

3. Caſui, quo numerus terminorum eſt finitus, hic non immorans, ſtatim in ſeries infinitas inquiram. Primo ergo pro α, β, γ etc. ſeriem harmonicam aſſumam in genere:

Hypotheſis I.
$$\frac{1}{a},\ \frac{1}{a+b},\ \frac{1}{a+2b},\ \frac{1}{a+3b},\ \frac{1}{a+4b},\ \frac{1}{a+5b}\ \text{etc.}$$

vnde cum ſit $\omega=0$ habebimus:

$$\text{A tang.}\frac{1}{a}=\text{A tang.}\frac{b}{aa+ab+1}+\text{A tang}\frac{b}{aa+3ab+2bb+1}+\text{A tang.}\frac{b}{aa+5ab+6bb+1}+\text{A tang.}\frac{b}{aa+7ab+12bb+1}+\text{etc.}$$

in infinitum.

Ac ſi ſingulis illis fractionibus communem tribuamus numeratorem c, erit ſimili modo

$$\text{A tang}\frac{c}{a}=\text{A tang.}\frac{bc}{a(a+b)+cc}+\text{A tang.}\frac{bc}{(a+b)(a+2b)+cc}+\text{A tang.}\frac{bc}{(a+2b)(a+3b)+cc}+\text{A tang.}\frac{bc}{(a+3b)(a+4b)+cc}+\text{etc.}$$

n infinitum.

Hinc praecipue notari merentur caſus, quibus numerator horum tangentium fit vnitas, quod euenit, ſi fuerit vel $bc=1$, vel ſi denominatores ſinguli per bc fiant diuiſibiles.

4. Vtroque caſu capi oportet vel $c=1$, vel $c=2$; ac ſi pro priori ſumatur $b=1$, prodibit

$$\text{A tang.}\frac{1}{a}=\text{A tang.}\frac{1}{aa+a+1}+\text{A tang.}\frac{1}{aa+3a+3}+\text{A tang.}\frac{1}{aa+5a+7}+\text{A tang.}\frac{1}{aa+7a+13}$$

cuius

cuius terminus in genere eſt A tang. $\frac{1}{aa+(2x-1)a+xx-x+1}$ vnde pro ſimplicioribus valoribus ipſius a naſcuntur hae ſeries :

A tang. $\frac{1}{0}$ = A tang. 1 + A tang. $\frac{1}{3}$ + A tang $\frac{1}{7}$ + A tang. $\frac{1}{13}$ + A tang. $\frac{1}{21}$ + A tang. $\frac{1}{31}$ + etc.

A tang. 1 = A tang. $\frac{1}{3}$ + A tang. $\frac{1}{7}$ + A tang. $\frac{1}{13}$ + A tang. $\frac{1}{21}$ + A tang. $\frac{1}{31}$ + etc.

A tang. $\frac{1}{2}$ = A tang. $\frac{1}{7}$ + A tang $\frac{1}{13}$ + A tang. $\frac{1}{21}$ + A tang. $\frac{1}{31}$ + A tang $\frac{1}{43}$ + etc.

A tang $\frac{1}{3}$ = A tang. $\frac{1}{13}$ + A tang. $\frac{1}{21}$ + A tang. $\frac{1}{31}$ + A tang. $\frac{1}{43}$ + A tang. $\frac{1}{57}$ + etc.

A tang. $\frac{1}{4}$ = A tang. $\frac{1}{21}$ + A tang. $\frac{1}{31}$ + A tang. $\frac{1}{43}$ + A tang. $\frac{1}{57}$ + A tang. $\frac{1}{73}$ + etc.

etc.

5. Pro b alios numeros capere non licet, niſi qui ſint diuiſores ipſius $aa+1$, vnde ſi $b=2$, neceſſe eſt ſit a numerus impar: hincque ſequentes naſcuntur ſeries:

A tang. 1 = A tang. $\frac{1}{2}$ + A tang. $\frac{1}{8}$ + A tang. $\frac{1}{18}$ + A tang. $\frac{1}{32}$ + A tang $\frac{1}{50}$ + A tang. $\frac{1}{72}$ etc.

A tang. $\frac{1}{3}$ = A tang. $\frac{1}{8}$ + A tang $\frac{1}{18}$ + A tang. $\frac{1}{32}$ + A tang $\frac{1}{50}$ + A tang $\frac{1}{72}$ + A tang. $\frac{1}{98}$ etc.

A tang. $\frac{1}{5}$ = A tang. $\frac{1}{18}$ + A tang. $\frac{1}{32}$ + A tang $\frac{1}{50}$ + A tang. $\frac{1}{72}$ + A tang. $\frac{1}{98}$ etc.

A tang. $\frac{1}{7}$ = A tang. $\frac{1}{32}$ + A tang. $\frac{1}{50}$ + A tang. $\frac{2}{72}$ + A tang. $\frac{1}{98}$ etc.

etc.

 6. Si

6. Si ſtatuatur $b = 5$, ſumi debet $u = 5n \pm 2$; hinc fit:

$$A \text{ tang.} \tfrac{1}{2} = A \text{ tang.} \tfrac{1}{3} + A \text{ tang.} \tfrac{1}{17} + A \text{ tang.} \tfrac{1}{41} + A \text{ tang.} \tfrac{1}{75} + A \text{ tang.} \tfrac{1}{119} + A \text{ tang.} \tfrac{1}{174} + \text{etc.}$$

$$A \text{ tang.} \tfrac{1}{3} = A \text{ tang.} \tfrac{1}{5} + A \text{ tang.} \tfrac{1}{21} + A \text{ tang.} \tfrac{1}{47} + A \text{ tang.} \tfrac{1}{83} + A \text{ tang.} \tfrac{1}{129} + A \text{ tang.} \tfrac{1}{185} + \text{etc.}$$

$$A \text{ tang.} \tfrac{1}{7} = A \text{ tang.} \tfrac{1}{17} + A \text{ tang.} \tfrac{1}{41} + A \text{ tang.} \tfrac{1}{75} + A \text{ tang.} \tfrac{1}{119} + A \text{ tang.} \tfrac{1}{174} \text{ etc.}$$

$$A \text{ tang.} \tfrac{1}{8} = A \text{ tang.} \tfrac{1}{21} + A \text{ tang.} \tfrac{1}{47} + A \text{ tang.} \tfrac{1}{83} + A \text{ tang.} \tfrac{1}{129} + A \text{ tang.} \tfrac{1}{185} \text{ etc.}$$

Primae terminus generalis eſt $A \text{ tang.} \frac{1}{5xx - x - 1}$, ſecundae $A \text{ tang.} \frac{1}{5xx + x - 1}$, ſequentes autem ex prioribus facile deducuntur, quas ideo poſthac omittemus.

7. Si $b = 10$, ſumi debet $a = 10n \pm 3$, vnde oriuntur hae duae ſeries:

$$A \text{ tang.} \tfrac{1}{3} = A \text{ tang.} \tfrac{1}{4} + A \text{ tang.} \tfrac{1}{30} + A \text{ tang.} \tfrac{1}{76} + A \text{ tang.} \tfrac{1}{140} + A \text{ tang.} \tfrac{1}{228} + \text{etc.}$$

termino generali exiſtente $A \text{ tang.} \frac{1}{10xx - 4x - 2}$

$$A \text{ tang.} \tfrac{1}{7} = A \text{ tang.} \tfrac{1}{12} + A \text{ tang.} \tfrac{1}{46} + A \text{ tang.} \tfrac{1}{100} + A \text{ tang.} \tfrac{1}{174} + A \text{ tang.} \tfrac{1}{268} + \text{etc.}$$

termino generali exiſtente $A \text{ tang.} \frac{1}{10xx + 4x - 2}$.

8. Simili modo poſito $b = 13$, et $a = 13n \pm 5$, prodibunt

$$A \text{ tang.} \tfrac{1}{5} = A \text{ tang.} \tfrac{1}{7} + A \text{ tang.} \tfrac{1}{43} + A \text{ tang.} \tfrac{1}{105} + A \text{ tang.} \tfrac{1}{193} + \text{etc.}$$

termi-

termino generali exiſtente A tang. $\frac{1}{13xx - 3x - 3}$

A tang. $\frac{1}{8}$ = A tang. $\frac{1}{13}$ + A tang. $\frac{1}{55}$ + A tang. $\frac{1}{123}$ + A tang $\frac{1}{217}$ + etc.

termino generali exiſtente A tang. $\frac{1}{13xx + 3x - 3}$.

9. Sit $b = 17$, capiaturque $a = 17n \pm 4$, ac prodibunt

A tang. $\frac{1}{4}$ = A tang. $\frac{1}{5}$ + A tang. $\frac{1}{47}$ + A tang. $\frac{1}{123}$ + A tang. $\frac{1}{233}$ + A tang $\frac{1}{377}$ etc.

termino generali exiſtente A tang. $\frac{1}{17xx - 9x - 3}$

A tang. $\frac{1}{13}$ = A tang. $\frac{1}{23}$ + A tang. $\frac{1}{83}$ + A tang. $\frac{1}{177}$ + A tang. $\frac{1}{305}$ + A tang. $\frac{1}{467}$ etc.

termino generali exiſtente A tang. $\frac{1}{17xx + 9x - 3}$.

10. Sit $b = 25$, captoque $a = 25n \pm 7$, erit

A tang $\frac{1}{7}$ = A tang. $\frac{1}{9}$ + A tang. $\frac{1}{73}$ + A tang. $\frac{1}{187}$ + A tang. $\frac{1}{351}$ + A tang. $\frac{1}{565}$ + etc.

termino generali exiſtente A tang $\frac{1}{25xx - 11x - 5}$.

A tang. $\frac{1}{18}$ = A tang. $\frac{1}{31}$ + A tang. $\frac{1}{117}$ + A tang. $\frac{1}{253}$ + A tang. $\frac{1}{439}$ + A tang. $\frac{1}{675}$ etc.

termino generali exiſtente A tang. $\frac{1}{25xx + 11x - 5}$.

11. Hinc iam in genere colligere poterimus, ſi fuerit a numerus quicunque, ſitque $aa + 1 = mn$, ſore

A tang. $\frac{1}{a}$ = A tang. $\frac{1}{a + m}$ + A tang. $\frac{1}{3a + m + 2n}$ + A tang. $\frac{1}{5a + m + 6n}$ + A tang. $\frac{1}{7a + m + 12n}$ etc.

 termi-

termino generali exiſtente A tang. $\frac{1}{nxx+(2a-n)x-a+m}$

ſeu hoc modo: A tang. $\frac{1}{nx(x-1)+a(2x-1)+m}$

Si ergo ſummam huius ſeriei infinitae per $\int$A tang. $\frac{1}{nxx+(2a-n)x-a+m}$ indicemus, conſequemur hoc Theorema:

$$\int \text{A tang.} \frac{1}{nxx+(2a-n)x-a+m} = \text{A tang.} \frac{1}{a}, \text{exiſtente } aa+1=mn.$$

12. Videamus ergo, quibus caſibus ſeries, cuius terminus generalis eſt A tang. $\frac{1}{Lxx+Mx+N}$, ſummari queat; et comparatione inſtituta deprehendemus, hoc fieri poſſe, quoties fuerit $MM+4=LL+4LN$; ideoque

vel $L=-2N+\sqrt{(MM+4NN+4)}$, vel $M=\sqrt{(LL+4LN-4)}$

vel $N=\frac{MM-LL+4}{4L}$.

Atque ſi haec relatio inter coefficientes L, M N locum habuerit, erit $\int$A tang. $\frac{1}{Lxx+Mx+N}$ = A tang. $\frac{2}{L+M}$ ſiue erit

$$\text{A tang.} \frac{2}{L+M} = \text{A tang.} \frac{1}{L+M+N} + \text{A tang.} \frac{1}{4L+2M+N} + \text{A tang.} \frac{1}{9L+3M+N} + \text{A tang.} \frac{1}{16L+4M+N} + \text{etc.}$$

Hypotheſis II. 13. Cum haec ex progreſſione harmonica ſequantur, pro α, β, γ, δ etc. ſumamus hanc ſeriem:

$\frac{c}{a}$; $\frac{c+d}{a+b}$; $\frac{c+2d}{a+2b}$; $\frac{c+3d}{a+3b}$; $\frac{c+4d}{a+4b}$; etc.

vnde cum ſit $\alpha=\frac{c}{a}$ et $\omega=\frac{d}{b}$, hanc adipiſcemur ſummationem:

$$\text{A tang.} \frac{bc-ad}{ab+cd} = \text{A tang.} \frac{bc-ad}{a(a+b)+c(c+d)} + \text{A tang.} \frac{bc-ad}{(a+b)(a+2b)+(c+d)(c+2d)} + \text{etc.}$$

cuius

cuius terminus generalis eſt A tang. $\frac{bc-ad}{(a+b(x-1))(a+bx)+(c+d(x-1))(c+dx)}$.

14. Vt iam numerator huius tangentis vnitati fiat aequalis, vel eſſe debet $bc-ad=1$, vel denominator per numeratorem $bc-ad$ diuiſibilis, quod poſterius euenit ſumendo:

$$a=pr+qs;\ c=ps-qr;\ b=pt+qu;\ d=pu-qt$$
dum ſit $st-ru=1$.

tum enim fiet:

$$\text{A tang.}\frac{1}{rt+su}=\int\text{A tang.}\frac{1}{rr+ss+(rt+su)(2x-1)+(tt+uu)x(x-1)}.$$

Verum haec formula cum praecedente ita conuenit, vt hinc nullae nouae ſeries eliciantur.

15. Fractiones autem continuae admodum idoneos praebent valores pro numeris α, β, γ, δ, etc. aſſumendos. Si enim fuerit: *Hypotheſis III.*

$$x=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e+\cfrac{1}{f+\cfrac{1}{g+\text{etc.}}}}}}}$$

hinc ſequens ſeries fractionum conſtituitur, pro $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ etc. capiendarum:

$$\begin{array}{cccccc} \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon & \\ \frac{1}{0}; & \frac{a}{1}; & \frac{ab+1}{b}; & \frac{abc+c+a}{bc+1}; & \frac{abcd+cd+ad+ab+1}{bcd+d+b}; & \text{etc.} \end{array}$$

qua-

quarum vltima ipſi valori ipſius z eſt aequalis.

16. Quodſi hic eam notandi formam, quam in Algorithmi ſingularis ſpecimine tradidi, introducamus, hae fractiones ita exprimentur:

$$\overset{\alpha}{\tfrac{1}{0}};\quad \overset{\beta}{\tfrac{(a)}{1}};\quad \overset{\gamma}{\tfrac{(a,b)}{(b)}};\quad \overset{\delta}{\tfrac{(a,b,c)}{(b,c)}};\quad \overset{\varepsilon}{\tfrac{(a,b,c,d)}{(b,c,d)}};\quad \overset{\zeta}{\tfrac{(a,b,c,d,e)}{(b,c,d,e)}}\ \text{etc.}$$

vti notari oportet, eſſe

$$(a,b) = a(b) + 1 = b(a) + 1$$

$$(a,b,c) = a(b,c) + (c) = c(a,b) + (a)$$

$$(a,b,c,d) = a(b,c,d) + (c,d) = d(a,b,c) + (a,b)$$

$$(a,b,c,d,e) = a(b,c,d,e) + (c,d,e) = e(a,b,c,d) + (a,b,c)$$

etc.

17. Cum igitur ſit $\alpha = \frac{1}{0}$, et $\omega = z$, erit

$$\text{A tang.}\,\tfrac{1}{z} = \text{A tang.}\,\tfrac{1}{\beta} + \text{A tang.}\,\tfrac{\beta-\gamma}{\beta\gamma+1} + \text{A tang.}\,\tfrac{\gamma-\delta}{\gamma\delta+1} + \text{A tang.}\,\tfrac{\delta-\varepsilon}{\delta\varepsilon+1} + \text{etc.}$$

vbi eſt $\beta = a$; et $\frac{\beta-\gamma}{\beta\gamma+1} = \frac{-1}{(a)(a,b)+(b)}$; tum vero

$$\frac{\gamma-\delta}{\gamma\delta+1} = \frac{+1}{(a,b)(a,b,c)+(b)(b,c)}$$

$$\frac{\delta-\varepsilon}{\delta\varepsilon+1} = \frac{-1}{(a,b,c)(a,b,c,d)+(b,c)(b,c,d)}$$

$$\frac{\varepsilon-\zeta}{\varepsilon\zeta+1} = \frac{-1}{(a,b,c,d)(c,b,c,d,e)+(b,c,d)(b,c,d,e)}$$

etc.

ita vt omnes numeratores iam ſint, vel $+1$, vel -1.

18. Quodſi breuitatis gratia loco illius ſeriei ſcribamus

$$\overset{a}{\tfrac{1}{0}};\quad \overset{b}{\tfrac{a}{1}};\quad \overset{c}{\tfrac{B}{\mathfrak{B}}};\quad \overset{d}{\tfrac{C}{\mathfrak{C}}};\quad \overset{e}{\tfrac{D}{\mathfrak{D}}};\quad \overset{f}{\tfrac{E}{\mathfrak{E}}};\quad \overset{g}{\tfrac{F}{\mathfrak{F}}};\ \text{etc}$$

vt

vt ſit:

$$B = ab + 1 \qquad \mathfrak{B} = b$$
$$C = cB + a \qquad \mathfrak{C} = c\mathfrak{B} + 1$$
$$D = dC + B \qquad \mathfrak{D} = d\mathfrak{C} + \mathfrak{B}$$
$$E = eD + C \qquad \mathfrak{E} = e\mathfrak{D} + \mathfrak{C}$$
$$F = fE + D \qquad \mathfrak{F} = f\mathfrak{E} + \mathfrak{D}$$

etc. etc.

erit

$$\text{Atang.}\tfrac{1}{z} = \text{Atang.}\tfrac{1}{a} - \text{Atang.}\frac{1}{a+b(aa+1)} + \text{Atang.}\frac{1}{a+b(aa+1)+c(BB+\mathfrak{B}\mathfrak{B})}$$
$$- \text{A tang.}\frac{1}{a+b(aa+1)+c(BB+\mathfrak{B}\mathfrak{B})+d(CC+\mathfrak{C}\mathfrak{C})}$$
$$+ \text{A tang.}\frac{1}{a+b(aa+1)+c(BB+\mathfrak{B}\mathfrak{B})+d(CC+\mathfrak{C}\mathfrak{C})+e(DD+\mathfrak{D}\mathfrak{D})}$$
etc.

19. Conſideremus fractionem continuam definitam hanc:

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 \text{ etc.}}}}}$$

cuius valor eſt $= \sqrt{2}$

vnde fractiones, quarum vltima eſt $= \sqrt{2}$, ſunt

$$\overset{1}{\tfrac{1}{0}};\quad \overset{1}{\tfrac{1}{1}};\quad \overset{2}{\tfrac{3}{2}};\quad \overset{2}{\tfrac{7}{5}};\quad \overset{2}{\tfrac{17}{12}};\quad \overset{2}{\tfrac{41}{29}};\quad \overset{2}{\tfrac{99}{70}};\quad \overset{2}{\tfrac{239}{169}} \text{ etc.}$$

Cum iam ſit $\alpha = \infty$, et $\omega = \sqrt{2}$, erit

$$\text{A tang.}\tfrac{1}{\sqrt{2}} = \text{A tang. } 1 - \text{A tang.}\tfrac{1}{5} + \text{A tang.}\tfrac{1}{37} - \text{A tang.}\tfrac{1}{178}$$
$$+ \text{A tang.}\tfrac{1}{1045} - \text{etc.}$$

 cuius

cuius ſeriei lex non ſatis eſt perſpicua, propterea quod in fractione continua ordo indicum eſt interruptus, qui ſi obſeruatur, vt ſit

$$2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \text{etc.}}}} = 1 + \sqrt{2}$$ vnde oriuntur hae fractiones

$$\begin{matrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & \\ \frac{1}{0}, & \frac{2}{1}, & \frac{5}{2}, & \frac{12}{5}, & \frac{29}{12}, & \frac{70}{29}, & \frac{169}{70}, & \frac{408}{169} & \text{etc.} \end{matrix}$$

$$\text{A tang.}\,\frac{1}{1+\sqrt{2}} = \text{A tang.}\,\frac{1}{2} - \text{A tang.}\,\frac{1}{12} + \text{A tang.}\,\frac{1}{70} - \text{A tang.}\,\frac{1}{408} + \text{A tang.}\,\frac{1}{2378} - \text{etc.}$$

vbi eſt $70 = 6.12 - 2$; $408 = 6.70 - 12$; $2378 = 6.408 - 70$ etc.

et $\text{A tang.}\,\frac{1}{1+\sqrt{2}} = \frac{\pi}{8}$.

20. Hoc modo quaecunque alia fractio continua tractari poteſt; veluti cum ſit

$$\sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2\ \text{etc.}}}}}}}$$

hinc oriuntur ſequentes ex indicibus fractiones:

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & \\ \frac{1}{0}, & \frac{1}{1}, & \frac{2}{1}, & \frac{5}{3}, & \frac{7}{4}, & \frac{19}{11}, & \frac{26}{15}, & \frac{71}{41}, & \frac{97}{56} & \text{etc.} \end{matrix}$$

vbi ob $\alpha = \infty$, et $\omega = \sqrt{3}$, erit

$$\text{A tang.}\,\frac{1}{\sqrt{3}} = \text{A tang.}\,1 - \text{A tang.}\,\frac{1}{3} + \text{A tang.}\,\frac{1}{13} - \text{A tang.}\,\frac{1}{47} + \text{A tang.}\,\frac{1}{177} - \text{A tang.}\,\frac{1}{659} + \text{etc.}$$

ſin

ſin autem tantum fractiones alternae ſumantur

$\frac{1}{0},\ \frac{2}{1},\ \frac{7}{4},\ \frac{26}{15},\ \frac{97}{56},\ \frac{362}{209}$ etc.

obtinebimus:

$A\,tang.\frac{1}{\sqrt{3}} = A\,tang.\frac{1}{2} + A\,tang.\frac{1}{18} + A\,tang.\frac{1}{242} + A\,tang.\frac{1}{3362} +$ etc.

cuius denominatores omnes ſunt duplicata quadrata; ſcilicet

$$A\,tang.\frac{1}{\sqrt{3}} = A\,tang.\frac{1}{2.1^2} + A\,tang.\frac{1}{2.3^2} + A\,tang.\frac{1}{2.11^2} + A\,tang.\frac{1}{2.41^2} + A\,tang.\frac{1}{2.153^2} + \text{etc.}$$

Sumtis autem alteris alternis, prodit ob $A\,tang.\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$ et $A\,tang.\,1 = \frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{12} = A\,tang.\frac{1}{4} + A\,tang.\frac{1}{64} + A\,tang.\frac{1}{900} + A\,tang.\frac{1}{12544} +$ etc.

qui denominatores ſunt quadrata, quorum radices hanc progreſſionem conſtituunt:

1	2	3	4	5		x
2,	8,	30,	112,	418,	. . . . .	$\frac{(2+\sqrt{3})^x-(2-\sqrt{3})^x}{\sqrt{3}}$

21. Cum autem fractiones continuae ad huiusmodi ſeries arcuum deduxerint, viciſſim ſumma talis ſeriei ope fractionis continuae exhiberi poterit, quod commodiſſime ſequenti modo praeſtabitur.

Sit $A\,tang.\frac{1}{z} = A\,tang.\frac{1}{a} - A\,tang.\frac{1}{b} + A\,tang.\frac{1}{c} - A\,tang.\frac{1}{d} + A\,tang.\frac{1}{e} - A\,tang.\frac{1}{f}$ etc.

ac ponatur

$A\,tang.\frac{1}{z} = A\,tang.\frac{1}{a} - A\,tang.\frac{1}{B}$ erit $z = \frac{aB+1}{B-a} = a + \frac{aa+1}{-a+B}$

$A\,tang.\frac{1}{B} = A\,tang.\frac{1}{b} - A\,tang.\frac{1}{C}$ erit $B = \frac{bC+1}{C-b} = b + \frac{bb+1}{-b+C}$

$A\,tang.\frac{1}{C} = A\,tang.\frac{1}{c} - A\,tang.\frac{1}{D}$ erit $C = \frac{cD+1}{D-c} = c + \frac{cc+1}{-c+D}$

$A\,tang.\frac{1}{D} = A\,tang.\frac{1}{d} - A\,tang.\frac{1}{E}$ erit $D = \frac{dE+1}{E-d} = d + \frac{dd+1}{-d+E}$

etc. etc.

 hinc

hinc ergo colligendo habebitur per ſractionem continuam:

$$z = a + \cfrac{aa+1}{-a+b+\cfrac{bb+1}{-b+c+\cfrac{cc+1}{-c+d+\cfrac{dd+1}{-d+e+\cfrac{ee+1}{-e+f+\text{etc.}}}}}}$$

vnde valor ipſius z definitur.

SPECIMEN ALGORITHMI SINGVLARIS.

Auctore
L. EVLERO.

1.

Conſideratio fractionum continuarum, quarum vſum vberrimum per totam Analyſin iam aliquoties oſtendi, deduxit me ad quantitates certo quodam modo ex indicibus formatas, quarum natura ita eſt comparata, vt ſingularem algorithmum requirat. Cum igitur ſumma Analyſeos inuenta maximam partem algorithmo ad certas quasdam quantitates accommodato innitantur, non immerito ſuſpicari licet, et hunc algorithmum ſingularem non exigui vſus in Analyſi eſſe futurum, ſi quidem diligentius excolatur: etiamſi ei tantum non tribuendum cenſeam, vt cum receptis algorithmis comparari mereatur.

2. Sequenti autem modo ad eas quantitates, de quibus hic agere conſtitui, ſum deductus: ſi habeatur fractio continua

$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d}}}$$

cuius valor ſit inveſtigandus, ex numeris a, b, c, d, tanquam indicibus aſſumtis, ſequenti modo fractiones formantur:

$$\begin{array}{ccccc} & a & b & c & d \\ \frac{1}{0}, & \frac{a}{1}, & \frac{ab+1}{b}, & \frac{abc+c+a}{bc+1}, & \frac{abcd+cd+ad+ab+1}{bcd+d+b}, \end{array}$$

 Pri-

Primum ſcilicet locum obtinet ſemper fractio $\frac{1}{0}$, ſecundum $\frac{a}{1}$, cuius numerator eſt primus indicum *a*, denominator vero vnitas. Sequentis cuiusque fractionis tam numerator, quam denominator, inuenitur, ſi praecedentium vltimus per indicem ſupra ſcriptum multiplicetur, et ad productum penultimus addatur.

3. Conſtat autem harum fractionum poſtremam ipſi fractioni continuae propoſitae eſſe aequalem, praecedentes autem tam prope ad hunc ipſum valorem accedere, vt nulla fractio numeris non maioribus contenta exhiberi queat, quae ad illum propius accedat. Atque ex hoc fonte problema illud a Wallifio olim tractatum facile reſoluitur, quo propoſita quacunque fractione ex ingentibus numeris conſtante, aliae quaeruntur fractiones ex minoribus numeris conſtantes, quae tam parum a propoſita diſcrepent, vt minus diſcrepantes exhiberi plane nequeant, niſi maiores numeros adhibere velimus.

4. Hoc autem aliisque vſibus, quos fractiones continuae ſuppeditant, praetermiſſis, hic inprimis obſeruo, in ſerie illa fractionum ex indicibus formatarum, tam numeratores, quam denominatores, eandem, progreſſionis legem ſequi, et ſeorſim efformari poſſe. In vtraque enim ſerie, ſiue numeratorum, ſiue denominatorum, quilibet terminus per indicem ſupra ſcriptum multiplicatus, et termino antecedente auctus, praebet terminum ſequentem. Vltimus autem numerus ſuperioris ſeriei componitur ex omnibus quatuor indicibus *a*, *b*, *c*, *d*, penultimus tantum ex tribus *a*, *b*, *c*, antepenultimus tantum

tantum ex duobus *a*, et *b*. Inferiores autem numeri primum indicem *a* plane non inuoluunt, ſed ex reliquis *b*, *c*, *d* aequali lege formantur.

5. Quoniam igitur ratio formationis ex indicibus, tam pro numeratoribus, quam pro denominatoribus, eſt eadem, ac datis indicibus numerus inde formatus innoteſcit, hos ipſos numeros, quatenus ex indicibus ſunt formati, hic ſum contemplaturus, eorumque algorithmum traditurus. Propoſitis autem indicibus quibuscunque et quotcunque *a*, *b*, *c*, *d*, numerum ex iis formatum hoc modo (a, b, c, d) denotabo, eritque ergo euolutione inſtituta:

$$(a, b, c, d) = abcd + cd + ad + ab + 1$$

ſimilique modo pro denominatoribus indicem primum *a* omittendo

$$(b, c, d) = bcd + d + b.$$

6. Haec ergo teneatur definitio ſignorum ( ), inter quae indices ordine a ſiniſtra ad dextram ſcribere conſtitui; atque indices hoc modo clauſulis incluſi inpoſterum denotabunt numerum ex iſtis indicibus formatum. Ita a ſimpliciſſimis caſibus inchoando, habebimus:

$$(a) = a$$
$$(a,b) = ab + 1$$
$$(a,b,c) = abc + c + a$$
$$(a,b,c,d) = abcd + cd + ad + ab + 1$$
$$(a,b,c,d,e) = abcde + cde + ade + abe + abc + e + c + a$$

etc.

ex qua progreſſione patet, vnitatem tenere locum huius ſigni ( ) ſi ſcilicet nullus adſit index.

7. Quemadmodum hae expreſſiones creſcente indicum numero vlterius ſint continuandae ex formationis lege, qua quilibet ex duobus antecedentibus componitur, ſponte liquet. Eſt ſcilicet:

$$(a, b) = b(a) + 1 = b(a) + (\;)$$
$$(a, b, c) = c(a, b) + (a)$$
$$(a, b, e, d) = d(a, b, c) + (a, b)$$
$$(a, b, c, d, e) = e(a, b, c, d) + (a, b, c)$$

In genere ergo habebitur:

$$(a, b, c \ldots p, q, r) = r(a, b, c \ldots p, q) + (a, b, c \ldots p)$$

quae connexio, tanquam corollarium definitionis numerorum, quos hic contemplamur, ſpectari debet.

8. In euolutione horum valorum, vti ante §. 6 ſunt exhibiti, difficulter ratio compoſitionis cernitur. Poſſunt autem ii quoque hoc modo repraeſentari:

$$(a) = a(1)$$
$$(a,b) = ab\left(1 + \frac{1}{ab}\right)$$
$$(a,b,c) = abc\left(1 + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc}\right)$$
$$(a,b,c,d) = abcd\left(1 + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{cd} + \frac{1}{abcd}\right)$$
$$(a,b,c,d,e) = abcde\left(1 + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{cd} + \frac{1}{de} + \frac{1}{abcd} + \frac{1}{qbde} + \frac{1}{bcde}\right)$$

In his autem denominatoribus occurrunt primo facta ex binis indicibus contiguis, tum vero producta ex binis illorum factorum, qui nullum indicem communem inuoluunt, tum ſequentur producta ex ternis, quater-

nis

nis etc. combinationibus, quae nullum implicant indicem communem; vnde ratio compoſitionis iam fit perſpicua.

9. Ex hac euolutione iam manifeſtum eſt, ſi indices ordine retrogrado diſponantur, eosdem plane prodire numeros inde formatos. Erit ſcilicet

$$(a, b) = (b, a)$$
$$(a, b, c) = (c, b, a)$$
$$(a, b, c, d) = (d, c, b, a)$$
$$(a, b, c, d, e) = (e, d, c, b, a).$$

Dummodo ergo ordo indicum detur, ſiue ſit directus, ſiue retrogradus, perinde eſt; vtroque enim modo idem numerus inde formatus obtinetur.

10. Hinc ergo ſequitur, fore formulas §. 7 hoc modo inuertendo:

$$(a, b) = a(b) + 1$$
$$(a, b, c) = a(b, c) + (c)$$
$$(a, b, c, d) = a(b, c, d) + (c, d)$$
$$(a, b, c, d, e) = a(b, c, d, e) + (c, d, e)$$

atque in genere erit pro quotcunque indicibus:

$$(a, b, c, d, \text{etc.}) = a(b, c, d, \text{etc.}) + (c, d, \text{etc.})$$

11. Si ergo ponatur:

$$(a, b, c, d, e, \text{etc.}) = A$$
$$(b, c, d, e, \text{etc.}) = B$$
$$(c, d, e, \text{etc.}) = C$$
$$(d, e, \text{etc.}) = D$$
$$(e, \text{etc.}) = E$$

 habe-

habebimus has aequalitates:

$$A = aB + C \text{ ſeu } \frac{A}{B} = a + \frac{C}{B}$$
$$B = bC + D \text{ ſeu } \frac{B}{C} = b + \frac{D}{C}$$
$$C = cD + E \text{ ſeu } \frac{C}{D} = c + \frac{E}{D}$$
etc. etc.

12. Cum igitur ſit

$$\frac{C}{B} = \frac{1}{b + \frac{D}{C}}; \quad \frac{D}{C} = \frac{1}{c + \frac{E}{D}}; \quad \frac{E}{D} = \frac{1}{d + \frac{F}{E}} \text{ etc.}$$

erit his valoribus ſubſtituendis:

$$\frac{A}{B} = a + \frac{C}{B} = a + \frac{1}{b + \frac{D}{C}} = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{E}{D}}} = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d + \frac{F}{E}}}}.$$

Vnde ſi e ſit indicum vltimus, ita vt ſit $E = e$ et $F = 1$, erit

$$\frac{A}{B} = \frac{(a, b, c, d, e)}{(b, c, d, e)} = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d + \frac{1}{e}}}}$$

ſicque patet, quemadmodum per huiusmodi numeros valores fractionum continuarum commode exprimi queant.

13. Si ergo indicum numerus fuerit infinitus, etiam fractio continua in infinitum excurret, eiusque valor erit $= \frac{(a, b, c, d, e, \text{etc.})}{(b, c, d, e \text{ etc.})}$. Viciſſim autem fractionum continuarum proprietates cognitae nobis inſignes affectiones huiusmodi numerorum ex indicibus formatorum manifeſta-

niſeſtabunt, quas diligentius euoluere operae erit pretium. Sit igitur fractio continua, ſiue in infinitum excurrens, ſiue ſecus propoſita:

$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{e + \cfrac{1}{f \text{ etc.}}}}}}$$

cuius valor indicetur littera V

et ſumendis omnibus indicibus a, b, c, d, e, f etc. erit, vti demonſtrauimus:

$$V = \frac{(a, b, c, d, e, f \text{ etc.})}{(b, c, d, e, f, \text{ etc.})}.$$

14. Si quiſpiam horum indicum fiat infinite magnus, is in hac expreſſione cum omnibus ſequentibus poterit omitti, et valor fractionis continuae tantum per indices, qui infinitum praecedunt, exprimetur.

Ita ſi ſit $b = \infty$ erit $V = \frac{(a)}{1}$

ſi ſit $c = \infty$ erit $V = \frac{(a, b)}{(b)}$

ſi ſit $d = \infty$ erit $V = \frac{(a, b, c)}{(b, c)}$

ſi ſit $e = \infty$ erit $V = \frac{(a, b, c, d)}{b, c, d}$.

Vti ergo his caſibus fractio continua abrumpitur, ita etiam valor V alios indices non implicat, niſi qui indicem infinitum antecedunt.

15. Sin autem nullus indicum in infinitum excreſcit, hi ipſi valores continuo propius ad verum va-

lorem V accedunt. Scilicet ſi fuerit $V = \frac{(a, b, c, d, e \text{ etc.})}{(b, c, d, e, \text{etc.})}$ fractiones in ſequenti ſerie expoſitae:

$$\frac{(a)}{1};\ \frac{(a, b)}{(b)};\ \frac{(a, b, c)}{(b, c)};\ \frac{(a, b, c, d)}{(b, c, d)};\ \frac{(a, b, c, d, e)}{(b, c, d, e)};\ \text{etc.}$$

continuo proprius ad valorem V accedunt, earumque vltima demum eius valorem verum exhibebit; ſiquidem indices a, b, c, d etc. fuerint numeri vnitate maiores. Prima quidem $\frac{a}{1}$ notabiliter ab V diſcrepare poterit; ſecunda autem propius accedet, tertia adhuc propius, et ita porro, donec tandem vltima verum valorem V ſit praebitura.

16. Neceſſe ergo eſt, vt differentiae inter binas huiusmodi fractiones contiguas continuo fiant minores; quod quo clarius perſpiciatur, has differentias inueſtigemus, quae erunt:

$$\frac{(a)}{1} - \frac{(a, b)}{(b)} = \frac{(a)(b) - 1(a, b)}{1(b)}$$

$$\frac{(a, b)}{(b)} - \frac{(a, b, c)}{(b, c)} = \frac{(a, b)(b, c) - (b)(a, b, c)}{(b)(b, c)}$$

$$\frac{(a, b, c)}{(b, c)} - \frac{(a, b, c, d)}{(b, c, d)} = \frac{(a, b, c)(b, c, d) - (b, c)(a, b, c, d)}{(b, c)(b, c, d)}$$

$$\frac{(a, b, c, d)}{(b, c, d)} - \frac{(a, b, c, d, e)}{(b, c, d, e)} = \frac{(a, b, c, d)(b, c, d, e) - (b, c, d)(a, b, c, d, e)}{(b, c, d)(b, c, d, e)}.$$

17. De harum differentiarum denominatoribus, qui ex binis factoribus ſunt conflati, primum obſeruo, hos factores inter ſe eſſe numeros primos, quod quidem ex antecedentibus eſt ſatis manifeſtum. Cum enim pro denominatore $(b, c, d)(b, c, d, e)$ ſit $(b, c, d, e) = e(b, c, d) + (b, c)$ erit $\frac{(b, c, d, e)}{(b, c, d)} = e + \frac{(b, c)}{(b, c, d)}$, vnde factores (b, c, d) et (b, c, d, e) communem diuiſorem non habebunt, niſi qui ſimul ſit communis diuiſor numerorum (b, c) et (b, c, d); verum ob eandem rationem horum numerorum communis

nis diviſor non datur, niſi qui ſimul ſit communis diviſor horum (b) et (b, c), ac denique horum 1 et b, qui cum nullum habeant communem diviſorem, neque illi habebunt, eruntque propterea numeri primi. Hinc vero etiam intelligitur, numeros $(a, b, c, d, \text{etc.})$ et $(b, c, d, \text{etc.})$ eſſe inter ſe primos.

18. Differentiae ergo illae minores eſſe nequeunt, quam ſi numeratores in unitatem, ſive affirmativam, ſive negativam, abeant, id quod re vera evenire exempla declarant. Conveniet ergo, idem ex natura illorum numeratorum per indices formatorum demonſtrari. Pro primo quidem numeratore cum ſit $(a, b) = b(a) + 1$ per §. 7. erit:

$$(a)(b) - 1(a, b) = ab - b(a) - 1 = -1.$$

Tum vero pro ſecundo, ob $(b, c) = c(b) + 1$ et $(a, b, c) = c(a, b) + (a)$ erit

$$(a, b)(b, c) - (b)(a, b, c) = (a, b)c(b) + (a, b) - (b)c(a, b) - (b)(a)$$

quae propter terminos $(a, b)c(b) - (b)c(a, b)$ ſe tollentes abit in

$(a, b) - (b)(a) = +1$, ita ut ſit ſecundus numerator

$$(a, b)(b, c) - (b)(a, b, c) = +1.$$

19. Quemadmodum hic numerator ſecundus ad primum negative ſumtum eſt reductus, ita tertius oſtendi poteſt ſecundo negative ſumto eſſe aequalis. Nam quia $(b, c, d) = d(b, c) + (b)$ et

$(a, b, c, d) = d(a, b, c) + (a, b)$ erit

$$(a, b, c)(b, c, d) - (b, c)(a, b, c, d) = (a, b, c)d(b, c) + (a, b, c)(b) - (b, c)d(a, b, c) - (b, c)(a, b)$$

 Haec

Haec ergo expreſſio tranſit in $-(a,b)(b,c)+(b)(a,b,c)=-1$, quia eſt denominator ſecundus negatiue ſumtus. Eodem autem modo numerator quartus aequabitur tertio negatiue ſumto, et in genere quilibet ſequens praecedenti negatiue ſumto.

20. Hinc ergo conſequimur ſequentes reductiones non parum notatu dignas:

$$(a)(b) \qquad -1(a,b)=-1$$
$$(a,b)(b,c) \qquad -(b)(a,b,c)=+1$$
$$(a,b,c)(b,c,d) \qquad -(b,c)(a,b,c,d)=-1$$
$$(a,b,c,d(b,c,d,e)-(b,c,d)(a,b,c,d,e)=+1$$

et in genere

$$(a,b,c,d\ldots\ldots m)(b,c,d,\ldots\ldots m,n)-(b,c,d\ldots\ldots m)(a,b,c,d\ldots\ldots m,n)=\pm 1$$

vbi $+1$ valet, ſi in primis vinculis numerus indicum fuerit par, contra vero -1.

21. Ipſae ergo differentiae ſupra expoſitae erunt:

$$\frac{(a)}{1}-\frac{(a,b)}{(b)}=\frac{-1}{1(b)}$$
$$\frac{(a,b)}{(b)}-\frac{(a,b,c)}{(b,c)}=\frac{+1}{(b)(b,c)}$$
$$\frac{(a,b,c)}{(b,c)}-\frac{(a,b,c,d)}{(b,c,d)}=\frac{-1}{(b,c)(b,c,d)}$$
$$\frac{(a,b,c,d)}{(b,c,d)}-\frac{(a,b,c,d,e)}{(b,c,d,e)}=+\frac{1}{(b,c,d)(b,c,d,e)}$$
$$\frac{(a,b,c,d,e)}{(b,c,d,e)}-\frac{(a,b,c,d,e,f)}{(b,c,d,e,f)}=-\frac{1}{(b,c,d,e)(b,c,d,e,f)}$$

etc.

vnde, cum hae differentiae minores eſſe nequeant, ipſae fractiones tam prope ad ſe inuicem accedunt, quam fieri poteſt.

22. Cum ſit ex §. 7. $(b,c)-1=c(b)$; $(b,c,d)-(b)=d(b,c)$; $(b,c,d,e)-(b,c)=e(b,c,d)$ etc. erit binis illarum differentiarum addendis

$$\frac{(a)}{1}-\frac{(a,b,c)}{(b,c)}=-\frac{c}{1(b,c)}$$
$$\frac{(a,b)}{(b)}-\frac{(a,b,c,d)}{(b,c,d)}=+\frac{d}{(b)(b,c,d)}$$
$$\frac{(a,b,c)}{(b,c)}-\frac{(a,b,c,d,e)}{(b,c,d,e)}=-\frac{e}{(b,c)(b,c,d,e)}$$
$$\frac{(a,b,c,d)}{(b,c,d)}-\frac{(a,b,c,d,e,f)}{(b,c,d,e,f)}=+\frac{f}{(b,c,d)(b,c,d,e,f)}$$

etc.

eritque hic $\frac{(a)}{1}=a$, et $\frac{(a,b)}{(b)}=a+\frac{1}{b}$; vnde reliquae formulae concinne poterunt exhiberi.

23. Ex formulis ergo §. 21. habebimus ſequentes fractionum continuarum valores:

$$\frac{(a)}{1}=a$$
$$\frac{(a,b)}{(b)}=a+\frac{1}{1(b)}$$
$$\frac{(a,b,c)}{(b,c)}=a+\frac{1}{1(b)}-\frac{1}{(b)(b,c)}$$
$$\frac{(a,b,c,d)}{(b,c,d)}=a+\frac{1}{1(b)}-\frac{1}{(b)(b,c)}+\frac{1}{(b,c)(b,c,d)}$$

etc.

vnde in genere erit, ſi etiam indices in infinitum excurrant,

$$\frac{(a,b,c,d,e,\text{etc.})}{(b,c,d,e,\text{etc.})}=a+\frac{1}{1(b)}-\frac{1}{(b)(b,c)}+\frac{1}{(b,c)(b,c,d)}-\frac{1}{(b,c,d)(b,c,d,e)}+\text{etc.}$$

24. Ex formulis autem §. 22. obtinebimus:

$$\frac{(a,b,c)}{(b,c)}=a+\frac{c}{1(b,c)}$$
$$\frac{(a,b,c,d,e)}{(b,c,d,e)}=a+\frac{c}{1(b,c)}+\frac{e}{(b,c)(b,c,d,e)}$$

vnde

vnde generaliter:

$$\frac{(a,b,c,d,e,etc.)}{(b,c,d,e,etc.)} = a + \frac{1}{1(b,c)} + \frac{e}{(b,c)(b,c,d,e)} + \frac{g}{(b,c,d,e)(b,c,d,e,f,g)} \text{ etc.}$$

Tum vero etiam:

$$\frac{(a,b,c,d)}{(b,c,d)} = a + \frac{1}{b} - \frac{d}{(b)(b,c,d)}$$

$$\frac{(a,b,c,d,e,f)}{(b,c,d,e,f)} = a + \frac{1}{b} - \frac{d}{(b)(b,c,d)} - \frac{f}{(b,c,d)(b,c,d,e,f)}$$

ideoque generaliter:

$$\frac{(a,b,c,d,e,etc.)}{(b,c,d,e\ etc.)} = a + \frac{1}{b} - \frac{d}{(b)(b,c,d)} - \frac{f}{(b,c,d)(b,c,d,e,f)} - \frac{h}{(b,c,d,e,f)(b,c,d,e,f,g,h)} - \text{etc.}$$

25. Sed miſſis his, quae ad ſeries ſpectant, quoniam ea iam fuſius ſum perſecutus, perpendamus ea, quae ad ſingularem harum quantitatum algorithmum pertinent. Et formulas quidem iis ſimiles, quae in §. 20. ſunt inuentae, ſuppeditabit nobis §. 22. ex quo patet eſſe:

$$(a)(b,c) - 1(a,b,c) = -c$$

$$(a,b)(b,c,d) - (b)(a,b,c,d) = +d$$

$$(a,b,c)(b,c,d,e) - (b,c)(a,b,c,d,e) = -e$$

$$(a,b,c,d)(b,c,d,e,f) - (b,c,d)(a,b,c,d,e,f) = +1$$

ideoque generaliter:

$$(a,b\ldots\ldots l)(b\ldots\ldots l,m,n) - (b\ldots\ldots l)(a,b\ldots\ldots l,m,n) = \pm n$$

vbi ſignum + valet, ſi in primo vinculo numerus indicum ſit par; contra ſignum −.

26. Per ſimiles autem reductiones intelligitur fore,

$$(a)(b,c,d) - 1(a,b,c,d) = -(c,d)$$

$$(a,b)(b,c,d,e) - (b)(a,b,c,d,e) = +(d,e)$$

$$(a,b,c)(b,c,d,e,f) - (b,c)(a,b,c,d,e,f) = -(e,f)$$

et

et generaliter:

$$(a,b\ldots\ldots k)(b\ldots\ldots k,l,m,n)-(b\ldots k)(a,b\ldots k,l,m,n)$$
$$=\pm(m,n)$$

vbi ſignorum, vel ſuperius, vel inferius, valet, prout in primo vinculo numerus indicum fuerit, vel par, vel impar.

27. Ratio autem huius formulae ex ſupra repertis facile deriuatur. Si enim ponatur:

$$(a.b\ldots k,l,m)(b..k,l,m,n)-(b..k,l,m)(a,b..k,l,m,n)=A$$
$$(a,b\ldots\ldots k,l)(b..k,l,m,n)-(b\ldots k,l)(a,b..k,l,m,n)=B$$
$$(a,b\ldots\ldots\ldots k)(b..k,l,m,n)-(b\ldots\ldots k)(a,b\,.k,l,m,n)=C$$

manifeſtum eſt, eſſe $A=mB+C$. At eſt $A=\pm 1$; et $B=\mp n$; ideoque $C=\pm 1\pm mn=\pm(m.n)$, vbi de ambiguitate ſignorum tenenda ſunt praecepta ſuperiora.

28 Si ordo indicum in his formulis inuertatur, eae fient:

$$(a\ldots\ldots y)(a,b\ldots y,z)-(a,b\ldots y,z)(a,b\ldots y)=0$$
$$(a,b\ldots y)(b,c\ldots\ldots y,z)-(a,b\ldots y.z)(b,c\ldots y)=\pm 1$$
$$(a,b.c\ldots y)(c,d\ldots y,z)-(a,b\ldots y,z)(c,d\,.\,y)=\pm(a)$$
$$(a,b.c\,d.\,y)(d,e\ldots y,z)-(a,b\ldots y,z)(d,e\ldots y)=\pm(a,b)$$
$$(a,b,c,d.e.y)(e,f\ldots y,z)-(a,b\ldots y,z)(e.f\ldots y)=\pm(a,b\,c)$$
$$(a,b\ldots y)(f.g\ldots y,z)-(a,b\ldots y,z)(f.g\,.y)=\pm(a,b,c,d)$$

vbi ſigna valent ſuperiora, ſi numerus indicum in ſecundo vinculo fuerit par, contra autem valent inferiora.

29. Si haec indicum ſeries in fine duobus truncetur, orietur ſimili modo:

$$(a\ldots x)(a\ldots z)-(a\ldots z)(a\,..\,x)=0$$
$$(a\ldots x(b\ldots z)-(a\ldots z)(b\,..\,x)=\pm(z)$$
$$(a\ldots x)(c\ldots z)-(a\ldots z)(c\,..\,x)=\pm(a)(z)$$
$$(a\ldots x)(d\ldots z)-(a\ldots z)(d\,..\,x)=\pm(a,b,)(z)$$
$$(a\ldots x)(e\ldots z)-(a\ldots z)(e\,..\,x)=\pm(a,b,c)(z)$$

atque hinc tandem colligitur fore generaliter:

$$(a\ldots\ldots l,m,n\ldots\ldots p)\ (n\ldots\ldots p,q,r\ldots\ldots z)$$
$$-(a\ldots l,m,n\ldots\ldots p,q,r\ldots\ldots z)\ (n\ldots\ldots p)$$
$$=\pm(a\ldots\ldots l)\,(r\ldots\ldots z).$$

30. Quo ratio ambiguitatis ſignorum pateat, notandum eſt, ſi ſit $m=a$, fore $(a\ldots\ldots l)=1$, et ſi ſit $q=z$, fore $(r\ldots\ldots z)=1$, vnde caſus ſpeciales, in quibus ratio ſignorum eſt cognita, erunt

$$(a)\,(b)-\ (a,b)\ 1=-1$$
$$(a)\,(b,c)-(a,b,c)\ 1=-(c)$$
$$(a,b)\,(c)\ -(a,b,c)\ 1=-(a)$$
$$(a,b)(b,c,d)-(a,b,c,d)(b)=+(d)$$
$$(a)\,(b,c,d)\ -(a,b,c,d)\ (1)=-(c,d)$$

vnde concluditur, valorem fore affirmatiuum, ſi in extremo quaternorum vinculorum numerus indicum ſit impar, ſin autem fuerit par, valor erit negatiuus. Ita in exemplis ſubiunctis erit

$$(a,b,c,d)(e,f,g,h)-(a,b,c,d,e,f,g,h)\ 1=-(a,b,c)(f,g,h)$$
$$(a,b,c,d,e)\,(c,d,e,f,g,h)-(a,b,c,d,e,f,g,h)\,(c,d,e)$$
$$=+(a)\,(g,h).$$

31. Hu-

31. Huiusmodi autem formulae, quot lubuerit, facile ſequenti modo exhiberi poſſunt; ſumatur tertium vinculum, quod eſt completum, et omnes indices continet, abſcindantur ab initio ſuperne ii indices, qui primum vinculum conſtituant, tum inferne a fine ii, qui vinculum ſecundum conſtituant; ita tamen, vt in duobus primis vinculis omnes indices occurrant. Tum qui locis abſciſſis vtrinque ſunt vicini puncto notentur, indeque facile huiusmodi formulae exhibentur:

vt $\overline{a,\ b,\ \underline{c,\ d,}}\ \underline{e,\ f,}$ dabit

$$(a,b,c,d)(c,d,e,f)-(a,b,c,d,e,f)(c,d)=-(a)(f)$$

vt $\overline{a,\ b,\ c,}\ \underline{d,\ e,\ f,}$ dat

$$(a,b,c)(d,e,f)-(a,b,c,d,e,f)\,1=-(a,b)(e,f)$$

vt $\overline{a,\ b,\ c,\ \underline{d,}}\ \underline{e,\ f}$ dat

$$(a,b,c,d)(d,e,f)-(a,b,c,d,e,f)(d)=+(a,b)(f).$$

32. Quodſi ergo in duobus vinculis nulla littera bis occurrat, quartum vinculum erit vnitas, vnde ſequentes formulae naſcuntur:

$$\begin{cases}(a,b,c)=(a,b)(c)+(a)\\(a,b,c)=(a)(b,c)+(c)\end{cases}$$

$$\begin{cases}(a,b,c,d)=(a,b,c)(d)+(a,b)\\(a,b,c,d)=(a,b)(c,d)+(a)(d)\\(a,b,c,d)=(a)(b,c,d)+(c,d)\end{cases}$$

$$\begin{cases}(a,b,c,d,e)=(a,b,c,d)(e)+(a,b,c)\\(a,b,c,d,e)=(a,b,c)(d,e)+(a,b)(e)\\(a,b,c,d,e)=(a,b)(c,d,e)+(a)(d,e)\\(a,b,c,d,e)=(a)(b,c,d,e)+(e,d,e)\end{cases}$$

$$\begin{cases}(a,b,c,d,e,f) = (a,b,c,d,e)(f) + (a,b,c,d)\\(a,b,c,d,e,f) = (a,b,c,d)(e,f) + (a,b,c)(f)\\(a,b,c,d,e,f) = (a,b,c)(d,e,f) + (a,b)(e,f)\\(a,b,c,d,e,f) = (a,b)(c,d,e,f) + (a)(d,e,f)\\(a,b,c,d,e,f) = (a)(b,c,d,e,f) + (c,d,e,f)\end{cases}$$

etc.

33. Si ordo indicum inuertatur, ſequentes formulae hinc facile elicientur:

$$(\alpha)(a,b,c,d\ldots) = (\alpha,a,b,c,d\ldots) - (b,c,d\ldots)$$

$$(\alpha,\beta)(a,b,c,d\ldots) = (\alpha,\beta,a,b,c,d\ldots) - (\alpha)(b,c,d\ldots)$$

$$(\alpha,\beta,\gamma)(a,b,c,d\ldots) = (\alpha,\beta,\gamma,a,b,c,d\ldots) - (\alpha,\beta)(b,c,d\ldots)$$

etc.

vnde producto ex duobus huius generis numeris ad eiusmodi numeros ſimplices reuocari poterunt:

$$(\alpha)(a,b,c,d\ldots) = (\alpha,a,b,c,d\ldots) - (b,c,d\ldots)$$

$$(\alpha,\beta)(a,b,c,d\ldots) = (\alpha,\beta,a,b,c,d\ldots) - (\alpha,b,c,d\ldots) + (c,d\ldots)$$

$$(\alpha,\beta,\gamma)(a,b,c,d\ldots) = \begin{cases}+(\alpha,\beta,\gamma,a,b,c,d\ldots)\\-(\alpha,\beta,b,c,d\ldots)\\+(\alpha,c,d\ldots)\\-(d\ldots)\end{cases}$$

$$(\alpha,\beta,\gamma,\delta)(a,b,c,d,e\ldots) = \begin{cases}+(\alpha,\beta,\gamma,\delta,a,b,c,d,e\ldots)\\-(\alpha,\beta,\gamma,b,c,d,e\ldots)\\+(\alpha,\beta,c,d,e\ldots)\\-(\alpha,d,e\ldots)\\+(e\ldots)\end{cases}$$

etc.

quia ergo in vtroque factore ordo indicum inuerti poteſt, hae formae pluribus modis variari poterunt.

34. Re-

34 Reuertamur autem ad fractiones continuas, vnde haec ſunt nata, ſitque valor huius

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e+\cfrac{1}{f+\text{etc.}}}}}} = S$$

atque ſupra iam inuenimus hos valores

$$A = \frac{(a)}{1}; \quad B = \frac{(a,b)}{(b)}; \quad C = \frac{(a,b,c)}{(b,c)}; \quad D = \frac{(a,b,c,d)}{(b,c,d)};$$

$$E = \frac{(a,b,c,d,e)}{(b,c,d,e)} \text{ etc.}$$

continuo propius ad valorem S accedere. Horum terminorum igitur ſingulas differentias perpendamus:

$$A-B = -\frac{1}{1(b)} \quad \Big| \quad B-C = +\frac{1}{(b)(b,c)} \quad \Big| \quad C-D = -\frac{1}{(b,c)(b,c,d)}$$

$$A-C = -\frac{(c)}{1(b,c)} \quad \Big| \quad B-D = +\frac{(d)}{(b)(b,c,d)} \quad \Big| \quad C-E = -\frac{(e)}{(b,c)(b,c,d,e)}$$

$$A-D = -\frac{(c,d)}{1(b,c,d)} \quad \Big| \quad B-E = +\frac{(d,e)}{(b)(b,c,d,e)} \quad \Big| \quad C-F = -\frac{(e,f)}{(b,c)(b,c,d,e,f)}$$

$$A-E = -\frac{(c,d,e)}{1(b,c,d,e)} \quad \Big| \quad B-F = +\frac{(d,e,f)}{(b)(b,c,d,e,f)} \quad \Big| \quad C-G = -\frac{(e,f,g)}{(b,c)(b,c,d,e,f,g)}.$$

35. Quoniam igitur in doctrina de fractionibus continuis, cuius iam aliquot ſpecimina edidi, huius generis numeri per indices formati totum negotium conficiunt: algorithmi eorum ſpecies, quam hic expoſui, nec non inſignes comparationes inuentae, non exiguum praeſtabunt vſum in hoc argumento vberius excolendo, vnde has animaduerſiones vſu non carituras eſſe confido.

DE RESOLVTIONE AEQVATIONVM CVIVSVIS GRADVS.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Quae in Algebra adhuc de reſolutione aequationum ſunt tradita, ea, ſi ad regulas generales ſpectemus, tantum ad aequationes, quae quartum gradum non ſuperant, patent, neque etiamnum regulae ſunt inuentae, quarum ope aequationes quinti altiorisue cuiuspiam gradus reſolui queant: ita vt vniuerſa Algebra ad aequationes quatuor primorum ordinum reſtringatur. Hoc autem de regulis generalibus eſt tenendum, quae ad omnes aequationes eiusdem gradus ſint accommodatae; nam in quouis gradu dantur infinitae aequationes, quae per diuiſionem in duas pluresue aequationes graduum inferiorum reſolui poſſunt, quarum idcirco radices iunctim ſumtae praebent omnes radices illarum aequationum altiorum graduum. Tum vero a Cel. *Moiuraeo* obſeruatae ſunt in quouis gradu quaedam aequationes ſpeciales, quae etſi per diuiſionem in factores reſolui nequeunt, tamen earum radices aſſignare liceat.

2. Ex cognita autem reſolutione generali aequationum primi, ſecundi, tertii et quarti gradus, conſtat

ſtat quidem, aequationes primi gradus ſine vlla radicis extractione reſolui poſſe: at aequationum ſecundi gradus reſolutio iam extractionem radicis quadratae poſtulat. Reſolutio autem aequationum tertii gradus tam extractionem radicis quadratae, quam cubicae, implicat, et quarti gradus reſolutio inſuper extractionem radicis biquadratae exigit. Ex his autem tuto concludere licet, reſolutionem aequationis quinti gradus generalem extractionem radicis ſurdeſolidae praeter omnes radices inferiores poſtulare, atque in genere radix aequationis cuiusuis gradus n exprimetur per formam, quae ex omnibus ſignis radicalibus, tam gradus n, quam graduum inferiorum, erit compoſita.

3. Haec perpendens olim in Comment. Acad. Imper. Petrop Tomi VI. coniecturam auſus ſum proferre circa formas radicum cuiuscunque aequationis. Propoſita namque aequatione gradus cuiusuis

$$x^n + Ax^{n-2} + Bx^{n-3} + Cx^{n-4} + \text{etc.} = 0.$$

in qua ſecundum terminum deeſſe aſſumſi, quod quidem ſemper ponere licet, ſuſpicatus ſum, ſemper dari aequationem vno gradu inferioris, veluti

$$y^{n-1} + \mathfrak{A}y^{n-2} + \mathfrak{C}y^{n-3} + \mathfrak{B}y^{n-4} + \text{etc.} = 0$$

quam illius reſoluentem appellaui, ita vt, ſi huius conſtent omnes radices, quae ſint α, β, γ, δ, ε etc. quarum numerus eſt $n-1$; ex iis radix illius aequationis ita exprimatur, vt ſit:

$$x = \sqrt[n]{\alpha} + \sqrt[n]{\beta} + \sqrt[n]{\gamma} + \sqrt[n]{\delta} + \text{etc.}$$

Quam

Quam coniecturam confirmaui, oſtendens, reſolutionem aequationum inferiorum reuera ex hac forma generali deduci: neque etiam nunc dubito, quin haec coniectura veritati ſit conſentanea.

4. Praeterquam autem quod inuentio aequationis reſoluentis, ſi propoſita quartum gradum tranſcendit, fit difficillima, atque adeo in genere vires noſtras aeque ſuperare videtur, atque ipſa propoſitae aequationis reſolutio; ita vt praeter formas ſpeciales caſibus Moivreanis ſimiles nobis nihil admodum ſuppeditet: alia inſuper incommoda in illa forma obſeruaui, quae me eo induxerunt, vt arbitrarer, aliam forte dari formam illi non admodum diſſimilem, quae iſtis incommodis non eſſet ſubiecta, ideoque maiorem ſpem nobis faceret, in hoc arduo Algebrae opere tandem vlterius penetrandi Non parum autem in hoc negotio proderit, veram formam radicum cuiusque aequationis accuratius perſpexiſſe.

5. In forma autem per ſuperiorem coniecturam eruta hoc imprimis deſidero, quod omnes aequationis propoſitae radices non ſatis diſtincte exprimantur. Etſi enim quoduis ſignum radicale $\sqrt[n]{\alpha}$ tot valores diuerſos complectitur, quot numerus n continet vnitates, ita vt, ſi $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$ etc. omnes valores formulae $\sqrt[n]{1}$ denotent, pro $\sqrt[n]{\alpha}$ ſcribere liceat quamlibet harum formularum $\mathfrak{a}\sqrt[n]{\alpha}, \mathfrak{b}\sqrt[n]{\alpha}, \mathfrak{c}\sqrt[n]{\alpha}, \mathfrak{d}\sqrt[n]{\alpha}$ etc. tamen manife-

ſtum

ſtum, hanc variationem in ſingulis terminis $\sqrt[n]{\alpha}$, $\sqrt[n]{\beta}$, $\sqrt[n]{\gamma}$, $\sqrt[n]{\delta}$ etc. non pro lubitu conſtitui poſſe. Si enim combinatio horum terminorum cum litteris 𝔞, 𝔟, 𝔠, 𝔡, 𝔢 etc. arbitrio noſtro relinqueretur, tum multo plures combinationes reſultarent, quam aequatio continet radices, quarum numerus eſt $= n$.

6. Quo igitur forma radicis x ſupra exhibita omnes aequationis radices ſimul complectatur, neceſſe eſt, vt combinationes terminorum $\sqrt[n]{\alpha}, \sqrt[n]{\beta}, \sqrt[n]{\gamma}, \sqrt[n]{\delta}$ etc. cum litteris 𝔞, 𝔟, 𝔠, 𝔡 etc. certo quodam modo circumſcribantur, atque combinationes, quae ad aequationes radices repraeſentandas ſunt ineptae, excludantur. Ex reſolutione quidem aequationum tertii et quarti gradus vidimus inter radices vnitatis eiusdem nominis 𝔞, 𝔟, 𝔠, 𝔡, certum quendam ordinem conſtitui debere, ſecundum quem etiam combinationes ſint perficiendae. Hunc in finem autem ſimilis ordo in ipſis radicis membris $\sqrt[n]{\alpha}$, $\sqrt[n]{\beta}$, $\sqrt[n]{\gamma}$, $\sqrt[n]{\delta}$ etc. erit tenendus, quo combinatio dirigatur. Verum quia non conſtat quemadmodum in radicibus ſuperiorum graduum talis ordo ſit conſtituendus, hoc ſine dubio inſigne eſt incommodum, quo forma coniecturae meae innixa laborat, quod igitur remouere in hac diſſertatione mihi eſt propoſitum.

7. Primum autem conueniet, ordinem certum in radicibus cuiusuis poteſtatis ex vnitate conſtituere, quo ſumma plerumque varietas combinationum reſtringatur.

 Quem

Quem in finem obſeruo, ſi praeter vnitatem alius quicunque valor ipſius $\sqrt[n]{1}$ ſit $= \mathfrak{a}$, tum etiam $\mathfrak{a}^2, \mathfrak{a}^3, \mathfrak{a}^4$, etc idoneos valores ipſius $\sqrt[n]{1}$ exhibere: nam ſi ſit $\mathfrak{a}^n = 1$, erit quoque $(\mathfrak{a}^2)^n = 1$, $(\mathfrak{a}^3)^n = 1$, $(\mathfrak{a}^4)^n = 1$, etc. Hinc ſi reliquae radices ponantur $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, etc. quoniam in iis reperiuntur $\mathfrak{a}^2, \mathfrak{a}^3, \mathfrak{a}^4$, etc. iam certus quidam ordo perſpicitur, quo hae litterae inter ſe diſponi debent. Ita ſi poſt vnitatem, quae ſemper primum locum tenere cenſenda eſt, a littera $\mathfrak{a}$ incipiamus, valores formulae $\sqrt[n]{1}$ erunt $1, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^2, \mathfrak{a}^3, \mathfrak{a}^4 \ldots\ldots \mathfrak{a}^{n-1}$ quorum numerus eſt n; plures enim occurrere nequevnt, cum ſit $\mathfrak{a}^n = 1$, $\mathfrak{a}^{n+1} = \mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}^{n+2} = \mathfrak{a}^2$ etc. ſimilique modo res ſe habebit, ſi poſt vnitatem a quauis alia littera $\mathfrak{b}$, vel $\mathfrak{c}$, vel $\mathfrak{d}$ etc. incipiamus.

8. Hinc ergo merito ſuſpicor, talem quoque ordinem in ipſis terminis radicem aequationis x exprimentibus ineſſe; ſeu ſingula membra radicalia ita eſſe comparata, vt reſpectu vniuscuiusque reliquae ſint eius poteſtates: ſingulis autem membris nunc neceſſe erit, coefficientes indefinitos tribuere. Quare ſi aequatio, termino ſecundo deſtituta, fuerit:

$$x^n + Ax^{n-2} + Bx^{n-3} + Cx^{n-4} + Dx^{n-5} \ldots = 0$$

maxime probabile videtur radicem quamlibet huius aequationis ita exprimi, vt ſit:

$$x = \mathfrak{A}\sqrt[n]{v} + \mathfrak{B}\sqrt[n]{v^2} + \mathfrak{C}\sqrt[n]{v^3} + \mathfrak{D}\sqrt[n]{v^4} + \ldots\ldots + \mathfrak{O}\sqrt[n]{v^{n-1}}$$

vbi $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ etc. ſint quantitates, vel rationales, vel ſaltem non ſignum radicale $\sqrt[n]{}$ inuoluant, quippe

pe quod tantum quantitatem v eiusque poteſtates afficiat, multo minus ipſa quantitas v tale ſignam inuoluat.

9 Ex hac forma primum patet, eam non plura membra, quam quorum numerus ſit $n-1$, continere poſſe: nam etiam ſi ſeriem illam ex ſua indole vlterius continuemus, termini ſequentes iam in praecedentibus contenti deprehendentur: erit enim $\sqrt[n]{v^{n+1}} = v\sqrt[n]{v}$; $\sqrt[n]{v^{n+2}} = v\sqrt[n]{v^2}$ etc. ita vt irrationalitas ſignum radicale $\sqrt[n]{}$ inuoluens, plures diuerſas ſpecies non admittat, quam quarum numerus eſt $= n-1$. Etiamſi ergo illa ſeries in infinitum continuetur, tamen terminos eiusdem ſpeciei ratione irrationalitatis addendo omnes ad terminos numero $n-1$ redigentur. Cum igitur iam ante viderimus, plures termines in radicis expreſſionem non ingredi; hinc non leue argumentum habetur, hanc nouam formam veritati plane eſſe conſentaneam: eius autem veritas per ſequentia argumenta multo magis confirmabitur.

10. Haec expreſſio quoque ſponte ſe extendit ad aequationes, in quibus ſecundus terminus non deeſt, dum ſuperior remotionem ſecundi termini exigebat, ex quo ipſo haec noua magis naturalis eſt aeſtimanda. Continuatio enim terminorum irrationalium $\sqrt[n]{v}$, $\sqrt[n]{v^2}$, $\sqrt[n]{v^3}$ etc. etiam terminos rationales $\sqrt[n]{v^0}$, $\sqrt[n]{v^n}$ inuoluit, qui ob aequationis terminum ſecundum adiici debent. Hinc generalius pronunciare poterimus, ſi aequatio completa ordinis cuiusque n fuerit propoſita:

$$x^n + \Delta x^{n-1} + A x^{n-2} + B x^{n-3} + C x^{n-4} + \text{etc.} = 0$$

eius radicem exprimi huiusmodi forma:

$$x = \omega + \mathfrak{A}\sqrt[n]{v} + \mathfrak{B}\sqrt[n]{v^2} + \mathfrak{C}\sqrt[n]{v^3} + \mathfrak{D}\sqrt[n]{v^4} \ldots\ldots + \mathfrak{O}\sqrt[n]{v^{n-1}}$$

vbi ω partem radicis rationalem exhibet, quam conſtat eſſe $= -\frac{1}{n}\Delta$. Reliqui autem termini continent partes irrationales radicem poteſtatis n inuoluentes, quarum, quatenus ſunt diuerſae, numerus excedere nequit $n-1$, omnino vti per formam ſuperiorem intelligitur.

11. Hinc porro videmus, ſi v fuerit eiusmodi quantitas, vt ex ea radix poteſtatis n actu extrahi, ſeu $\sqrt[n]{v}$ vel rationaliter, vel per ſigna radicalia inferiorum poteſtatum exprimi queat, tum irrationalitatem gradus n prorſus ex forma radicis egredi. Hoc autem neceſſario vſu venire debet, quoties aequatio propoſita in factores eſt reſolubilis, tum enim nulla radix ſignum radicale $\sqrt[n]{}$ continebit. Quare cum natura rei poſtulet, vt his caſibus omnia ſigna radicalia $\sqrt[n]{}$ euaneſcant, et ad ſigna ſimpliciora reducantur: ex forma autem ſuperiori non pateat, quomodo euaneſcente vno huiusmodi ſigno $\sqrt[n]{\alpha}$ reliqua $\sqrt[n]{\beta}$, $\sqrt[n]{\gamma}$, etc. euaneſcant, iſta expreſſio ob hanc rationem multo magis ad aequationum naturam accommodata eſt cenſenda.

12. Praeterea vero haec forma, in quo cardo totius negotii verſatur, etiam omnes aequationis radices ſine vlla ambiguitate oſtendit: neque enim amplius haeremus, quomodo cum omnibus ſignis radicalibus $\sqrt[n]{}$ totidem valores radicis $\sqrt[n]{1}$ combinandi ſint. Si enim

omnes

omnes radices poteſtatis n ex vnitate ſint $1, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$, etc. ac $\sqrt[n]{v}$ cum earum quacunque $\mathfrak{a}$ combinauerimus, propterea quod $\sqrt[n]{v}$ vtique eſt $\mathfrak{a}\sqrt[n]{v}$, tum pro $\sqrt[n]{v^2}$, $\sqrt[n]{v^3}$, $\sqrt[n]{v^4}$ etc. ſcribere oportebit $\mathfrak{a}^2\sqrt[n]{v^2}$, $\mathfrak{a}^3\sqrt[n]{v^3}$, $\mathfrak{a}^4\sqrt[n]{v^4}$, etc. Terminus autem conſtans ω, quia formam $\omega\sqrt[n]{v^0}$ repraeſentat, abibit in $\mathfrak{a}^0\omega\sqrt[n]{v^0} = 1$ ob $\mathfrak{a}^0 = 1$, ideoque in omnibus radicibus nullam mutationem ſubit, quemadmodum reliqua membra. Quod cum ex reſolutione omnium aequationum per ſe ſit manifeſtum, hinc nouum ac ſatis luculentum habemus criterium veritatis huius nouae formae, quae omnium aequationum radices in ſe complecti videtur.

13. Hinc autem porro manifeſtum eſt, quomodo vna cuiusque aequationis radice cognita, reliquae radices omnes exhiberi queant: ad hoc tantum noſſe oportet omnes radices eiusdem poteſtatis ex vnitate, ſeu omnes valores ipſius $\sqrt[n]{1}$, quorum numerus $= n$. Ac ſi iſtae vnitatis radices fuerint $1, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$, etc. aequationisque vna radix inuenta ſit

$$x = \omega + \mathfrak{A}\sqrt[n]{v} + \mathfrak{B}\sqrt[n]{v^2} + \mathfrak{C}\sqrt[n]{v^3} + \dots \mathfrak{D}\sqrt[n]{v^{n-1}}$$

radices reliquae erunt:

$$x = \omega + \mathfrak{A}\mathfrak{a}\sqrt[n]{v} + \mathfrak{B}\mathfrak{a}^2\sqrt[n]{v^2} + \mathfrak{C}\mathfrak{a}^3\sqrt[n]{v^3} + \dots \mathfrak{D}\mathfrak{a}^{n-1}\sqrt[n]{v^{n-1}}$$

$$x = \omega + \mathfrak{A}\mathfrak{b}\sqrt[n]{v} + \mathfrak{B}\mathfrak{b}^2\sqrt[n]{v^2} + \mathfrak{C}\mathfrak{b}^3\sqrt[n]{v^3} + \dots \mathfrak{D}\mathfrak{b}^{n-1}\sqrt[n]{v^{n-1}}$$

$$x = \omega + \mathfrak{A}\mathfrak{c}\sqrt[n]{v} + \mathfrak{B}\mathfrak{c}^2\sqrt[n]{v^2} + \mathfrak{C}\mathfrak{c}^3\sqrt[n]{v^3} + \dots \mathfrak{D}\mathfrak{c}^{n-1}\sqrt[n]{v^{n-1}}$$

ſicque ſemper tot obtinentur radices, quot exponens n, qui aequationis gradum deſignat, continet vnitates.

14. His igitur argumentis noua haec radicum forma iam ad ſummum probabilitatis eſt euecta; atque ad plenam certitudinem oſtendendam nihil aliud requiritur, niſi vt regula inueniatur, cuius ope pro quauis aequatione propoſita iſta forma definiri, et coefficientes $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ etc. cum quantitate v aſſignari queant, quod ſi praeſtare poſſemus, haberemus ſine dubio generalem omnium aequationum reſolutionem, irrito adhuc omnium Geometrarum labore requiſitam. Neque igitur equidem tantum mihi tribuo, vt hanc regulam me inuenire poſſe credam; ſed contentus ero plene demonſtraſſe, omnium aequationum radices certo in hac forma eſſe contentas. Hoc autem ſine dubio plurimum luminis foenerabitur ad reſolutionem aequationum, cum cognita radicum vera forma via inueſtigationis non mediocriter facilior reddatur, quam ne ingredi quidem licet, quam diu forma radicum fuerit incognita.

15. Quanquam autem ex ipſa aequatione propoſita nobis adhuc non licet radicem eius, ſeu coefficientes $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ etc. cum quantitate v aſſignare, tamen demonſtratio veritatis aeque ſuccedet, ſi viciſſim ex aſſumta radice illam aequationem, cuius eſt radix, eliciamus. Haec autem aequatio libera eſſe debet a ſignis radicalibus $\sqrt[n]{}$, quoniam aequationes, quarum radices inveſtigantur, ex terminis rationalibus conſtare aſſumi ſolent.

lent. Quaeſtio ergo huc reducitur, vt huiusmodi aequatio

$$x = \omega + \mathfrak{A}\sqrt[n]{v} + \mathfrak{B}\sqrt[n]{v^2} + \mathfrak{C}\sqrt[n]{v^3} + \ldots\ldots + \mathfrak{D}\sqrt[n]{v^{n-1}}$$

ab irrationalitate, ſeu ſignis radicalibus $\sqrt[n]{}$, liberetur, atque aequatio rationalis inde deducatur, de qua deinceps certo affirmare poterimus, eius radicem eſſe ipſam expreſſionem aſſumtam; ſimulque inde reliquas radices, quae eidem aequationi aeque conueniunt, aſſignare valebimus. Hoc ergo modo ſaltem infinitas aequationes exhibere poterimus, quarum radices nobis erunt cognitae, atque ſi hae aequationes in ſe complectantur omnium graduum aequationes generales, etiam harum reſolutio in noſtra erit poteſtate.

16. Parum quidem a nobis praeſtitum iri videbitur, ſi tantum plures aequationes, quarum radices asſignari queant, exhibuerimus; cum ex primis elementis conſtet, quomodo cuiusuis gradus aequatio formari debeat, quae datas habeat radices: ſi enim quotcunque huiusmodi formulae $x-a$, $x-b$, $x-c$, etc. in ſe inuicem multiplicentur, obtinebitur vtique aequatio, cuius radices futurae ſunt $x=a$, $x=b$, $x=c$, etc. ſed talis aequationis formatio parum lucri affert ad reſolutionem aequationum. Primum autem obſeruo, hoc modo alias aequationes non naſci, niſi quae ſint habiturae factores; aequationum autem, quae in factores reſolui poſſunt, reſolutio, nulla laborat difficultate. Haud maioris quoque momenti ſunt in hoc negotio aequationes, quae ex multiplicatione duarum pluriumue inferiorum aequationum producuntur, quarum reſolutio nihil plane prodeſt ad reſolutionem generalem perficiendam.

17.

17. Quodſi autem ex noſtra forma $x = \omega + \mathfrak{A}\sqrt[n]{v} + \mathfrak{B}\sqrt[n]{v^2} +$ etc. ad aequationem rationalem perueniamus, ea certo factores rationales non habebit: ſi enim haberet, eius radices, quae ſimul eſſent radices aequationum inferiorum graduum, ſignum radicale $\sqrt[n]{}$ non implicarent. Plurimum is praeſtare cenſendus eſt, qui aequationis cuiuspiam altioris gradus, quae in factores reſolui nequeat, radices aſſignauerit: quam ob rem etiam Cel. *Moivreo* ingentes debentur gratiae, quod ex ſingulis aequationum gradibus vnam exhibuerit in factores irreſolubilem, cuius radices aſſignari poſſunt; atque ſi eius formulae latius paterent, multo maiorem ſine dubio eſſent habiturae vtilitatem, dum contra aequationibus in factores reſolubilibus in hoc negotio nihil plane emolumenti attribui poteſt.

18. Verum reuertamur ad illam formam ab irrationalitate ſigni $\sqrt[n]{}$ liberandam, ac ſi conſuetas methodos ſigna radicalia eliminandi conſulamus, aequatio reſultans ad plurimas dimenſiones plerumque aſcendere videatur. Si enim vnicum adeſſet ſignum radicale, puta $x = \omega + \mathfrak{A}\sqrt[n]{v}$, aequatio rationalis ad n dimenſiones ipſius x aſcenderet, vnde ea ad multo plures dimenſiones aſcenſura videtur, ſi plura eiusmodi adſint ſigna radicalia; id quod ſine dubio euenire deberet, ſi illa ſigna radicalia a ſe inuicem prorſus non penderent. Sed quia omnia ſunt poteſtates primi, oſtendam, perfectam rationalitatem obtineri poſſe, non vltra poteſtatem exponentis n aſcendendo. Ita ſcilicet docebo formam

$x =$

$$x = \omega + \mathfrak{A}\sqrt[n]{v} + \mathfrak{B}\sqrt[n]{v^2} + \mathfrak{C}\sqrt[n]{v^3} + \ldots + \mathfrak{D}\sqrt[n]{v^{n-1}}$$

ita ab irrationalitate liberari poſſe, vt aequatio rationalis inde reſultans poteſtatem x^n non ſuperet. Prodibit ergo aequatio huius formae:

$$x^n + \Delta x^{n-1} + A x^{n-2} + B x^{n-3} + \text{etc.} = 0$$

cuius radix erit illa forma aſſumta: et quia radicum huius aequationis numerus eſt $= n$, ex eadem forma omnes huius aequationis radices aſſignare poterimus.

19. Cum hoc iam ſit eximium criterium veritatis huius formae, tum etiam annotaſſe iuuabit, quoniam forma radicis $n-1$ quantitates arbitrarias continet, totidem quoque quantitates arbitrarias in aequationem rationalem ingredi, vnde perſpicuum eſt, iſtas quantitates ita determinari poſſe, vt aequatio rationalis inde datos coefficientes Δ, A, B, C etc. obtineat, hoc eſt; vt aequatio generalis huius gradus obtineatur. Quae determinatio ſi actu inſtitui queat, nanciſcemur inde reſolutionem generalem aequationum cuiuscunque gradus; ex quo ſaltem poſſibilitas reſolutionis hoc modo perficiendae elucet. Difficultates quidem inſignes in hoc negotio occurrent, quas eo clarius agnoſcemus, ſi noſtram formam ad quemuis gradum a ſimpliciſſimis incipiendo, accommodemus. Simplicitati autem et concinnitati calculi conſulentes, partem radicis rationalem ω omittamus, vt in quouis gradu ad eiusmodi aequationes rationales pertingamus, in quibus ſecundus terminus deſit, quo ipſo amplitudo reſolutionis non reſtringi eſt cenſenda.

I. Reſolutio aequationum ſecundi gradus.

20. Vt igitur ab aequationibus ſecundi gradus incipiamus, ſit $n=2$, et poſito $\omega=0$, forma noſtra radicis erit:

$$x=\mathfrak{A}\sqrt{v}$$

quae rationalis facta dat $xx=\mathfrak{A}\mathfrak{A}v$. Comparetur haec aequatio cum forma generali ſecundi gradus $xx=A$, deficiente ſecundo termino, ſitque $\mathfrak{A}\mathfrak{A}v=A$: cui vt ſatisfiat, ſtatuatur $\mathfrak{A}=1$, eritque $v=A$; vnde propoſita aequatione $xx=A$, ſi ſumatur $\mathfrak{A}=1$, et $v=A$, eius radix vna erit $x=\mathfrak{A}\sqrt{v}=\sqrt{A}$, et quia $\sqrt{1}$ duos habet valores 1 et -1, altera radix erit $x=-\mathfrak{A}\sqrt{v}=-\sqrt{A}$: quod quidem per ſe eſt perſpicuum.

II. Reſolutio aequationum tertii gradus.

21. Poſito iam $n=3$, forma radicis pro hoc caſu erit:

$$x=\mathfrak{A}\sqrt[3]{v}+\mathfrak{B}\sqrt[3]{v^2}$$

vnde vt aequatio rationalis eruatur, ſumatur primo cubus:

$$x^3=\mathfrak{A}^3v+3\mathfrak{A}\mathfrak{A}\mathfrak{B}v\sqrt[3]{v}+3\mathfrak{A}\mathfrak{A}\mathfrak{B}v\sqrt[3]{v^2}+\mathfrak{B}^3v^2$$

Fingatur iam haec aequatio cubica:

$$x^3=Ax+B$$

vnde

vnde, pro x valorem aſſumtum ſubſtituendo, orietur quoque

$$x^3 = A\mathfrak{A}\sqrt[3]{v} + A\mathfrak{B}\sqrt[3]{v^2} + B$$

quae forma illi aequalis eſt reddenda, aequandis inter ſe tam partibus rationalibus, quam irrationalibus, vtriusque ſpeciei $\sqrt[3]{v}$ et $\sqrt[3]{v^2}$.

22. Comparatio autem terminorum rationalium praebet:

$$B = \mathfrak{A}^3 v + \mathfrak{B}^3 v^2$$

et ex collatione irrationalium fit:

$$A\mathfrak{A} = 3\mathfrak{A}\mathfrak{A}\mathfrak{B}v \text{ et } A\mathfrak{B} = 3\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{B}v$$

quarum vtraque dat $A = 3\mathfrak{A}\mathfrak{B}v$.

Hinc ſi iſta aequatio cubica fuerit propoſita:

$$x^3 = 3\mathfrak{A}\mathfrak{B}vx + \mathfrak{A}^3 v^2 + \mathfrak{B}^3 v^3$$

eius radix vna erit:

$$x = \mathfrak{A}\sqrt[3]{v} + \mathfrak{B}\sqrt[3]{v^2}$$

et ſi 1, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ ſint tres radices cubicae vnitatis, duae reliquae radices erunt:

$$x = \mathfrak{A}\mathfrak{a}\sqrt[3]{v} + \mathfrak{B}\mathfrak{a}^2\sqrt[3]{v^2};\ x = \mathfrak{A}\mathfrak{b}\sqrt[3]{v} + \mathfrak{B}\mathfrak{b}^2\sqrt[3]{v^2}$$

eſt autem $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}^2 = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ et $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}^2 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$

23. Poſſunt autem viciſſim, ſi aequatio cubica proponatur

$$x^3 = Ax + B$$

ex coefficientibus A et B quantitates $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ et v determinari, vt inde omnes tres huius aequationis radices obtineantur. Hunc autem in finem, quia tantum duae aequationes adimplendae habentur, vna litterarum

$\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ pro lubitu aſſumi poteſt. Sit igitur $\mathfrak{A}=1$, et aequatio $A=3\mathfrak{A}\mathfrak{B}v=3\mathfrak{B}v$ praebet $\mathfrak{B}=\frac{A}{3v}$; vnde fit $\mathfrak{B}^3=\frac{A^3}{27v^3}$ qui valor in prima aquatione $B=v+\mathfrak{B}^3v^2$ ſubſtitutus dat:

$$B=v+\frac{A^3}{27v} \text{ ſeu } vv=Bv-\tfrac{1}{27}A^3$$

vnde fit $v=\frac{1}{2}B\pm\sqrt{(\frac{1}{4}BB-\frac{1}{27}A^3)}$: perinde autem eſt vter horum duorum valorum aſſumatur.

24. Inuento autem valore ipſius $v=\frac{1}{2}B\pm\sqrt{(\frac{1}{4}BB-\frac{1}{27}A^3)}$ erit $\mathfrak{B}=\frac{A}{3v}$ et $\mathfrak{B}\sqrt[3]{v^2}=\frac{A}{3\sqrt[3]{v}}$ hincque tres aequationes propoſitae:

$$x^3=Ax+B$$

erunt radices:

$$\text{I. } x=\sqrt[3]{v}+\frac{A}{3\sqrt[3]{v}}:\ \text{II. } x=\mathfrak{a}\sqrt[3]{v}+\frac{\mathfrak{b}A}{3\sqrt[3]{v}}:\ \text{III. } x=\mathfrak{b}\sqrt[3]{v}+\frac{\mathfrak{a}A}{3\sqrt[3]{v}}$$

Cum autem ſit $\frac{1}{v}=\frac{\frac{1}{2}B\mp\sqrt{(\frac{1}{4}BB-\frac{1}{27}A^3)}}{\frac{1}{27}A^3}$ erit

$$\sqrt[3]{v}=\sqrt[3]{(\tfrac{1}{2}B\pm\sqrt{(\tfrac{1}{4}BB-\tfrac{1}{27}A^3)})} \text{ et}$$

$$\frac{A}{3\sqrt[3]{v}}=\sqrt[3]{(\tfrac{1}{2}B\mp\sqrt{(\tfrac{1}{4}BB-\tfrac{1}{27}A^3)})}$$

hincque naſcuntur formulae vulgares pro reſolutione aequationum cubicarum.

III. Reſolutio aequationum quarti gradus.

25. Poſito $n=4$, conſideremus hanc radicis formam:

$$x=\mathfrak{A}\sqrt[4]{v}+\mathfrak{B}\sqrt[4]{v^2}+\mathfrak{C}\sqrt[4]{v^3}$$

et

et quaeramus aequationem quarti gradus, cuius haec forma ſit radix. Atque hoc quidem caſu calculus facile inſtituitur, quo irrationalitates tolluntur; nam ob $\sqrt[4]{v^2} = \sqrt{v}$, ſumatur haec aequatio:

$$x - \mathfrak{B}\sqrt{v} = \mathfrak{A}\sqrt[4]{v} + \mathfrak{C}\sqrt[4]{v^3}$$

quae quadrata dat:

$$xx - 2\mathfrak{B}x\sqrt{v} + \mathfrak{B}\mathfrak{B}v = \mathfrak{A}\mathfrak{A}\sqrt{v} + 2\mathfrak{A}\mathfrak{C}v + \mathfrak{C}\mathfrak{C}v\sqrt{v}$$

quae partibus irrationalibus ad eandem partem translatis fit:

$$xx + (\mathfrak{B}\mathfrak{B} - 2\mathfrak{A}\mathfrak{C})v = 2\mathfrak{B}x\sqrt{v} + (\mathfrak{A}\mathfrak{A} + \mathfrak{C}\mathfrak{C}v)\sqrt{v}$$

et ſumtis denuo quadratis prodibit haec aequatio rationalis:

$$x^4 + 2(\mathfrak{B}\mathfrak{B} - 2\mathfrak{A}\mathfrak{C})vxx + (\mathfrak{B}\mathfrak{B} - 2\mathfrak{A}\mathfrak{C})^2vv = 4\mathfrak{B}\mathfrak{B}vxx + 4(\mathfrak{A}\mathfrak{A} + \mathfrak{C}\mathfrak{C}v)\mathfrak{B}vx + (\mathfrak{A}\mathfrak{A} + \mathfrak{C}\mathfrak{C}v)^2v$$

quae ordinata abit in hanc formam;

$$x^4 = 2(\mathfrak{B}\mathfrak{B} + 2\mathfrak{A}\mathfrak{C})vxx + 4(\mathfrak{A}\mathfrak{A} + \mathfrak{C}\mathfrak{C}v)\mathfrak{B}vx + \mathfrak{A}^4v - \mathfrak{B}^4vv + \mathfrak{C}^4v^3 + 4\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{B}\mathfrak{C}vv - \mathfrak{A}\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{C}vv$$

26. Huius igitur aequationis biquadraticae radix vna eſt:

$$x = \mathfrak{A}\sqrt[4]{v} + \mathfrak{B}\sqrt[4]{v^2} + \mathfrak{C}\sqrt[4]{v^3}$$

ac ſi radices biquadratae vnitatis ponantur 1, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, ita vt ſit:

$$\mathfrak{a} = +\sqrt{-1}; \quad \mathfrak{b} = -1; \quad \text{et} \quad \mathfrak{c} = -\sqrt{-1}$$

erit
$$\mathfrak{a}^2 = -1 = \mathfrak{b}; \qquad \mathfrak{a}^3 = -\sqrt{-1} = \mathfrak{c};$$
$$\mathfrak{b}^2 = +1; \qquad \mathfrak{b}^3 = -1 = \mathfrak{b};$$
$$\mathfrak{c}^2 = -1 = \mathfrak{b}; \qquad \mathfrak{c}^3 = +\sqrt{-1} = \mathfrak{a};$$

vnde tres reliquae radices eiusdem aequationis erunt:

$$x = \mathfrak{A}\mathfrak{a}\sqrt[4]{v} + \mathfrak{B}\mathfrak{b}\sqrt[4]{v^2} + \mathfrak{C}\mathfrak{c}\sqrt[4]{v^3}$$

$$x = \mathfrak{A}\mathfrak{b}\sqrt[4]{v} + \mathfrak{B}\sqrt[4]{v^2} + \mathfrak{C}\mathfrak{b}\sqrt[4]{v^3}$$

$$x = \mathfrak{A}\mathfrak{c}\sqrt[4]{v} + \mathfrak{B}\mathfrak{b}\sqrt[4]{v^2} + \mathfrak{C}\mathfrak{a}\sqrt[4]{v^3}$$

27. Hinc autem viciſſim aequatio biquadrata quaecunque ad illam formam reduci, eiusque radices aſſignari poterunt. Sit enim propoſita haec aequatio:

$$x^4 = Axx + Bx + C$$

et quaeri opportet valores coefficientium $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ cum quantitate v, quibus inuentis ſimul huius aequationis radices innoteſcent. Erit autem:

$A = 2(\mathfrak{B}\mathfrak{B} + 2\mathfrak{A}\mathfrak{C})v$; $\quad B = 4(\mathfrak{A}\mathfrak{A} + \mathfrak{C}\mathfrak{C}v)\mathfrak{B}v$

$C = \mathfrak{A}^4 v \;\; \mathfrak{B}^4 vv + \mathfrak{C}^4 v^3 + 4\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{B}\mathfrak{C}vv - 2\mathfrak{A}\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{C}vv$ ſeu

$C = (\mathfrak{A}\mathfrak{A} + \mathfrak{C}\mathfrak{C}v)^2 v - (\mathfrak{B}\mathfrak{B} + 2\mathfrak{A}\mathfrak{C})^2 vv + 8\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{B}\mathfrak{C}vv$

Illinc autem eſt $(\mathfrak{B}\mathfrak{B} + 2\mathfrak{A}\mathfrak{C})v = \frac{1}{2}A$; et $\mathfrak{A}\mathfrak{A} + \mathfrak{C}\mathfrak{C}v = \frac{B}{4\mathfrak{B}v}$; qui valores hic ſubſtituti dant:

$C = \frac{BB}{16\mathfrak{B}\mathfrak{B}v} - \frac{1}{4}AA + 8\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{B}\mathfrak{C}vv$

Prima autem formula praebet $4\mathfrak{A}\mathfrak{C}v = A - 2\mathfrak{B}\mathfrak{B}v$, qui valor denuo ſubſtitutus dat:

$C = \frac{BB}{16\mathfrak{B}\mathfrak{B}v} - \frac{1}{4}AA + 2A\mathfrak{B}\mathfrak{B}v - 4\mathfrak{B}^4 vv$

ita vt iam duae litterae $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{C}$ ſint eliminatae.

28. Quia hic adhuc duae incognitae $\mathfrak{B}$ et v ſuperſunt, valor ipſius $\mathfrak{B}$ arbitrio noſtro relinquitur. Sit igitur $\mathfrak{B} = 1$, et quantitas v ex ſequenti aequatione cubica determinari debebit:

$$v^3 - \tfrac{1}{2}Av^2 + \tfrac{1}{4}(C + \tfrac{1}{4}AA)v - \tfrac{1}{64}BB = 0$$

In-

Inuenta antem hinc radice v, ex prioribus aequationibus quaeri debent litterae $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{C}$. Cum igitur ſit:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A} + \mathfrak{C}\mathfrak{C}v = \frac{B}{4v} \text{ et } 2\mathfrak{A}\mathfrak{C}\sqrt{v} = \frac{A-2v}{2\sqrt{v}}$$

erit tam addendo, quam ſubtrahendo, et radicem quadratam extrahendo

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{C}\sqrt{v} = \sqrt{\left(\frac{B}{4v} + \frac{A}{2\sqrt{v}} - \sqrt{v}\right)} \text{ et}$$

$$\mathfrak{A} - \mathfrak{C}\sqrt{v} = \sqrt{\left(\frac{B}{4v} - \frac{A}{2\sqrt{v}} + \sqrt{v}\right)} \text{ vnde reperietur;}$$

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{4\sqrt{v}}\sqrt{(B + 2A\sqrt{v} - 4v\sqrt{v})} + \frac{1}{4\sqrt{v}}\sqrt{(B - 2A\sqrt{v} + 4v\sqrt{v})} \text{ et}$$

$$\mathfrak{C} = \frac{1}{4v}\sqrt{(B + 2A\sqrt{v} - 4v\sqrt{v})} - \frac{1}{4v}\sqrt{(B - 2A\sqrt{v} + 4v\sqrt{v})}.$$

29. Cum ſit $\mathfrak{A}\sqrt[4]{v} \pm \mathfrak{C}\sqrt[4]{v^3} = (\mathfrak{A} \pm \mathfrak{C}\sqrt{v})\sqrt[4]{v}$ erunt aequationis propoſitae:

$$x^4 = Axx + Bx + C$$

poſtquam valor v inuentus fuerit ex aequatione:

$$v^3 - \tfrac{1}{2}Av^2 + \tfrac{1}{4}(C + \tfrac{1}{4}AA)v - \tfrac{1}{64}BB = 0$$

quatuor radices:

I. $x = \sqrt{v} + \frac{1}{2\sqrt{v}}\sqrt{(B\sqrt{v} + 2Av - 4vv)}$

II. $x = \sqrt{v} - \frac{1}{2\sqrt{v}}\sqrt{(B\sqrt{v} + 2Av - 4vv)}$

III. $x = -\sqrt{v} + \frac{1}{2\sqrt{v}}\sqrt{(-B\sqrt{v} + 2Av - 4vv)}$

IV. $x = -\sqrt{v} - \frac{1}{2\sqrt{v}}\sqrt{(-B\sqrt{v} + 2Av - 4vv)}$

Hocque modo, vt conſtat, reſolutio aequationis biquadraticae ad reſolutionem aequationis cubicae reducitur.

IV. Reſolutio aequationum quinti gradus.

30. Poſito $n = 5$, erit forma noſtra radicis:

$$x = \mathfrak{A}\sqrt[5]{v} + \mathfrak{B}\sqrt[5]{vv} + \mathfrak{C}\sqrt[5]{v^3} + \mathfrak{D}\sqrt[5]{v^4}$$

ac primo quaeri debet aequatio quinti gradus, cuius haec futura ſit radix, ſeu quod eodem redit, ex hac forma ſigna radicalia eliminari oportet. In hoc autem ipſo ſumma occurrit difficultas, cum operatio haec eliminationis neutiquam eo modo, quo in aequationibus quarti gradus ſum vſus, inſtitui queat. Manifeſtum quidem eſt, quia omnes poteſtates ipſius x eadem ſigna radicalia inuoluunt, ſi aequatio quaeſita fingatur:

$$x^5 = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

tum ſubſtituendo pro x valorem aſſumtum, quatuor obtineri aequationes, quarum ope quaterna ſigna radicalia eliminari liceat; ſed tum litterae hae aſſumtae A, B, C, et D ſingulae difficillime determinabuntur.

31. His difficultatibus perpenſis in alium incidi modum hanc operationem inſtituendi, qui ita eſt comparatus, vt ad omnes radicum formas, cuiuscunque ſint gradus, aeque pateat, et ex quo ſimul perſpicietur, aequationem rationalem nunquam vltra gradum, qui exponente n indicatur, eſſe aſcenſuram. Hic autem modus innititur ipſi naturae aequationum, qua ſingulorum terminorum coefficientes ex omnibus radicibus definiuntur. Cum igitur omnes quinque radices aequationis, quam quaerimus, conſtent, ex iis quoque coefficientes ſingulorum terminorum eius formari poſſunt per regulas cognitas. Sint igitur 1, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, quinque radices ſurdeſolidae vnitatis, ſeu radices huius aequationis $z^5 - 1 = 0$, ac ponendo α, β, γ, δ, ε pro radicibus aequationis, quam quaerimus, erit:

$\alpha = \mathfrak{A}$

$$\alpha = \mathfrak{A}\sqrt[5]{v} + \mathfrak{B}\sqrt[5]{v^2} + \mathfrak{C}\sqrt[5]{v^3} + \mathfrak{D}\sqrt[5]{v^4}$$

$$\beta = \mathfrak{A}\mathfrak{a}\sqrt[5]{v} + \mathfrak{B}\mathfrak{a}^2\sqrt[5]{v^2} + \mathfrak{C}\mathfrak{a}^3\sqrt[5]{v^3} + \mathfrak{D}\mathfrak{a}^4\sqrt[5]{v^4}$$

$$\gamma = \mathfrak{A}\mathfrak{b}\sqrt[5]{v} + \mathfrak{B}\mathfrak{b}^2\sqrt[5]{v^2} + \mathfrak{C}\mathfrak{b}^3\sqrt[5]{v^3} + \mathfrak{D}\mathfrak{b}^4\sqrt[5]{v^4}$$

$$\delta = \mathfrak{A}\mathfrak{c}\sqrt[5]{v} + \mathfrak{B}\mathfrak{c}^2\sqrt[5]{v^2} + \mathfrak{C}\mathfrak{c}^3\sqrt[5]{v^3} + \mathfrak{D}\mathfrak{c}^4\sqrt[5]{v^4}$$

$$\varepsilon = \mathfrak{A}\mathfrak{d}\sqrt[5]{v} + \mathfrak{B}\mathfrak{d}^2\sqrt[5]{v^2} + \mathfrak{C}\mathfrak{d}^3\sqrt[5]{v^3} + \mathfrak{D}\mathfrak{d}^4\sqrt[5]{v^4}.$$

32. His quinque radicibus expoſitis, ſi aequatio quinti gradus has radices habens ſtatuatur:

$$x^5 - \Delta x^4 + A x^3 - B x^2 + C x - D = 0$$

hi coefficientes ex radicibus α, β, γ, δ, ε ita definiuntur, vt ſit

$\Delta =$ ſummae radicum

$A =$ ſummae productorum ex binis

$B =$ ſummae productorum ex ternis

$C =$ ſummae productorum ex quaternis

$D =$ producto ex omnibus quinis.

Quo autem hos valores facilius colligere queamus, eos ex ſummis poteſtatum radicum concludamus. Sit igitur:

$$P = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon$$

$$Q = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \varepsilon^2$$

$$R = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 + \varepsilon^3$$

$$S = \alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 + \delta^4 + \varepsilon^4$$

$$T = \alpha^5 + \beta^5 + \gamma^5 + \delta^5 + \varepsilon^5.$$

His enim valoribus definitis erit, vti nouimus:

$$\Delta = P$$
$$A = \frac{\Delta P - Q}{2}$$
$$B = \frac{AP - \Delta Q + R}{3}$$
$$C = \frac{BP - AQ + \Delta R - S}{4}$$
$$D = \frac{CP - BQ + AR - \Delta S + T}{5}.$$

33. Iam ad valores P, Q, R, S, T inueſtigandos, debemus prius radicum vnitatis $1, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ omnes poteſtates in vnam ſummam redigere; quae cum ſint radices aequationis $z^5 - 1 = 0$, erit

$$1 + \mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c} + \mathfrak{d} = 0$$
$$1 + \mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 + \mathfrak{c}^2 + \mathfrak{d}^2 = 0$$
$$1 + \mathfrak{a}^3 + \mathfrak{b}^3 + \mathfrak{c}^3 + \mathfrak{d}^3 = 0$$
$$1 + \mathfrak{a}^4 + \mathfrak{b}^4 + \mathfrak{c}^4 + \mathfrak{d}^4 = 0$$
$$1 + \mathfrak{a}^5 + \mathfrak{b}^5 + \mathfrak{c}^5 + \mathfrak{d}^5 = 5.$$

Summae poteſtatum ſextarum, ſeptimarum, etc. vsque ad decimas, iterum euaneſcunt, at decimarum ſumma iterum fit $= 5$, cum ſit $\mathfrak{a}^5 = 1$, $\mathfrak{b}^5 = 1$, $\mathfrak{c}^5 = 1$ et $\mathfrak{d}^5 = 1$. Breuitatis gratia in hoc calculo poterimus ſigna radicalia plane omittere, dummodo deinceps recordemur, cum literis $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ coniungenda eſſe $\sqrt[5]{v}$, $\sqrt[5]{v^2}$, $\sqrt[5]{v^3}$, $\sqrt[5]{v^4}$.

34. Nunc igitur addendis radicibus $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ habebimus:

$$P = \mathfrak{A}(1 + \mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c} + \mathfrak{d}) + \mathfrak{B}(1 + \mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 + \mathfrak{c}^2 + \mathfrak{d}^2) + \text{etc.} = 0.$$

reliquis autem poteſtatibus ſumendis, eliciemus inſuper

P = o

$$P = 0$$
$$Q = 10(\mathfrak{A}\mathfrak{D} + \mathfrak{B}\mathfrak{C})$$
$$R = 15(\mathfrak{A}\mathfrak{A}\mathfrak{C} + \mathfrak{A}\mathfrak{B}^2 + \mathfrak{B}\mathfrak{D}^2 + \mathfrak{C}^2\mathfrak{D})$$
$$S = 20(\mathfrak{A}^3\mathfrak{B} + \mathfrak{A}\mathfrak{C}^3 + \mathfrak{B}^3\mathfrak{D} + \mathfrak{C}\mathfrak{D}^3) + 30(\mathfrak{A}\mathfrak{A}\mathfrak{D}\mathfrak{D} + \mathfrak{B}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{C}) + 120\,\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$$
$$T = 5(\mathfrak{A}^3 + \mathfrak{B}^5 + \mathfrak{C}^5 + \mathfrak{D}^5) + 100(\mathfrak{A}^3\mathfrak{C}\mathfrak{D} + \mathfrak{A}\mathfrak{B}^3\mathfrak{C} + \mathfrak{B}\mathfrak{C}^3\mathfrak{D} + \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{D}^3) + 150(\mathfrak{A}\mathfrak{C}^2\mathfrak{D}^2 + \mathfrak{A}^2\mathfrak{B}\mathfrak{C}^2 + \mathfrak{B}^2\mathfrak{C}\mathfrak{D}^2 + \mathfrak{A}^2\mathfrak{B}^2\mathfrak{D}).$$

Hic alia producta non occurrunt, niſi quae adiungendis ſignis radicalibus poteſtatem ipſius v rationalem producunt: ſeu ſi litterae $\mathfrak{A}$ vnam dimenſionem tribuamus, litterae $\mathfrak{B}$ duas, litterae $\mathfrak{C}$ tres et litterae $\mathfrak{D}$ quatuor, in omnibus his productis numerus dimenſionum eſt per 5 diuiſibilis, coefficiens autem cuiusuis producti eſt quintuplum eius coefficientis, qui eidem producto ex lege conbinationum competit.

35. Cum igitur ſit $P = 0$, erit quoque $\Delta = 0$, et pro reliquis coefficientibus habebimus:

$A = -\frac{1}{2}Q$; $B = -\frac{1}{3}R$; $C = -\frac{1}{4}AQ - \frac{1}{4}S$; et $D = -\frac{1}{5}BQ + \frac{1}{5}AR + \frac{1}{5}T$.

Hinc ergo erit:

$$A = -5(\mathfrak{A}\mathfrak{D} + \mathfrak{B}\mathfrak{C})$$
$$B = 5(\mathfrak{A}\mathfrak{A}\mathfrak{C}^2 + \mathfrak{A}\mathfrak{B}^2 + \mathfrak{B}\mathfrak{D}^2 + \mathfrak{C}^2\mathfrak{D})$$
$$C = -5(\mathfrak{A}^3\mathfrak{B} + \mathfrak{B}^3\mathfrak{D} + \mathfrak{A}\mathfrak{C}^3 + \mathfrak{C}\mathfrak{D}^3) + 5(\mathfrak{A}^2\mathfrak{D}^2 + \mathfrak{B}^2\mathfrak{C}^2) - 5\,\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$$
$$D = \mathfrak{A}^5 + \mathfrak{B}^5 + \mathfrak{C}^5 + \mathfrak{D}^5) - 5(\mathfrak{A}^3\mathfrak{C}\mathfrak{D} + \mathfrak{A}\mathfrak{B}^3\mathfrak{C} + \mathfrak{B}\mathfrak{C}^3\mathfrak{D} + \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{D}^3) + 5(\mathfrak{A}\mathfrak{C}^2\mathfrak{D}^2 + \mathfrak{A}^2\mathfrak{B}\mathfrak{C}^2 + \mathfrak{B}^2\mathfrak{C}\mathfrak{D}^2 + \mathfrak{A}^2\mathfrak{B}^2\mathfrak{D})$$

cum quibus terminis iam debitae poteſtates ipſius v coniungi debent, vt obtineantur eorum iuſti valores.

36. Quodſi ergo mutatis ſignis coefficientium A et C proponatur haec aequatio:

$$x^5 = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

cuius coefficientes hos teneant valores:

$$A = 5(\mathfrak{A}\mathfrak{D} + \mathfrak{B}\mathfrak{C})v$$

$$B = 5(\mathfrak{A}^2\mathfrak{C} + \mathfrak{A}\mathfrak{B}^2 + \mathfrak{B}\mathfrak{D}^2v + \mathfrak{C}^2\mathfrak{D}v)v$$

$$C = 5(\mathfrak{A}^3\mathfrak{B} + \mathfrak{B}^3\mathfrak{D}v + \mathfrak{A}\mathfrak{C}^3v + \mathfrak{C}\mathfrak{D}^3vv)v - 5(\mathfrak{A}^2\mathfrak{D}^2 + \mathfrak{B}^2\mathfrak{C}^2)vv + 5\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}v^2$$

$$D = \mathfrak{A}^5v + \mathfrak{B}^5v^2 + \mathfrak{C}^5v^3 + \mathfrak{D}^5v^4 - 5(\mathfrak{A}^3\mathfrak{C}\mathfrak{D} + \mathfrak{A}\mathfrak{B}^3\mathfrak{C} + \mathfrak{B}\mathfrak{C}^3\mathfrak{D}v + \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{D}^3v)v^2 + 5(\mathfrak{A}^2\mathfrak{B}^2\mathfrak{D} + \mathfrak{A}^2\mathfrak{B}\mathfrak{C}^2 + \mathfrak{A}\mathfrak{C}^2\mathfrak{D}^2v + \mathfrak{B}^2\mathfrak{C}\mathfrak{D}^2v)v^2$$

erunt eius quinque radices:

I. $x = \mathfrak{A}\sqrt[5]{v} + \mathfrak{B}\sqrt[5]{v^2} + \mathfrak{C}\sqrt[5]{v^3} + \mathfrak{D}\sqrt[5]{v^4}$

II. $x = \mathfrak{A}\mathfrak{a}\sqrt[5]{v} + \mathfrak{B}\mathfrak{a}^2\sqrt[5]{v^2} + \mathfrak{C}\mathfrak{a}^3\sqrt[5]{v^3} + \mathfrak{D}\mathfrak{a}^4\sqrt[5]{v^4}$

III. $x = \mathfrak{A}\mathfrak{b}\sqrt[5]{v} + \mathfrak{B}\mathfrak{b}^2\sqrt[5]{v^2} + \mathfrak{C}\mathfrak{b}^3\sqrt[5]{v^3} + \mathfrak{D}\mathfrak{b}^4\sqrt[5]{v^4}$

IV. $x = \mathfrak{A}\mathfrak{c}\sqrt[5]{v} + \mathfrak{B}\mathfrak{c}^2\sqrt[5]{v^2} + \mathfrak{C}\mathfrak{c}^3\sqrt[5]{v^3} + \mathfrak{D}\mathfrak{c}^4\sqrt[5]{v^4}$

V. $x = \mathfrak{A}\mathfrak{d}\sqrt[5]{v} + \mathfrak{B}\mathfrak{d}^2\sqrt[5]{v^2} + \mathfrak{C}\mathfrak{d}^3\sqrt[5]{v^3} + \mathfrak{D}\mathfrak{d}^4\sqrt[5]{v^4}$

exiſtentibus $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ praeter vnitatem reliquis quatuor radicibus ſurdeſolidis vnitatis, quarum valores imaginarii conſtant.

37. Si nunc viciſſim ex datis coefficientibus A, B, C, D definiri poſſent quantitates $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ cum littera v, haberetur reſolutio generalis omnium aequationum

tionum quinti gradus. Verum in hoc ipſo ſumma difficultas conſiſtit, cum nulla via pateat, litteras $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, quarum quidem vnam pro lubitu aſſumere licet, ſucceſſiue ita eliminandi, vt aequatio ſolum incognitam v cum datis A, B, C, D inuoluens reſultet, quae quidem nullas radices ſuperfluas complectatur. Satis tuto autem ſuſpicari licet, ſi haec eliminatio rite adminiſtretur, tandem ad aequationem quarti gradus perueniri poſſe, qua valor ipſius v definiatur. Si enim aequatio altioris gradus prodiret, tum quoque valor ipſius v ſigna radicalia eiusdem gradus implicaret, quod abſurdum videtur. Quoniam autem multitudo terminorum hunc laborem tam difficilem reddit, vt ne tentari quidem cum aliquo ſucceſſu queat, haud abs re erit, caſus quosdam minus generales euoluere, qui non ad formulas tantopere complicatas deducant.

38. Ad caſus ergo particulares deſcenſuri, tribuamus litteris $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ eiusmodi valores, quibus calculus in compendium reducatur; ac primo quidem ſint $\mathfrak{B} = 0$, $\mathfrak{C} = 0$, et $\mathfrak{D} = 0$, vnde nanciſcemur:

$$A = 0,\ B = 0,\ C = 0 \text{ et } D = \mathfrak{A}^5 v.$$

Hinc igitur fit $\mathfrak{A}\sqrt[5]{v} = \sqrt[5]{v}$. Quare ſi haec propoſita fuerit aequatio:

$$x^5 = D$$

erunt huius aequationis quinque radices:

$$\text{I. } x = \sqrt[5]{D};\ \text{II. } x = \mathfrak{a}\sqrt[5]{D};\ \text{III. } x = \mathfrak{b}\sqrt[5]{D};\ \text{IV. } x = \mathfrak{c}\sqrt[5]{D};$$
$$\text{V } x = \mathfrak{d}\sqrt[5]{D}$$

qui caſus cum per ſe ſit manifeſtus, ab eo exordium capere viſum eſt, vt pateat quomodo noſtra methodus caſus cognitos in ſe complectatur.

39. Euaneſcant iam duae litterarum $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{D}$, ſi enim tres euaneſcentes ponantur, quaecunque eae ſumantur, ſemper ad caſum praecedentem deducimur. Sint igitur $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{D}$ nihilo aequales, ſeu aequatio quaeratur, cuius radix ſit futura $x = \mathfrak{A}\sqrt[5]{v} + \mathfrak{B}\sqrt[5]{v^2}$, atque obtinebimus:

$$A = 0;\ B = 5\mathfrak{A}\mathfrak{B}^2 v;\ C = 5\mathfrak{A}^3\mathfrak{B}v;\ D = \mathfrak{A}^5 v + \mathfrak{B}^5 v^2$$

vnde propoſita radix conueniet huic aequationi:

$$x^5 = 5\mathfrak{A}\mathfrak{B}^2 v x^2 + 5\mathfrak{A}^3\mathfrak{B} v x + \mathfrak{A}^5 v + \mathfrak{B}^5 v^2$$

Quae aequatio ſi comparetur cum hac forma:

$$x^5 = 5Pxx + 5Qx + R$$

erit $\mathfrak{A}\mathfrak{B}^2 v = P$; $\mathfrak{A}^3\mathfrak{B}v = Q$, vnde deducitur $\mathfrak{A}^5 v = \frac{QQ}{P}$ et $\mathfrak{B}^5 v^2 = \frac{P^3}{Q}$, ita vt ſit $R = \frac{QQ}{P} + \frac{P^3}{Q}$.

40. Hinc ergo deducimur ad reſolutionem huius aequationis ſpecialis quinti gradus:

$$x^5 - 5Pxx + 5Qx + \frac{QQ}{P} + \frac{P^3}{Q}$$

cuius ob $\mathfrak{A}\sqrt[5]{v} = \sqrt[5]{\frac{QQ}{P}}$ et $\mathfrak{B}\sqrt[5]{vv} = \sqrt[5]{\frac{P^3}{Q}}$ quinque radices erunt:

I. $x = \sqrt[5]{\frac{QQ}{P}} + \sqrt[5]{\frac{P^3}{Q}}$

II. $x = \mathfrak{a}\sqrt[5]{\frac{QQ}{P}} + \mathfrak{a}^2\sqrt[5]{\frac{P^3}{Q}}$

III. $x = \mathfrak{b}\sqrt[5]{\frac{QQ}{P}} + \mathfrak{b}^2\sqrt[5]{\frac{P^3}{Q}}$

IV. $x = \mathfrak{c}\sqrt[5]{\frac{QQ}{P}} + \mathfrak{c}^2\sqrt[5]{\frac{P^3}{Q}}$

V. $x = \mathfrak{d}\sqrt[5]{\frac{QQ}{P}} + \mathfrak{d}^2\sqrt[5]{\frac{P^3}{Q}}$.

Aequa-

Aequatio autem haec non multum abſimilis eſt formulae Moivreanae, et quia ſe in factores reſolui non patitur, eius reſolutio hic tradita eo magis notari meretur.

41. Hanc aequationem a fractionibus liberare poterimus, ſi ponamus $P = MN$ et $Q = M^2N$, tum enim habebitur:

$$x^5 = 5MNxx + 5M^3Nx + M^3N + MN^2$$

cuius radix erit $x = \sqrt[5]{M^3N} + \sqrt[5]{MN^2}$, et ſi $\mathfrak{a}$ quamlibet aliam radicem ſurdeſolidam vnitatis denotet, erit huius aequationis quaelibet alia radix:

$$x = \mathfrak{a}\sqrt[5]{M^3N} + \mathfrak{a}^2\sqrt[5]{MN^2}.$$

Ita ſi exempli gratia ſtatuatur $M = 1$; et $N = 2$, huius aequationis:

$$x^5 = 10xx + 10x + 6$$

radix quaecunque eſt $x = \mathfrak{a}\sqrt[5]{2} + \mathfrak{a}^2\sqrt[5]{4}$; haecque aequatio ita eſt comparata, vt per nullam methodum cognitam reſolui poſſe videatur.

42. Si $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{D}$ ſint nihilo aequales, ad eundem caſum reuoluimur. Fiet enim

$A = 0$; $B = 5\mathfrak{A}^2\mathfrak{C}v$; $C = 5\mathfrak{A}\mathfrak{C}^3vv$ et $D = \mathfrak{A}^5v + \mathfrak{C}^5v^3$ vnde ſi ſtatuatur haec aequatio:

$$x^5 = 5Pxx + 5Qx + R$$

vt ſit $P = \mathfrak{A}^2\mathfrak{C}v$ et $Q = \mathfrak{A}\mathfrak{C}^3vv$, erit $\frac{QQ}{P} = \mathfrak{C}^5v^3$ et $\frac{P^3}{Q} = \mathfrak{A}^5v$: hincque fit, vt ante, $R = \frac{QQ}{P} + \frac{P^3}{Q}$, atque etiam eaedem reperiuntur radices. Eadem porro etiam aequatio reperitur, ſiue ponatur $\mathfrak{A} = 0$ et $\mathfrak{B} = 0$; ſiue $\mathfrak{A} = 0$ et $\mathfrak{C} = 0$. Sin autem vel $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{D}$, vel $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{C}$ euaneſcere

euaneſcere aſſumantur, vtrinque quidem eadem prodit aequatio, ſed diuerſa a praecedentibus caſibus, quam ideo euoluere conueniet.

43. Sit igitur et $\mathfrak{B}=0$ et $\mathfrak{C}=0$, atque hinc conſequemur ſequentes valores:

$A=5\mathfrak{A}\mathfrak{D}v$; $B=0$, $C=-5\mathfrak{A}\mathfrak{A}\mathfrak{D}\mathfrak{D}vv$; et $D=\mathfrak{A}^5v+\mathfrak{D}^5v^4$

Vnde ſi ſtatuamus $\mathfrak{A}\mathfrak{D}v=P$; erit $A=5P$ et $C=-5PP$ tum vero erit:

$DD\ 4P^5=(\mathfrak{A}^5v-\mathfrak{D}^5v^4)^2$ et $\mathfrak{A}^5v-\mathfrak{D}^5v^4=\sqrt{(DD-4P^5)}$, ideoque

$$\mathfrak{A}^5v=\tfrac{1}{2}D+\tfrac{1}{2}\sqrt{(DD-4P^5)} \text{ et}$$
$$\mathfrak{D}^5v^4=\tfrac{1}{2}D-\tfrac{1}{2}\sqrt{(DD-4P^5)}$$

Hinc ſi propoſita ſit haec aequatio:

$$x^5=5Px^3-5PPx+D$$

quaelibet eius radicum eſt:

$$x=\mathfrak{a}\sqrt[5]{(\tfrac{1}{2}D+\tfrac{1}{2}\sqrt{(DD-4P^5)})}+\mathfrak{a}^4\sqrt[5]{(\tfrac{1}{2}D-\tfrac{1}{2}\sqrt{(DD-4P^5)})}$$

atque haec eſt ipſa illa aequatio cuius reſolutionem Cel. Moivraeus docuit.

44. Poſſunt autem ex forma generali innumerabiles deduci aequationes quinti ordinis, quarum radices aſſignare licet, etiamſi ipſae illae aequationes in factores reſolui nequeant. Propoſita enim aequatione quinti gradus:

$$x^5=Ax^3+Bx^2+Cx+D$$

cuius coefficientes habeant ſequentes valores:

A=

$$A = \frac{5}{gk}(g^3 + k^3)$$

$$B = \frac{5}{2mnrr}((m+n)(m^2g^3 - n^2k^3) - (m-n)rr)$$

$$C = \frac{5}{mnggkkrr}(g^3(m^2g^3 - n^2k^3)^2 - (m(m+n)g^6 - (m^2+mn-n^2)g^3k^3 \\ + n(m-n)k^6)rr - k^3r^4)$$

$$D = \frac{gg}{mmnk^4g^3}((m^2g^3 - nnk^3)^3 - (m^2g^3 - n^2k^3)(m^2g^3 + rn^2k^3) - n^2k^3r^4) \\ + \frac{kk}{mnng^4r^3}(m^2g^3r^2(m^2g^3 - n^2k^3) - (2m^2g^3 + n^2k^3)r^4 + r^6) \\ + \frac{5(m-n)(g^3 - k^3)(m^2g^3 - n^2k^3)}{2mngkrr} - \frac{5(m+n)(g^3k^3)}{2mngk}$$

eius radices ſemper aſſignari poſſunt.

45. Ponatur enim breuitatis gratia:

$$T = (m^2g^3 - n^2k^3)^2 - 2(m^2g^3 + n^2k^3)rr + r^4$$

ſitque:

$$\left.\begin{matrix} P \\ Q \end{matrix}\right\} = \frac{(m^2g^3-n^2k^3)^3 - (m^2g^3-n^2k^3)(m^2g^3+2n^2k^3)rr - n^2k^3r^4 \pm ((m^2g^3-n^2k^3)^2 - n^2k^3rr)\sqrt{T}}{2mnnr}$$

$$\left.\begin{matrix} R \\ S \end{matrix}\right\} = \frac{(m^2g^3-n^2k^3)m^2g^3 - (2m^2g^3+n^2k^3)rr + r^4 \pm (m^2g^3 - rr)\sqrt{T}}{2mnnr}$$

vbi ſigna ſuperiora pro valoribus P et R, inferiora pro Q et S valent, ac quaelibet radix aequationis erit:

$$x = \mathfrak{a}\sqrt[5]{\tfrac{gg}{k^4}P} + \mathfrak{a}^2\sqrt[5]{\tfrac{kk}{g^4}R} + \mathfrak{a}^3\sqrt[5]{\tfrac{kk}{g^4}S} + \mathfrak{a}^4\sqrt[5]{\tfrac{gg}{k^4}Q}.$$

46. Vt rem exemplis illuſtremus, ex his formis ſequentia formari poſſunt:

I. Aequationis $x^5 = 40x^3 + 70xx - 50x - 98$ radix eſt

$$x = \sqrt[5]{(-31-3\sqrt{-7})} + \sqrt[5]{(-18+10\sqrt{-7})} + \sqrt[5]{(-18-\sqrt{-7})} \\ + \sqrt[5]{(-31-3\sqrt{-7})}$$

II. Aequationis $x^5 = 2625x + 16600$ radix eſt

$$x = \sqrt[5]{75(5+4\sqrt{10})} + \sqrt[5]{225(35+11\sqrt{10})} + \sqrt[5]{225(35-11\sqrt{10})} + \sqrt[5]{75(5-4\sqrt{10})}$$

quae eo magis ſunt notatu digna, quod hae aequationes nullo alio modo reſolui poſſunt. Simili autem modo huiusmodi inueſtigationes ad aequationes altiorum graduum extendi poſſunt: facileque erit, ex quouis gradu innumerabiles aequationes per alias methodos irreſolubiles exhibere, quarum huius methodi ope non ſolum vna, ſed omnes plane radices exhiberi queant.

DE

DE NVMERIS PRIMIS VALDE MAGNIS

Auctore

L. EVLERO.

Vix vllus reperietur Geometra, qui non, ordinem numerorum primorum inueſtigando, haud parum temporis inutiliter conſumſerit: videtur enim lex, qua numeri primi progrediuntur, in Arithmetica aeque abſtruſae eſſe indaginis, atque in Geometria circuli quadratura: ac ſi huius indagatio pro deſperata eſt habenda, non leuiores adſunt rationes, quae et ordinis, quo numeri primi ſe inuicem ſequuntur, cognitionem nos in perpetuum fugere perſuadent. Cum deinde etiam circuli quadratura, quamuis innoteſceret, vix quicquam vtilitatis allatura perhibeatur, eodem iure negare licebit, ex ordine numerorum primorum perſpecto vllum vſum eſſe redundaturum. Verum tamen nemo facile dubitabit, quin methodus ipſa, quae nos vel ad circuli quadraturam, vel ad legem progreſſionis numerorum primorum manuduceret, quoniam hae res tam diu fruſtra ſunt anquiſitae, eximium vſum ſit praeſtatura, propterea quod maxima impedimenta, quibus hae inueſtigationes adhuc fuerunt implicatae, feliciter ſuperauerit; ita vt inde omni iure ſumma ſubſidia per totam Matheſin nobis polliceri poſſemus. Haec ideo

 monenda

monenda duxi, ne quis eos, qui forte in hoc ſtudio deſudauerint, etiamſi operam perdiderint, reprehendendos cenſeat. Ac profecto natura numerorum primorum, cum ex iis modo tam admirabili omnes numeri componantur, per ſe praeclariſſima videtur, et quo magis adhuc in proprietates, quibus ſunt praeditae, penetrare licuit, eo magis haec doctrina digna cenſeri debet, cui excolendae plus operae tribuatur, quam nunc quidem plerumque fieri ſolet. In hoc autem ſtudii genere inprimis excelluit acutiſſimus quondam *Fermatius*, cui plurimae inſignes numerorum proprietates acceptae ſunt referendae; neque parum eſt dolendum, quod eius ſcripta poſt mortem ita interciderint, vt plurimorum theorematum demonſtrationes, quas ſe adinueniſſe aſſeuerauerat, adhuc nobis ſint ignotae. Hic perſpicaciſſimus vir in doctrina numerorum primorum etiam non mediocriter laborauit, atque problema ſe digniſſimum olim *Walliſio* propoſuerat, quo modum requirebat, numerum primum dato quouis numero maiorem aſſignandi. Credebat quidem *Fermatius*, ſe huius problematis ſolutionem in poteſtate habere, dum affirmauerat, omnes numeros in hac forma $2^n + 1$ contentos, ſi quidem exponens n ipſe fuerit poteſtas binarii, eſſe numeros primos. Verum tamen eo erat candore, vt negaret, ſe huius aſſerti demonſtrationem habere, etiamſi de eius veritate minime dubitaret. Perſpicuum autem eſt, ſi haec forma $2^n + 1$, ſumendo pro n quasvis binarii poteſtates, ſemper numeros primos exhiberet, problema propoſitum perfecte fore ſolutum. Quocunque enim numero propoſito, non ſolum vna, ſed innumerabiles poteſtates bina-

binarii aſſignari poterunt, quae loco exponentis n poſitae praebiturae ſint poteſtates 2^n dato illo numero maiores, ad quas ſi vnitas adiiceretur, haberentur vtique totidem numeri primi dato illo numero maiores. Hanc autem regulam a *Fermatio* prolatam veritati non eſſe conſentaneam, iam ante plures annos animaduerti. Cum enim pro omnibus caſibus inter centena millia ſubſiſtentibus ſatisfaceret, qui ſunt:

$2^1+1=3$; $2^2+1=5$; $2^4+1=17$; $2^8+1=257$; $2^{16}+1=65537$

ſtatim ſequentem caſum $2^{32}+1=4294967297$ non eſſe primum inueni, ſed diuiſibilem per numerum 641. Quare cum etiam de ſequentibus maioribus numeris, ex hac formula natis, incerti ſimus, vtrum ſint primi, nec nec? hinc nihil plane adiumenti conſequimur ad problema memoratum ſoluendum. Ac primo quidem nullum eſt dubium, quin propoſito numero quantumuis magno, infiniti adeo exiſtant numeri primi illo maiores; poſtquam iam ab Euclide eſt demonſtratum, omnium numerorum primorum multitudinem eſſe infinitam, etiamſi, vt ego oſtendi, haec numerorum primorum multitudo ſe habeat ad multitudinem omnium prorſus numerorum, vt vnitas ad infinitum, ſeu potius, vt logarithmus numeri infiniti ad ipſum hunc numerum infinitum, quod poſterius infinitum maius eſt, quam poteſtas quantumuis magna illius infiniti. Solutionis quidem huius problematis compotes fieremus, ſi loco formulae 2^n+1 aliam formulam indefinitam detegere liceret, quae nonniſi numeros primos complecteretur; ſed etiamſi fortaſſe talis reperiatur, quae vel centum numeros primos ſup-

peditaret, tamen ei aeque parum confidere poſſemus pro ſequentibus, niſi forte, quod autem vix eſt expectandum, firma demonſtratio exhiberi queat. Nulla certe progreſſio algebraica datur, cuius omnes plane termini in infinitum creſcentes futuri ſint numeri primi. Sumto enim termino quocunque, inter ſequentes ſemper infiniti termini eiusdem ſeriei aſſignari poterunt, quae omnes per illum diuidi queant, quod Theorema ita demonſtro:

Theorema.

Nulla datur progreſſio algebraica, cuius omnes termini ſint numeri primi.

Demonſtratio.

Cum progreſſio ſit algebraica, poſito eius termino indici x reſpondente $= X$, erit:

$$X = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \zeta x^5 + \eta x^6 + \text{etc.}$$

Poſito ergo termino indici a reſpondente $= A$, vt ſit

$$A = \alpha + \beta a + \gamma a^2 + \delta a^3 + \varepsilon a^4 + \zeta a^5 + \eta a^6 + \text{etc.}$$

ſi capiatur $x = nA + a$, fiet terminus iſti indici reſpondens X vtique per A diuiſibilis. Omnes ergo progreſſionis propoſitae termini, qui indicibus in hac forma $nA + a$ contentis reſpondent, non erunt numeri primi, neque ergo vlla huiusmodi progreſſio meros numeros primos complectetur. Q. E D.

Verum etiamſi non omnes termini huiusmodi progreſſionis ſint numeri primi, problemati tamen ſatisfieri poſſit, ſi modo inter eos infiniti dentur numeri primi, quorum indices certo quodam modo dignoſcere lice-

liceret; veluti ſi eiusmodi daretur progreſſio, cuius omnes termini, quorum indices ſunt numeri primi, ipſi eſſent numeri primi. Sed hoc modo quaerenda eſſet eiusmodi functio ipſius x, quae, quoties x fuerit numerus primus, ipſa quoque foret numerus primus, vel, quod eodem redit, regula deſideraretur, cuius ope ex quouis numero primo propoſito inueniri poſſet nouus numerus primus. At huius modi regulam profundiſſimae eſſe indaginis, quilibet in huius modi inueſtigationibus vel leuiter verſatus facile agnoſcet, ita vt hinc nulla plane ſpes affulgeat, vnquam ad ſolutionem allati problematis *Fermatiani* perueniendi.

Certum igitur eſt, in hoc problemate nihil adhuc eſſe praeſtitum, poſtquam ipſius *Fermatii* conatus ſucceſſu ſint deſtituti. Atque adeo, cum tabula numerorum primorum nondum vltra centena millia habeatur extenſa, problema ſane iam non parum foret difficile, ſi modo numeri primi quaerantur, qui ſint centenis millibus maiores; vel cum nuper prodierit tabula numerorum primorum vsque ad 101000 excurrens, ſi numeri primi quaerantur hunc terminum ſuperantes. Neque enim ad hoc ſaltem problema ſoluendum alia via patere videtur, niſi vt more ſolito ex numeris vltra 101000 notatis omnes compoſiti expungantur, hoc eſt: omnes, qui per vllum numerum primum, radice quadrata minorem, diuiſibiles deprehendentur; qui numeri enim his expunctis relinquentur, erunt numeri primi. Haec autem operatio inſtituenda plane foret eadem ratione, ac ſi ipſam tabulam numerorum primorum ad vlteriores limites continuare vellemus; quod opus propterea eſſet im-

immenſi laboris. Quodſi autem quis forte hunc laborem ſuſciperet, certe non eſſet expectandum, vt vltra millionem a quoquam produceretur, eoque exantlato omnino impoſſibile videretur, vllum numerum primum exhibere, qui eſſet millione maior.

Occurrit autem mihi methodus peculiaris, ex qua per calculum non admodum taedioſum plures ſum adeptus numeros, non ſolum centies millibus, ſed etiam millione maiores, quos eſſe primos certo aſſeuerare poſſum. Quoniam igitur in tam ardua inueſtigatione leuiores ſucceſſus non ſunt contemnendi, haud inutile fore ſpero, ſi iſthanc methodum meam expoſuero, praeſertim cum ipſa ex proprietatibus numerorum non ſpernendis ſit deriuata, quae etiam in aliis inueſtigationibus vſum inſignem habere poſſe videntur.

Deductus autem ſum ad hanc methodum per conſiderationem numerorum quadratorum vnitate auctorum, ſeu in hac formula $aa+1$ contentorum, in quibus, ſiquidem a ſit numerus par, plures numeros primos occurrere manifeſtum eſt, ſin autem a ſit numerus impar, ſemiſſis illius formulae $\frac{1}{2}(aa+1)$ plurimos quoque ſuppeditat numeros primos. Quaeſiui ergo omnes diuiſores numerorum in hac forma $aa+1$ contentorum, qui labor non adeo erat taedioſus, cum non opus eſſet diuiſionem per omnes numeros primos radice a minores tentare, propterea quod demonſtraui, atque id quidem poſt *Fermatium*, cuius autem demonſtratio pro deperdita eſt habenda, huiusmodi numeros $aa+1$ alios diuiſores non admittere, niſi qui ipſi ſint

ſint ſummae duorum quadratorum. Quare ſi numerus in hac forma $aa+1$ contentus habeat diuiſores, certo ſcio, hos diuiſores ſingulos in forma $pp+qq$ eſſe contentos. Cum deinde omnes numeri primi formae $4n+1$ ſint ſummae duorum quadratorum, numerorum autem primorum formae $4n-1$ nullus ſit duorum quadratorum ſumma, nullus certe numerus formae $4n-1$ erit diuiſor formae $aa+1$; ſed ſi ea habeat diuiſores primos, eos in hac forma $4n+1$ contineri neceſſe eſt. Conſideraui itaque omnes numeros primos formae $4n+1$, et ea quadrata primum inueſtigaui, quae vnitate aucta eſſent per quemuis horum numerorum primorum diuiſibilia, quo pacto omnes numeros formae $aa+1$ ſum adeptus, qui non ſunt numeri primi, reliquos ergo neceſſario primos eſſe oportet. Primum autem manifeſtum eſt, per binarium, qui eſt etiam ſumma duorum quadratorum, formam $aa+1$ eſſe diuiſibilem, quoties a fuerit numerus impar. Supereſt ergo, vt ii ipſius a valores indagentur, qui reddant formam $aa+1$ diuiſibilem per quemquam horum numerorum primorum 5, 13, 17, 29, 37, 41, etc. qui ipſi ſunt duorum quadratorum ſummae; quem in finem praemitto ſequens problema:

Problema I.

Propoſito numero primo formae $4n+1$, inuenire omnia quadrata, quae vnitate aucta per illum ſunt diuiſibilia.

Solutio.

Cum iſte numerus primus ſit ſumma duorum quadratorum, ſit $4n+1=p^2+q^2$, quadratum vero

vnitate auctum per illum diuiſibile ſit $aa+1$. Demonſtraui autem, quando ſumma duorum quadratorum, veluti $aa+bb$, diuiſibilis eſt per numerum primum $pp+qq$, ſemper dari duos huiusmodi numeros r et s, vt ſit $a=pr+qs$ et $b=ps-qr$. Noſtro caſu ergo cum ſit $bb=1$, neceſſe eſt, vt ſit $ps-qr=\pm 1$: vnde perſpicitur fractiones $\frac{p}{q}$ et $\frac{r}{s}$ proxime inter ſe convenire, ita vt earum differentia $\frac{ps-qr}{qs}$ minorem numeratorem, vnitati quippe aequalem, habere nequeat. Quare cum numeri p et q ex aequalitate $4n+1=pp+qq$ ſint cogniti, formetur fractio $\frac{p}{q}$, quaeraturque in numeris minoribus fractio $\frac{r}{s}$ illi proxime aequalis, vt partibus per crucem multiplicatis productorum ps et qr differentia ſit $=1$, id quod methodo a me alibi expoſita facile fiet; tum ad fractionem $\frac{p}{q}$ inuenta hac fractione $\frac{r}{s}$, erit quadrati vnius quaeſiti radix $a=pr+qs$, vel etiam $a=-pr-qs$. Tum vero ſi multiplum quodcunque diuiſoris $4n+1$ addatur, habebitur quoque valor idoneus pro a. Generatim ergo erit $a=m(4n+1)\pm(pr+qs)$, in qua forma continentur radices omnium quadratorum, quae vnitate aucta per numerum primum propoſitum $4n+1$ ſunt diuiſibilia. Q. E. I.

Scholion.

Quemadmodum autem data fractione $\frac{p}{q}$ aliam fractionem $\frac{r}{s}$ inueniri conueniat, quae ab illa tam parum diſcrepet, vt producta per crucem orta ps et qr vnitate tantum differant, alio loco oſtendi. Scilicet pro numeris p et q eadem operatio inſtitui debet, quae vulgo

vulgo ad eorum maximum communem diuiſorem inueniendum inſtitui ſolet, tum ex quotis ordine ſcriptis formentur fractiones, quales ex fractionibus continuis prodeunt, earumque vltima erit ipſa fractio $\frac{p}{q}$, penultima autem pro $\frac{r}{s}$ aſſumi poterit, eritque differentia inter producta ps et qr vnitati aequalis; propterea quod numeri p et q erunt inter ſe primi, quoniam alias numerus $4n+1=pp+qq$ non foret primus. Inventa autem fractione $\frac{r}{s}$, manifeſtum eſt, eius loco quoque aſſumi poſſe has fractiones $\frac{p+r}{q+s}$, $\frac{2p+r}{2q+s}$ et ingenere $\frac{mp+r}{mq+s}$; nam et haec fractio cum fractione $\frac{p}{q}$ comparata dat producta per crucem $mpq+qr$ et $mpq+ps$ vnitate differentia. Quod ſi autem fractioni $\frac{p}{q}$ haec $\frac{mp+r}{mq+s}$ adiungatur, ex iis pro radice quadrati quaeſiti obtinetur $a=mpp+pr+mqq+qs=m(4n+1)$ $+pr+qs$ ob $pp+qq=4n+1$. Seu cum numeri r et s quoque negatiue accipi queant, $a=m(4n+1)$ $\pm(pr+qs)$, quae eſt ipſa forma generalis in ſolutione inuenta. Verum haec operatio commodiſſime per exempla docebitur.

Exemplum 1.

Inuenire omnia quadrata, quae vnitate aucta ſint per numerum primum 29 diuiſibilia.

Sit a radix quadrata ex quadratis quaeſitis, et cum 29 ſit numerus primus formae $4n+1$, erit certe ſumma duorum quadratorum, quae ſunt 25 et 4, ita vt ob $29=pp+qq=5^2+2^2$, ſit $p=5$ et $q=2$,

 vnde

vnde formatur iſta fractio $\frac{p}{q} = \frac{5}{2}$. Nunc inter numeros 5 et 2 inſtituatur operatio ad maximum communem diuiſorem inueſtigandum, quae ita ſe habebit;

$$\begin{array}{l} 2)\,5\,(2 \\ \quad\underline{4} \\ \quad 1)\,2\,(2 \\ \qquad\underline{2} \\ \qquad 0 \end{array}$$

Sunt ergo quoti 2 et 2, ex quibus formantur fractiones ſequenti modo:

$$\begin{array}{ccc} & 2 & 2 \\ \frac{1}{0}, & \frac{2}{1}, & \frac{5}{2} \end{array}$$

eritque penultima $\frac{2}{1} = \frac{r}{s}$, ex his autem duabus vltimis fractionibus $\frac{2}{1}$ et $\frac{5}{2}$ valor idoneus pro a erit productum numeratorum $2.5 = 10$ aucta producto denominatorum $1.2 = 2$; vnde erit $a = 10 + 2 = 12$, et in genere $a = 29m \pm 12$; omniumque horum numerorum quadrata vnitate aucta per 29 erunt diuiſibilia. Quare omnes valores ipſius a in his duabus progreſſionibus arithmeticis continebuntur:

12, 41, 70, 99, 128, 157, 186, 215, 244, 273, etc.
17, 46, 75, 104, 133, 162, 191, 220, 249, 278, etc.

Exemplum 2.

Inuenire omnia quadrata, quae vnitate aucta fiant per numerum primum 617 diuiſibilia.

Cum

Cum ſit $617 = 16^2 + 19^2$, ſtatuatur $p = 19$ et $q = 16$, fiatque inter numeros 16 et 19 haec operatio:

```
16) 19 (1
    16
    ---
     3) 16 (5
        15
        ---
         1) 3 (3
            3
            -
            0
```

Ex quotis 1, 5, 3 ſequentes formentur fractiones:

$$\begin{matrix} 1. & 5. & 3 & \\ \frac{1}{0}, & \frac{1}{1}, & \frac{6}{5}, & \frac{19}{16} \end{matrix}$$

quarum binae poſtremae dant numeratorum productum $= 114$

. . . . . at denominatorum productum $= 80$

vnde idoneus isque minimus valor ipſius a erit $= 194$ et generatim $a = 617m \pm 194$. Omnes ergo ipſius a valores in duabus ſequentibus progreſſionibus arithmeticis comprehenduntur:

194, 811, 1428, 2045, 2662, 3279 etc.

423, 1040, 1657, 2274, 2891, 3508 etc.

Exemplum 3.

Inuenire omnia quadrata, quae vnitate aucta ſint per numerum primum 1709 *diuiſibilia.*

Cum ſit $1709 = 22^2 + 35^2$, inter numeros 22 et 35 ſequens inſtituatur operatio:

```
22) 35 (1
    22
    --
    13) 22 (1
        13
        --
         9) 13 (1
             9
            --
             4) 9 (2
                8
                -
                1) 4 (4
                   4
                   -
                   0
```

et ex quotis 1, 1, 1, 2, 4 formentur ſequentes fractiones.

$$\begin{array}{cccccc} 1. & 1. & 1. & 2. & 4 & \\ \frac{1}{0}, & \frac{1}{1}, & \frac{2}{1}, & \frac{3}{2}, & \frac{8}{5}, & \frac{35}{22} \end{array}$$

quarum duae vltimae dabunt pro vno ipſius a valore:

$$a = 8 \cdot 35 + 5 \cdot 22 = 390$$

ita vt omnes ipſius a valores ſatisfacientes ſint:

$$a = 1709m \pm 390$$

Coroll. 1.

Si numerus primus $4n + 1$ fuerit ipſe quadratum vnitate auctum, veluti $4n + 1 = p^2 + 1$, tum ob $q = 1$, ſequens operatio erit inſtituenda:

$$1)\ p\ (p$$

$$p$$

vni-

vnicus ergo habetur quotus p, ex quo naſcentur fractiones

$$\begin{array}{cc} & p \\ \frac{1}{0}, & \frac{p}{1} \end{array}$$

vnde fit $a = 1\,p + 0.\,1 = p$, et generatim $a = m(4n+1) \pm p$.

Coroll. 2.

Si amborum quadratorum, quorum ſummae numerus primus $4n+1$ aequatur, radices vnitate differant, vt ſit $4n+1 = pp + (p-1)^2$, tum ob $q = p-1$ ſequens habebitur operatio:

$$\begin{array}{l} p-1)\ p\quad(1 \\ \qquad\ \ \underline{p-1} \\ \qquad\qquad 1)\ p-1\ (p-1 \\ \qquad\qquad\quad\ \ \underline{p-1} \\ \qquad\qquad\qquad\ 0 \end{array}$$

Quoti ergo 1 et $p-1$ has dabunt fractiones:

$$\begin{array}{ccc} 1 & p-1 & \\ \frac{1}{0}, & \frac{1}{1}, & \frac{p}{p-1} \end{array}$$

vnde fit $a = 1.\,p + 1.\,(p-1) = 2p-1$, et in genere

$$a = (4n+1)m \pm (2p-1).$$

Coroll. 3.

Si quaerantur omnia quadrata, quae vnitate aucta ſint per numerum primum $2 = 1+1$ diuiſibilia, etſi 2 non eſt formae $4n+1$, tamen, quia $p=1$, et $q=1$, erit primo $a=1$ per coroll. 1, hincque in genere $a = 2m \pm 1$. Vnde ſequitur, quod per ſe eſt manifeſtum, omnia

qua-

quadrata numerorum imparium, ſi vnitas addatur, fore per 2 diuiſibilia.

Scholion 2.

Secundum hanc ergo regulam omnes numeros primos formae $4n+1$ tractaui, et poſtquam ſingulos in ſummam duorum quadratorum conuerti, quod ſemper et quidem vnico modo fieri poteſt, cuique formam generalem ipſius a, in qua radices omnium quadratorum, quae vnitate aucta per quemque numerum primum ſint diuiſibilia, adſcripſi, vnde ſequens nata eſt tabula:

Tabula omnium numerorum a

quorum quadrata vnitate aucta $aa+1$ ſunt per quemlibet numerum primum formae $4n+1$ diuiſibilia.

Numeri primi	Valor ipſius a
$2 = 1^2 + 2^2$	$a = 2m \pm 1$
$5 = 1^2 + 2^2$	$a = 5m \pm 2$
$13 = 2^2 + 3^2$	$a = 13m \pm 5$
$17 = 1^2 + 4^2$	$a = 17m \pm 4$
$29 = 2^2 + 5^2$	$a = 29m \pm 12$
$37 = 1^2 + 6^2$	$a = 37m \pm 6$
$41 = 4^2 + 5^2$	$a = 41m \pm 9$
$53 = 2^2 + 7^2$	$a = 53m \pm 23$
$61 = 5^2 + 6^2$	$a = 61m \pm 11$
$73 = 3^2 + 8^2$	$a = 73m \pm 27$
$89 = 5^2 + 8^2$	$a = 89m \pm 34$
$97 = 4^2 + 9^2$	$a = 97m \pm 22$

Numeri

Numeri primi	Valor ipſius a
$101 = 1^2 + 10^2$	$a = 101\,m \pm 10$
$109 = 3^2 + 10^2$	$a = 109\,m \pm 33$
$113 = 7^2 + 8^2$	$a = 113\,m \pm 15$
$137 = 4^2 + 11^2$	$a = 137\,m \pm 37$
$149 = 7^2 + 10^2$	$a = 149\,m \pm 44$
$157 = 6^2 + 11^2$	$a = 157\,m \pm 28$
$173 = 2^2 + 13^2$	$a = 173\,m \pm 80$
$181 = 9^2 + 10^2$	$a = 181\,m \pm 19$
$193 = 7^2 + 12^2$	$a = 193\,m \pm 81$
$197 = 1^2 + 14^2$	$a = 197\,m \pm 14$
$229 = 2^2 + 15^2$	$a = 229\,m \pm 107$
$233 = 8^2 + 13^2$	$a = 233\,m \pm 89$
$241 = 4^2 + 15^2$	$a = 241\,m \pm 64$
$257 = 1^2 + 16^2$	$a = 257\,m \pm 16$
$269 = 10^2 + 13^2$	$a = 269\,m \pm 82$
$277 = 9^2 + 14^2$	$a = 277\,m \pm 60$
$281 = 5^2 + 16^2$	$a = 281\,m \pm 53$
$293 = 2^2 + 17^2$	$a = 293\,m \pm 138$
$313 = 12^2 + 13^2$	$a = 313\,m \pm 25$
$317 = 11^2 + 14^2$	$a = 317\,m \pm 114$
$337 = 9^2 + 16^2$	$a = 337\,m \pm 148$
$349 = 5^2 + 18^2$	$a = 349\,m \pm 136$
$353 = 8^2 + 17^2$	$a = 353\,m \pm 42$
$373 = 7^2 + 18^2$	$a = 373\,m \pm 104$
$389 = 10^2 + 17^2$	$a = 389\,m \pm 115$
$397 = 6^2 + 19^2$	$a = 397\,m \pm 63$
$401 = 1^2 + 20^2$	$a = 401\,m \pm 20$
$409 = 3^2 + 20^2$	$a = 409\,m \pm 143$
$421 = 14^2 + 15^2$	$a = 421\,m \pm 29$

Numeri primi	Valor ipſius a
$433 = 12^2 + 17^2$	$a = 433\,m \pm 179$
$449 = 7^2 + 20^2$	$a = 449\,m \pm 67$
$457 = 4^2 + 21^2$	$a = 457\,m \pm 109$
$461 = 10^2 + 19^2$	$a = 461\,m \pm 48$
$509 = 5^2 + 22^2$	$a = 509\,m \pm 208$
$521 = 11^2 + 20^2$	$a = 521\,m \pm 235$
$541 = 10^2 + 21^2$	$a = 541\,m \pm 52$
$557 = 14^2 + 19^2$	$a = 557\,m \pm 118$
$569 = 13^2 + 20^2$	$a = 569\,m \pm 86$
$577 = 1^2 + 24^2$	$a = 577\,m \pm 24$
$593 = 8^2 + 23^2$	$a = 593\,m \pm 77$
$601 = 5^2 + 24^2$	$a = 601\,m \pm 125$
$613 = 17^2 + 18^2$	$a = 613\,m \pm 35$
$617 = 16^2 + 19^2$	$a = 617\,m \pm 194$
$641 = 4^2 + 25^2$	$a = 641\,m \pm 159$
$653 = 13^2 + 22^2$	$a = 653\,m \pm 144$
$661 = 6^2 + 25^2$	$a = 661\,m \pm 106$
$673 = 12^2 + 23^2$	$a = 673\,m \pm 58$
$677 = 1^2 + 26^2$	$a = 677\,m \pm 26$
$701 = 5^2 + 26^2$	$a = 701\,m \pm 135$
$709 = 15^2 + 22^2$	$a = 709\,m \pm 96$
$733 = 2^2 + 27^2$	$a = 733\,m \pm 353$
$757 = 9^2 + 26^2$	$a = 757\,m \pm 87$
$761 = 19^2 + 20^2$	$a = 761\,m \pm 39$
$769 = 12^2 + 25^2$	$a = 769\,m \pm 62$
$773 = 17^2 + 22^2$	$a = 773\,m \pm 317$
$797 = 11^2 + 26^2$	$a = 797\,m \pm 215$
$809 = 5^2 + 28^2$	$a = 809\,m \pm 318$
$821 = 14^2 + 25^2$	$a = 821\,m \pm 295$

Numeri

Numeris primi	Valor ipſius *a*
$829 = 10^2 + 27^2$	$a = 829m \pm 240$
$853 = 18^2 + 23^2$	$a = 853m \pm 333$
$857 = 4^2 + 29^2$	$a = 857m \pm 207$
$877 = 6^2 + 29^2$	$a = 877m \pm 151$
$881 = 16^2 + 25^2$	$a = 881m \pm 387$
$929 = 20^2 + 23^2$	$a = 929m \pm 324$
$937 = 19^2 + 24^2$	$a = 937m \pm 196$
$941 = 10^2 + 29^2$	$a = 941m \pm 97$
$953 = 13^2 + 28^2$	$a = 953m \pm 442$
$977 = 4^2 + 31^2$	$a = 977m \pm 252$
$997 = 6^2 + 31^2$	$a = 997m \pm 161$
$1009 = 15^2 + 28^2$	$a = 1009m \pm 469$
$1013 = 22^2 + 23^2$	$a = 1013m \pm 45$
$1021 = 11^2 + 30^2$	$a = 1021m \pm 255$
$1043 = 3^2 + 32^2$	$a = 1033m \pm 347$
$1039 = 5^2 + 32^2$	$a = 1049m \pm 426$
$1061 = 10^2 + 31^2$	$a = 1061m \pm 103$
$1069 = 13^2 + 30^2$	$a = 1069m \pm 249$
$1093 = 2^2 + 33^2$	$a = 1093m \pm 530$
$1097 = 16^2 + 29^2$	$a = 1097m \pm 341$
$1109 = 22^2 + 25^2$	$a = 1109m \pm 354$
$1117 = 21^2 + 26^2$	$a = 1117m \pm 214$
$1129 = 20^2 + 27^2$	$a = 1129m \pm 168$
$1153 = 8^2 + 33^2$	$a = 1153m \pm 140$
$1181 = 5^2 + 34^2$	$a = 1181m \pm 243$
$1193 = 13^2 + 32^2$	$a = 1193m \pm 186$
$1201 = 24^2 + 25^2$	$a = 1201m \pm 49$
$1213 = 22^2 + 27^2$	$a = 1223m \pm 495$
$1217 = 16^2 + 31^2$	$a = 1217m \pm 78$

Numeri primi	Valor ipſius *a*
$1229 = 2^2 + 35^2$	$a = 1229\,m \pm 597$
$1237 = 9^2 + 34^2$	$a = 1237\,m \pm 546$
$1249 = 15^2 + 32^2$	$a = 1249\,m \pm 585$
$1277 = 11^2 + 34^2$	$a = 1277\,m \pm 113$
$1289 = 8^2 + 35^2$	$a = 1289\,m \pm 479$
$1297 = 1^2 + 36^2$	$a = 1297\,m \pm 36$
$1301 = 25^2 + 26^2$	$a = 1301\,m \pm 51$
$1321 = 5^2 + 36^2$	$a = 1321\,m \pm 257$
$1361 = 20^2 + 31^2$	$a = 1361\,m \pm 614$
$1373 = 2^2 + 37^2$	$a = 1373\,m \pm 668$
$1381 = 15^2 + 33^2$	$a = 1381\,m \pm 366$
$1409 = 25^2 + 28^2$	$a = 1409\,m \pm 452$
$1429 = 23^2 + 30^2$	$a = 1429\,m \pm 620$
$1433 = 8^2 + 37^2$	$a = 1433\,m \pm 542$
$1453 = 3^2 + 38^2$	$a = 1453\,m \pm 497$
$1481 = 16^2 + 35^2$	$a = 1481\,m \pm 465$
$1489 = 20^2 + 33^2$	$a = 1389\,m \pm 225$
$1493 = 7^2 + 38^2$	$a = 1493\,m \pm 432$
$1549 = 18^2 + 35^2$	$a = 1549\,m \pm 88$
$1553 = 23^2 + 32^2$	$a = 1553\,m \pm 339$
$1597 = 21^2 + 34^2$	$a = 1597\,m \pm 610$
$1601 = 1^2 + 40^2$	$a = 1601\,m \pm 40$
$1609 = 3^2 + 40^2$	$a = 1609\,m \pm 523$
$1613 = 13^2 + 38^2$	$a = 1613\,m \pm 127$
$1621 = 10^2 + 39^2$	$a = 1621\,m \pm 166$
$1637 = 26^2 + 31^2$	$a = 1637\,m \pm 316$
$1657 = 19^2 + 36^2$	$a = 1657\,m \pm 783$
$1669 = 15^2 + 38^2$	$a = 1669\,m \pm 220$
$1693 = 18^2 + 37^2$	$a = 1693\,m \pm 92$

Numeri

Numeri primi	Valor ipſius a
$1697 = 4^2 + 41^2$	$a = 1097\,m \pm 414$
$1709 = 22^2 + 35^2$	$a = 1709\,m \pm 390$
$1721 = 11^2 + 40^2$	$a = 1721\,m \pm 473$
$1733 = 17^2 + 38^2$	$a = 1733\,m \pm 410$
$1741 = 29^2 + 30^2$	$a = 1741\,m \pm 59$
$1753 = 27^2 + 32^2$	$a = 1753\,m \pm 713$
$1777 = 16^2 + 39^2$	$a = 1777\,m \pm 775$
$1789 = 5^2 + 42^2$	$a = 1789\,m \pm 724$
$1801 = 24^2 + 35^2$	$a = 1801\,m \pm 824$
$1861 = 30^2 + 21^2$	$a = 1861\,m \pm 61$
$1873 = 28^2 + 33^2$	$a = 1873\,m \pm 737$
$1877 = 14^2 + 41^2$	$a = 1877\,m \pm 137$
$1889 = 17^2 + 40^2$	$a = 1889\,m \pm 331$
$1901 = 26^2 + 35^2$	$a = 1901\,m \pm 218$
$1913 = 8^2 + 43^2$	$a = 1913\,m \pm 712$
$1933 = 13^2 + 42^2$	$a = 1933\,m \pm 598$
$1949 = 10^2 + 43^2$	$a = 1949\,m \pm 589$
$1973 = 23^2 + 38^2$	$a = 1973\,m \pm 259$
$1993 = 12^2 + 43^2$	$a = 1993\,m \pm 834$
$1997 = 29^2 + 34^2$	$a = 1997\,m \pm 412$

Tabula ergo haec in ſe complectitur omnes numeros primos formae $4n+1$ infra 2000 exiſtentes, eiusque ergo ope omnes numeri inueniri poſſunt, quorum quadrata vnitate aucta per vllum horum numerorum primorum ſint diuiſibilia. Eius ergo beneficio ſequens ſolui poterit problema:

Problema.

Omnium numerorum, qui vnitate excedunt numeros quadratos, aſſignare omnes diuiſores radicibus ipſorum quadratis minores.

Solutio.

Scribantur ordine omnes numeri ab vnitate ad 2000, quandoquidem praecedens tabula ad hunc terminum eſt producta, qui littera a deſignentur, ita pro quouis numeri inde nati $aa+1$ diuiſores ſint aſſignandi. Conſtat autem, hos numeros alios non eſſe habituros diuiſores primos, niſi formae $4n+1$, praecedens vero tabula omnes numeros a exhibet, quorum quadrata vnitate aucta ſiut per quemque numerum primum huius formae diuiſibilia. Verum pro quolibet numero $aa+1$ ſufficit notaſſe diuiſores primos radice a minores: quoniam his cognitis etiam diuiſores radice a maiores ſponte innoteſcunt. Quam ob rem ſingulis numeris a formae $2m \pm 1$ adſcribatur binarius: quia eorum quadrata vnitate aucta ſunt per 2 diuiſibilia; tum numeris $a = 5m \pm 2$ adſcribatur 5, numeris $a = 13m \pm 5$ adſcribatur 13, numeris $a = 17m \pm 4$ adſcribatur 17, et ita porro; vbi quidem valores ipſius a minores ipſo numero primo propoſito omittuntur, quia tantum de diuiſoribus ipſo numero a minoribus quaeritur. Hoc ergo modo ſi ope tabulae praecedentis cuique numero a diuiſores conuenientes adſcribantur, obtinebuntur omnes diuiſores numeri $aa+1$ ipſa radice a minores. Q. E. I.

Coroll.

Coroll. 1.

Si ergo hoc modo numeri a relinquentur, quibus nullus diuiſor fuerit adſcriptus, hoc indicio erit, numeros $aa+1$ inde natos eſſe primos, nullos quippe diuiſores admittentes praeter vnitatem et ſe ipſos. Quibus igitur numeris a in tabula hoc modo condita nullus diuiſor fuerit adſcriptus, de iis certo affirmare poterimus, eorum quadrata vnitate aucta eſſe numeros primos.

Coroll. 2.

Quoniam igitur haec tabula pro numeris a facile ad 2000 extenditur, numeri inde nati $aa+1$ ad 4000000 exſurgent; vnde iſta tabula omnes numeros primos formae $aa+1$ exhibebit, qui 4 milliones non ſuperant, ſicque ex ea numeri primi non ſolum centenis millibus ſed etiam vno millione maiores depromi poterunt.

Coroll. 3.

Quibus autem numeris a vnicus diuiſor α fuerit adſcriptus, numeri inde nati $aa+1$ praeter vnitatem vnicum habebunt hunc diuiſorem α, radice a minorem; ideoque $\frac{aa+1}{\alpha}$ erit numerus primus. Ita quibus numeris a ſoles binarius fuerit adſcriptus, ex iis certo hos obtinemus numeros primos $\frac{aa+1}{2}$; atque adeo ex iſta tabula omnes numeri primi formae $\frac{aa+1}{2}$ limite 2000000 non maiores aſſignari poterunt.

Coroll.

Coroll. 4.

Simili modo omnes numeri a, quibus ſolus quinarius eſt adſcriptus, praebebunt omnes numeros primos formae $\frac{aa+1}{5}$, qui infra limitem 800000 continentur. Atque omnes numeri a, qui tantum diuiſorem 13 habebunt adſcriptum, praebebunt omnes numeros primos formae $\frac{aa+1}{13}$, infra limitem 307692 contentos.

Coroll. 5.

Qui autem numeri a duos tantum diuiſores α et β habebunt adſcriptos, id indicio erit, numeros $\frac{aa+1}{\alpha\beta}$ fore primos. Hinc quibus numeris a tantum duo diuiſores 2 et 5 fuerint adſcripti, ex iis reperientur omnes numeri primi formae $\frac{aa+1}{10}$, qui quidem limitem 400000 non ſuperabunt.

Scholion 1.

Verum vt hae concluſiones ſint certae, probe notandum eſt, inter numeros $aa+1$, qui ſunt per numerum primum $4n+1$ diuiſibiles, etiam eiusmodi numeros contineri, qui ſint per quadratum $(4n+1)^2$, vel etiam per cubum $(4n+1)^3$, altioresue poteſtates $(4n+1)^4$, $(4n+1)^5$ etc. diuiſibiles. Quod quoties accidit, numero a non ſolum diuiſor $4n+1$, ſed eius ſumma poteſtas, per quam numerus $aa+1$ fuerit diviſibilis, adſcribi debebit, vt hoc modo omnes diuiſores primi numerorum $aa+1$ ipſa radice a minores obtineantur.. Si quidem diuiſor fuerit $=2$, nulla eius altior

altior poteſtas, veluti 4, 8, 16 etc. vnquam numeri $aa+1$ diuiſor eſſe poterit, id quod per ſe eſt manifeſtum, cum exiſtente a numero impari, forma $aa+1$ ſit numerus impariter par. At de numeris primis formae $4n+1$ dantur vtique eiusmodi quadrata, quae vnitate aucta ſint per quamuis eorum poteſtatem diuiſibilia, quos idcirco inueſtigari conueniet.

Scholion 2.

Cum autem ſit $4n+1=pp+qq$, erunt omnes quoque ipſius $4n+1$ poteſtates ſummae duorum quadratorum, et quidem pluribus modis, ex quibus vero id quadratorum par ſumi conueniet, quorum radices ſunt numeri primi inter ſe. Sic cum ſit in genere $(pp+qq)(rr+ss)=(pr+qs)^2+(ps-qr)^2$, erit

$$(4n+1)^2=(pp+qq)^2=4ppqq+(pp-qq)^2$$
$$(4n+1)^3=(pp+qq)^3=(p^3-3pqq)^2+(3ppq-q^3)^2$$
$$(4n+1)^4=(pp+qq)^4=(p^4-6ppqq+q^4)^2+(4p^3q-4pq^3)^2$$

Si ſimili modo, quo ante, valores ipſius a inueſtigentur, conficietur pro poteſtatibus numerorum primorum, quae infra terminum 2000 continentur, ſequens tabula:

Tabula omnium numerorum a,

quorum quadrata vnitate aucta $aa + 1$ ſint per poteſtates numerorum primorum $4n + 1$ diuiſibilia.

Poteſt. num. primor.	Valor ipſius a
$5^2 = 3^2 + 4^2$	$a = 25\,m \pm 7$
$5^3 = 2^2 + 11^2$	$a = 125\,m \pm 57$
$5^4 = 7^2 + 24^2$	$a = 625\,m \pm 182$
$5^5 = 38^2 + 41^2$	$a = 3125\,m \pm 1068$
$13^2 = 5^2 + 12^2$	$a = 169\,m \pm 70$
$13^3 = 9^2 + 46^2$	$a = 2197\,m \pm 239$
$13^4 = 119^2 + 120^2$	$a = 13^4 m \pm 239$
$17^2 = 8^2 + 15^2$	$a = 289\,m \pm 38$
$17^3 = 47^2 + 52^2$	$a = 17^3 m \pm 1985$
$29^2 = 20^2 + 21^2$	$a = 841\,m \pm 41$
$37^2 = 12^2 + 35^2$	$a = 1369\,m \pm 117$
$41^2 = 9^2 + 40^2$	$a = 1681\,m \pm 378$
$53^2 = 28^2 + 45^2$	$a = 53^2 m \pm 500$
$61^2 = 11^2 + 60^2$	$a = 61^2 m \pm 682$
$73^2 = 48^2 + 55^2$	$a = 73^2 m \pm 776$
$89^2 = 39^2 + 80^2$	$a = 89^2 m \pm 3861$
$97^2 = 65^2 + 72^2$	$a = 97^2 m \pm 4052$
$101^2 = 20^2 + 99^2$	$a = 101^2 m \pm 515$
$109^2 = 60^2 + 91^2$	$a = 109^2 m \pm 5744$
$113^2 = 15^2 + 112^2$	$a = 113^2 m \pm 1710$
$137^2 = 88^2 + 105^2$	$a = 137^2 m \pm 6613$
$149^2 = 51^2 + 140^2$	$a = 149^2 m \pm 1744$
$197^2 = 28^2 + 95^2$	$a = 197^2 m \pm 1393$
$257^2 = 32^2 + 255^2$	$a = 257^2 m \pm 2072$

His itaque ſubſidiis hic ſubiunctam conſtruxi tabulam, ex qua ſtatim pro ſingulis numeris a omnes diuiſores formae $aa+1$ habentur. Hanc quidem tabulam non vltra 1500 in radicibus continuaui, ſed ope harum formularum facile ad 2000 vsque progredi licebit.

Ex hac autem tabula iam plures numeri primi formae $aa+1$ deſumi poterunt, qui non ſolum centenis millibus, ſed etiam vno millione ſint maiores: deinde etiam numeri primi formae $\frac{aa+1}{2}$ et $\frac{aa+1}{6}$ item $\frac{aa+1}{10}$ quos in ſequentibus tabellis exhibebo.

Numeri primi formae $aa+1$.

Radices a	Numeri primi $aa+1$	Radices a	Numeri primi $aa+1$	Radices a	Numeri primi $aa+1$
1	2	66	4357	156	24337
2	5	74	5477	160	25601
4	17	84	7057	170	28901
6	37	90	8101	176	30977
10	101	94	8837	180	32401
14	197	110	12101	184	33857
16	257	116	13457	204	41617
20	401	120	14401	206	42437
24	577	124	15377	210	44101
26	677	126	15877	224	50177
36	1297	130	16901	230	529-1
40	1601	134	17957	236	55697
54	2917	146	21317	240	57601
56	3137	150	22501	250	62501

 Radi-

Radices a	Numeri primi $aa+1$	Radices a	Numeri primi $aa+1$	Radices a	Numeri primi $aa+1$
256	65537	536	287297	826	682277
260	67601	544	295937	860	739601
264	69697	556	309137	864	746497
270	72901	570	324901	890	792101
280	78401	576	331777	906	820837
284	80657	584	341057	910	828101
300	90001	594	352837	920	846401
306	93637	634	401957	930	864901
314	98597	636	404497	936	876097
326	106277	644	414737	946	894917
340	115601	646	417317	950	902501
350	122501	654	427717	960	921601
384	147457	674	454277	966	933157
386	148997	680	462401	986	972197
396	156817	686	470597	1004	1008017
400	160001	690	476101	1010	1020101
406	164837	696	484417	1036	1073297
420	176401	700	490001	1054	1110917
430	184901	704	495617	1060	1123601
436	190097	714	509797	1066	1136357
440	193601	716	512657	1070	1144901
444	197137	740	547601	1094	1196837
464	215297	750	562501	1096	1201217
466	217157	760	577601	1106	1223237
470	220901	764	583697	1124	1263377
474	224677	780	608401	1140	1299601
490	240101	784	614657	1144	1308737
496	246017	816	665857	1146	1313317

Radices *a*	Numeri primi *aa*+1	Radices *a*	Numeri primi *aa*+1	Radices *a*	Numeri primi *aa*+1
1150	1322501	1294	1674437	1394	1943237
1156	1336337	1306	1705637	1406	1976837
1174	1378277	1314	1726597	1410	1988101
1176	1382977	1316	1731857	1416	2005057
1184	1401857	1320	1742401	1420	2016401
1210	1464101	1324	1752977	1430	2044901
1234	1522757	1340	1795601	1434	2056351
1244	1547537	1350	1822501	1440	2073601
1246	1552517	1354	1833317	1456	2119937
1274	1623077	1366	1865957	1460	2131601
1276	1628177	1374	1887877	1494	2232037
1290	1664101	1376	1893377		

Habentur ergo hic 112 numeri primi maiores quam 100000 et 49 numeri primi millionem ſuperantes.

Praeterea autem plures numeri primi formarum $\frac{aa+1}{2}$, $\frac{aa+1}{5}$, $\frac{aa+1}{10}$ aſſignari poſſunt, qui etiam centena millia ſuperant; vt ex ſequentibus perſpicere licet:

Valores numeri *a*, quibus forma $\frac{aa+1}{2}$ fit numerus primus.

1, 3, 5, 9, 11, 15, 19, 25, 29, 35, 39, 45, 49, 51, 59, 61, 65, 69, 71, 79, 85, 95

101, 121, 131, 139, 141, 145, 159, 165, 169, 171, 175, 181, 195, 199

201, 205, 209, 219, 221, 231, 245, 261, 271, 275, 279, 289, 299

309, 315, 321, 325, 329, 335, 345, 349, 371, 375, 379, 391, 399
405, 409, 415, 425, 435, 441, 445, 449, 451, 459, 461, 471
519, 521, 529, 535, 545, 559, 569, 571, 575, 579, 581, 595
609, 631, 639, 641, 649, 661, 669, 685, 689, 695, 699
711, 715, 739, 745, 751, 779, 781, 791, 799
815, 819, 821, 841, 855, 861, 869, 875, 881, 885
901, 909, 921, 925, 929, 935, 949, 951, 955, 959, 979, 981, 985, 989, 991
1001, 1011, 1025, 1029, 1031, 1039, 1051, 1055, 1069, 1081, 1091, 1095, 1099
1111, 1125, 1129, 1151, 1155, 1161, 1171, 1179, 1181, 1185, 1199
1205, 1219, 1225, 1241, 1251, 1255, 1265, 1281, 1285, 1299
1311, 1315, 1329, 1345, 1349, 1359, 1361, 1389, 1391
1405, 1411, 1419, 1421, 1439, 1459, 1465, 1469, 1489, 1495, 1499

Valores numeri *a*, quibus forma $\frac{aa+1}{5}$ fit numerus primus.

2, 8, 12, 22, 28, 42, 48, 52, 58, 62, 78, 88, 92
102, 108, 152, 158, 178, 188, 198
202, 222, 238, 248, 258, 262, 272, 292, 298
308, 312, 328, 352, 358, 362, 388
402, 422, 428, 458, 462, 478, 488, 492
508, 522, 558, 572, 588

602

602, 622, 628, 638, 652, 662, 692, 698
702, 728, 738. 758, 792
828, 838, 842, 848, 862, 872, 898
908, 912 942, 962, 972, 978, 988
1008, 1062, 1072, 1078, 1088
1108, 1112, 1138, 1192
1208, 1238, 1272, 1278, 1298
1312, 1342, 1358, 1372, 1378
1402, 1442, 1452, 1472, 1488, 1498

Valores numeri a, quibus forma $\frac{aa+1}{10}$ fit numerus primus.

3, 7, 13, 17, 23, 27, 33, 37, 53, 63, 67, 77, 87, 97
103, 113, 127, 137, 147, 153, 163, 167, 197
223, 227, 247, 263 267, 277, 283, 287, 297
303, 323, 347, 363, 367, 373, 383, 397
417, 427, 433, 453
503, 513, 517, 527, 533, 537, 547, 553, 573, 587
617, 627, 637, 653 673, 677, 683
753, 763, 773, 777, 797
817, 823, 833, 847, 867, 873, 877, 883
913, 917, 923 927, 933, 937, 947, 953, 963, 997
1047, 1053, 1063, 1073
1103, 1117, 1137, 1147, 1163, 1167, 1173, 1187, 1197
1213, 1233, 1247, 1273
1337, 1367, 1377, 1387, 1397
1413, 1417, 1423, 1447, 1473, 1497

Hinc autem iterum 9 numeri primi ſupra 1000000 obtinentur, ex forma ſcilicet $\frac{aa+1}{2}$, quando $a > 1414$.

a

a	Diuiſores ipſius $aa+1$	a	Diuiſores ipſius $aa+1$
1	2	30	17. 53
2	5	31	2. 13. 37
3	2. 5	32	5^2. 41
4	17	33	2. 5. 109
5	2 13	34	13. 89
6	37	35	2. 613
7	2. 5^2	36	1297
8	5. 13	37	2. 5. 137
9	2. 41	38	5. 17^2
10	101	39	2. 761
11	2. 61	40	1601
12	5. 29	41	2. 29^2
13	2. 5. 17	42	5. 353
14	197.	43	2. 5^2. 37
15	2. 113	44	13. 149
16	257	45	2. 1013
17	2. 5. 29	46	29. 73
18	5^2. 13	47	2. 5. 13 17
19	2. 181	48	5. 461
20	401	49	2. 1201
21	2. 13. 17	50	41. 61
22	5. 97	51	2. 1301
23	2. 5. 53	52	5 541
24	577	53	2. 5 281
25	2. 313	54	2917
26	677	55	2. 17 89
27	2 5. 73	56	3137
28	5 157	57	2. 5^3. 13
29	2. 421	58	5. 673

59

	Diuiſores ipſius $aa+1$
59	2. 1741
60	13. 277
61	2. 1861
62	5. 769
63	2. 5. 397
64	17. 241
65	2. 2113
66	4357
67	2. 5. 449
68	5^3. 37
69	2. 2381
70	13^2. 29
71	2. 2521
72	5. 17. 61
73	2. 5. 13. 41
74	
75	2. 29. 97
76	53. 109
77	2. 5 593
78	5
79	2
80	37. 173
81	2. 17
82	5^2. 193. 269
83	2. 5. 13. 53
84	
85	2
86	13. 569
87	2. 5

	Diuiſores ipſius $aa+1$
88	5
89	2. 17. 233
90	
91	2. 41. 101
92	5
93	2. 5^2. 173
94	
95	2
96	13. 709
97	2. 5
98	5. 17. 113
99	2. $13^2$29
100	73. 137
101	2
102	5
103	2. 5
104	29
105	2. 37
106	17
107	2. 5^2
108	5
109	2. 13
110	
111	2. 61. 101
112	5. 13
113	2. 5
114	41
115	2. 17
116	

	Diuiſores ipſius $aa+1$
117	2. 5. 37^2
118	5^2
119	2. 73. 97
120	
121	2
122	5. 13
123	2. 5. 17. 89
124	
125	2. 13
126	
127	2. 5.
128	5. 29. 113
129	2. 53
130	
131	2
132	5^2. 17. 41
133	2. 5. 29. 61
134	
135	2. 13
136	53
137	2. 5
138	5. 13
139	2
140	17
141	2
142	5. 37. 109
143	2. 5^2
144	89
145	2

	Diuiſores ipſius $aa+1$
146	
147	2. 5
148	5. 13
149	2. 17
150	
151	2. 13
152	5
153	2. 5
154	37
155	2. 41
156	
157	2. 5^2. 17. 29
158	5
159	2
160	
161	2. 13
162	5. 29
163	2 5
164	13
165	2
166	17
167	2. 5
168	5^2
169	2
170	
171	2
172	5. 61. 97
173	2. 5. 41. 73
174	13. 17. 137

	Diuiſores ipſius $aa+1$		Diuiſores ipſius $aa+1$
175	2	203	2. 5. 13
176		204	
177	2. 5. 13	205	2
178	5	206	
179	2. 37	207	2. 5^2
180		208	5. 17
181	2	209	2
182	5^4. 53	210	
183	2. 5. 17	211	2. 113. 197
184		212	5. 89. 101
185	2. 109. 157	213	2. 5. 13
186	29	214	41
187	2. 5. 13	215	2. 29
188	5	216	13. 37. 97
189	2. 53	217	2. 5. 17
190	13	218	5^2
191	2. 17. 29. 37	219	2
192	5. 73. 101	220	29
193	2. 5^3. 149	221	2
194	61	222	5
195	2	223	2. 5
196	41	224	
197	2. 5	225	2. 17
198	5	226	13
199	2	227	2. 5
200	13. 17. 181	228	5. 37
201	2	229	2. 13
202	5	230	
		231	2

	Diuiſores ipſius $aa+1$
232	5^2
233	2. 5. 61. 89
234	17
235	2. 53
236	
237	2. 5. 41. 137
238	5
239	2. 13^4
240	
241	2. 113
242	5. 13. 17. 53
243	2. 5^2
244	29
245	2
246	73
247	2. 5
248	5
249	2. 29
250	
251	2. 17^2. 109
252	5. 13
253	2. 5. 37. 173
254	149
255	2. 13. 41. 61
256	
257	2. 5^3
258	5
259	2. 17
260	
261	2
262	5
263	2. 5
264	
265	2. 13. 37. 73
266	173
267	2. 5
268	5^2 13^2. 17
269	2. 97
270	
271	2
272	5
273	2. 5. 29. 257
274	193
275	2
276	17
277	2. 5
278	5. 13. 29. 41
279	2
280	
281	2. 13
282	5^2
283	2. 5
284	
285	2. 17
286	157
287	2. 5
288	5. 53
289	2

	Diuiſores ipſius $aa+1$		Diuiſores ipſius $aa+1$
290	37	319	2 17. 41. 73
291	2. 13	320	13
292	5	321	2
293	2. 5². 17. 101	322	5. 89. 233
294	13. 61. 109	323	2. 5
295	2 53	324	113
296	41	325	2
297	2. 5	326	
298	5	327	2. 5. 17². 37
299	2	328	5
300		329	2
301	2. 89	330	13
302	5 17 37. 29	331	2 29
303	2 5	332	5²
304	13	333	2. 5. 13
305	2. 193. 241	334	281
306		335	2
307	2. 5³. 13. 29	336	17. 229. 29
308	5	337	2. 5 41 277
309	2	338	5 73. 313
310	17	339	2. 37
311	2. 137	340	
312	5	341	2. 53
313	2. 5. 97. 101	342	5. 149 157
314		343	2. 5². 13. 181
315	2	344	17
316	61	345	2
317	2. 5. 13	346	13
318	5³	347	2. 5

	Diuiſores ipſius $aa+1$		Diuiſores ipſius $aa+1$
348	5. 53	377	2. 5. 61. 233
349	2	378	5. 17. 41^2
350		379	2
351	2. 229. 269	380	197
352	5.	381	2. 181
353	2. 5. 17	382	5^2. 13
354	113	383	2. 5
355	2. 61	384	
356	13	385	2. 13
357	2. 5^2	386	
358	5	387	2 5. 17
359	2. 13	388	5
360	41. 109. 29	389	2. 29
361	2. 17	390	89
362	5	391	2
363	2. 5	392	5. 73
364	37	393	2. 5^2
365	2. 29	394	53. 101. 29
366	97	395	2. 13. 17. 353
367	2. 5	396	
368	5^2	397	2. 5
369	2. 13	398	5. 13
370	17	399	2
371	2	400	
372	5. 13	401	2. 37. 41. 53
373	2. 5	402	5
374	137	403	2. 5. 109. 149
375	2	404	17
376	37	405	2

400

	Diuiſores ipſius $aa+1$		Diuiſores ipſius $aa+1$
406		435	2
407	2. 5^2	436	
408	5. 13^2. 197	437	2. 5. 13^2. 113
409	2	438	5. 17: 37. 61
410	97	439	2. 173
411	2. 13. 73. 89	440	
412	5. 17	441	2
413	2. 5. 37	442	5. 41
414	101	443	2. 5^4. 157
415	2	444	
416	61	445	2
417	2. 5	446	17
418	5^2. 29. 241	447	2. 5. 13. 53. 29
419	2. 41	448	5. 137. 293
420		449	2
421	2. 13. 17. 401	450	13. 37. 421
422	5	451	2
423	2. 5. 29	452	5. 29
424	13	453	2: 5
425	2	454	53
426	173	455	2. 17
427	2. 5	456	269
428	5	457	3. 5^3
429	2. 17	458	5
430		459	2
431	2. 293. 317	460	13. 41. 397
432	5^3	461	2
433	2. 5	462	5
434	13	463	2. 5. 13. 17. 97

464

	Diuiſores ipſius *aa*+1		Diuiſores ipſins *aa*+1
464		493	2. 5^2
465	2. 73	494	277
466		495	2. 101
467	2. 5. 113. 193	496	
468	5^2	497	2. 5. 17
469	2. 109	498	5. 193. 257
470		499	2. 13. 61. 157
471	2	500	53^2. 89
472	5. 17	501	2. 41
473	2. 5. 13	502	5. 13
474		503	2. 5
475	2. 37	504	389
476	13. 29	505	2. 29
477	2. 5. 61. 373	506	17
478	5	507	2. 5^2. 97
479	2. 89	508	5.
480	17	509	2. 281. 461
481	2. 29	510	29
482	5^2	511	2. 137
483	2. 5. 41	512	5. 13. 37. 109
484	73	513	2. 5
485	2. 337 349	514	17
486	13	515	2. 13. 101^2
487	2. 5. 37	516	449
488	5	517	2. 5
489	2. 13. 17	518	5^2
490		519	2
491	2. 149	520	317
492	5	521	2

	Diuiſores ipſius $aa+1$		Diuiſores ipſius $aa+1$
522	5.	551	2. 13
523	2. 5. 17	552	5. 149. 409
524	37. 41. 181	553	2. 5
525	2. 13	554	13
526	337	555	2. 233
527	2. 5	556	
528	5. 13	557	2. 5^3. 17. 73
529	2	558	5
530	257	559	2
531	2. 17	560	61. 97
532	5^2	561	2. 37
533	2. 5	562	5. 181 349
534	29	563	2. 5. 29
535	2	564	13
536		565	2. 17. 41. 229
537	2. 5	566	457
538	5. 13. 61. 73	567	2. 5. 13
539	2. 29	568	5^3. 89. 29
540	17^2	569	2
541	2. 13	570	
542	5. 41	571	2
543	2. 5^2	572	5
544		573	2. 5
545	2	574	17
546	241	575	2
547	2. 5	576	
548	5. 17	577	2. 5. 13^2. 197
549	2. 37	578	5. 109
550	113	579	2

	Diuiſores ipſius *aa*+1		Diuiſores ipſius *aa*+1
580	13. 113 229	609	2
581	2	610	233
582	5^2. 17	611	2. 73
583	2. 5. 41	612	5. 173. 433
584		613	2. 5. 53
585	2. 137	614	277
586	37	615	2. 281
587	2. 5	616	13. 17^2. 101
588	5	617	2. 5
589	2. 89	618	5^2
590	13	619	2. 13
591	2. 17	620	269
592	5. 29	621	2. 61. 109. 29
593	2. 5^2. 13. 541.	622	5
594		623	2. 5. 37
595	2	624	41
596	101	625	2. 17
597	2. 5. 29	626	29
598	5. 37	627	2. 5
599	2. 17. 61. 173	628	5
600	157	629	2. 13
601	2. 313. 577	630	73
602	5	631	2
603	2. 5. 13	632	5^2. 13
604	97	633	2. 5. 17
605	2. 197	634	
606	13^2. 41. 53	635	2. 37
607	2. 5^2	636	
608	5. 17	637	2. 5

	Diuiſores ipſius $aa+1$		Diuiſores ipſius $aa+1$
638	5	667	2. 5. 17
639	2	668	5^2. 13
640	149	669	2
641	2	670	593
642	5. 13. 17. 373	671	2. 13
643	2. 5^2	672	5. 37
644		673	2. 5
645	2. 13	674	
646		675	2. 409. 557
647	2. 5. 41	676	17
648	5. 137. 613	677	2. 5
649	2	678	5. 89
650	17. 29	679	2. 29
651	2. 313	680	
652	5	681	2. 13
653	2. 5	682	5^3. 61^2
654		683	2. 5
655	2. 13. 569. 29	684	13. 17. 73. 29
656	157	685	2
657	2. 5^2. 89. 97	686	
658	5. 13	687	2. 5. 109. 433
659	2. 17. 53. 241	688	5. 41
660	37. 61. 193	689	2
661	2	690	
662	5	691	2. 193
663	2. 5. 113. 389	692	5
664	353	693	2. 5^3. 12. 113
665	2. 41	694	13
666	53	695	2

	Diuiſores ipſius $aa+1$		Diuiſores ipſius $aa+1$
696		725	2. 269
697	2. 5. 13. 37. 101	726	601
698	5	727	2. 5. 17
699	2	728	5
700		729	2. 41
701	2. 17. 97. 149	730	109
702	5	731	2. 397. 673
703	2. 5. 73. 677	732	5^2
704		733	2. 5. 29
705	2. 181	734	37
706	41	735	2. 17
707	2. 5^2. 13	736	13
708	5. 29	737	2. 5. 13
709	2. 37	738	5
710	13. 17	739	2
711	2	740	
712	5. 53	741	2. 293
713	2. 5. 29	742	5. 29
714		743	2. 5^2. 61. 181
715	2	744	17
716		745	2
717	2. 5. 101 509	746	13^2. 37. 89
718	5^2. 17	747	2. 5. 41
719	2. 53	748	5. 317. 353
720	13	749	2. 13
721	2. 61	750	
722	5. 137	751	2
723	2. 5. 13	752	5. 17
724	293	753	2. 5

	Diuiſores ipſius $aa+1$
754	97
755	2. 257
756	521
757	2. 5^2. 73. 157
758	5
759	2. 13
760	
761	2. 17
762	5. 13
763	2. 5
764	
765	2. 53
766	29
767	2. 5. 89. 661
768	5^2
769	2. 17
770	41
771	2. 37. 277. 29
772	5. 13. 53. 173
773	2. 5
774	197
775	2. 13^2
776	73^2. 113
777	2. 5
778	5. 17
779	2
780	
781	2.
782	5^2. 61. 401

	Diuiſores ipſius $aa+1$
783	2. 5. 37
784	
785	2. 13. 137 173
786	17
787	2. 5. 241. 257
788	5. 13. 41. 233
789	2. 149
790	281
791	2
792	5
793	2. 5^2
794	229
795	2. 17. 29. 641
796	109
797	2. 5
798	5. 13. 97. 101
799	2
800	29^2. 761
801	2. 13
802	5. 197. 653
803	2. 5. 17
804	61
805	2. 457. 709
806	113
807	2. 5^4. 521
808	5. 37
809	2. 229
810	509
811	2. 13. 41. 617

	Diuiſores ipſius $aa+1$		Diuiſores ipſius $aa+1$
812	5. 17	841	2
813	2. 5. 157. 421	842	5
814	13	843	2. 5^2. 61. 233
815	2	844	757
816		845	2. 37
817	2. 5	846	17
818	5^2. 53. 101	847	2. 5
819	2	848	5
820	17. 37	849	2. 73
821	2	850	13. 149. 373
822	5. 337. 401	851	2. 97
823	2. 5	852	5. 41
824	13 29	853	2. 5. 13. 29. 193
825	2. 53	854	17
826		855	2
827	2. 5. 13	856	89
828	5	857	2. 5^2. 37. 397
829	2. 17^2. 29. 41	858	5. 29
830	73	859	2. 137
831	2. 449. 769	860	
832	5^2	861	2
833	2. 5	862	5
834	349	863	2. 5. 13. 17. 337
835	2. 89	864	
836	701	865	2. 61
837	2. 5. 13. 17. 317	866	13
838	5	867	2. 5
839	2. 109	868	5^2
840	13	869	2

	Diuiſores ipſius $aa+1$		Diuiſores ipſius $aa+1$
870	41	899	2. 101
871	2. 17. 53. 421	900	241
872	5	901	2
873	2. 5	902	5. 13
874	461	903	2. 5. 73
875	2	904	61
876	13	905	2. 13. 17^2. 109
877	2. 5	906	
878	5. 53	907	2. 5^2
879	2. 13	908	5
880	17	909	2
881	2	910	
882	5^2. 29^2. 37	911	2. 41. 349. 29
883	2. 5	912	5
884	193	913	2. 5
885	2	914	17. 157. 331
886	181	915	2. 13^2
887	2. 5. 29	916	29
888	5. 17	917	2. 5
889	2. 13. 113. 269	918	5^2. 13.
890		919	2. 37. 101. 113
891	2. 277	920	
892	5. 13	921	2
893	2. 5^2. 41. 389	922	5. 17. 73. 137
894	37	923	2. 5
895	2. 97	924	53. 89. 181
896	281	925	2
897	2. 5. 17	926	61
898	5	927	2. 5

	Diuiſores ipſius $aa+1$		Diuiſores ipſius $aa+1$
928	5. 13	957	2. 5^2. 13
929	2	958	5. 173
930		959	2
931	2. 13. 17. 37. 53	960	
932	5^2	961	2. 409
933	2. 5	962	5
934	41	963	2. 5
935	2	964	313
936		965	2. 17. 61. 449
937	2. 5	966	
938	5. 149	967	2. 5. 13
939	2. 17	968	5^2. 37
940	29	969	2. 29
941	2. 13	970	13. 157. 461
942	5	971	2. 197
943	2. 5^2	972	5
944	13^2	973	2. 5. 17
945	2. 89. 173. 29	974	29
946		975	2. 41
947	2. 5	976	73
948	5. 17. 97. 109	977	2. 5. 53
949	2	978	5
950		979	2
951	2	980	13
952	5. 41	981	2
953	2. 5	982	5^2. 17
954	13	983	2. 5. 13
955	2	984	53
956	17. 37	985	2

986

	Diuiſores ipſius $aa+1$		Diuiſores ipſius $aa+1$
986		1015	2. 373
987	2. 5. 61	1016	17. 41
988	5	1017	2. 5. 293. 353
989	2	1018	5^2
990	17	1019	2. 13
991	2	1020	101
992	5. 97	1021	2. 233
993	2. 5^2. 13. 37. 41	1022	5. 13
994	269	1023	2. 5. 229. 457
995	2. 73	1024	17
996	13 137. 557	1025	2
997	2. 5	1026	61
998	5. 29	1027	2. 5. 29
999	2. 17. 149. 197	1028	5 241. 877
1000	101	1029	2
1001	2	1030	37. 53. 541
1002	5. 113	1031	2
1003	2. 5. 29	1032	5^2. 13 29. 113
1004		1033	2. 5. 17
1005	2. 37	1034	41. 89. 293
1006	13	1035	2. 13
1007	2. 5^2. 17	1036	
1008	5	1037	2 5 53
1009	2. 13	1038	5. 229. 941
1010		1039	2
1011	2	1040	617
1012	5. 257. 797	1041	2. 17
1013	2. 5. 89	1042	5. 37
1014	109	1043	2. 5^2

	Diuiſores ipſius $aa+1$		Diuiſores ipſius $aa+1$
1044	257	1073	2. 5
1045	2. 13. 97. 433	1074	13
1046	193	1075	2. 17. 41. 829
1047	2. 5	1076	233
1048	5. 13. 61. 277	1077	2. 5. 193. 601
1049	2. 73	1078	5
1050	17	1079	2. 37
1051	2	1080	773
1052	5. 389. 569	1081	2
1053	2. 5	1082	5^2
1054		1083	2. 5. 53
1055	2	1084	13^2. 17. 409
1056	29	1085	2. 29
1057	2. 5^3. 41. 109	1086	733
1058	5. 13. 17. 1013	1087	2. 5. 13. 61. 149
1059	2. 137	1088	5
1060		1089	2. 97
1061	2. 13. 29	1090	29. 53
1062	5	1091	2
1063	2. 5	1092	5. 17
1064	857	1093	2. 5^2
1065	2. 317	1094	
1066		1095	2
1067	2. 5. 17. 37. 181	1096	
1068	5^5. 73	1097	2. 5. 13
1069	2	1098	5. 41
1070		1099	2
1071	2. 13. 157. 281	1100	13
1072	5	1101	2. 17. 101. 353

	Diuiſores ipſius $aa+1$		Diuiſores ipſius $aa+1$
1102	5. 89	1131	2. 173
3	2. 5	32	5^2
4	37	33	2. 5. 137. 937
5	2. 181	34	541
6		35	2. 17
7	2. 5^2	36	13. 53
8	5	37	2. 5
9	2. 17. 61. 593	38	5
1110	13	39	2. 13. 41
11	2	1140	
12	5	41	2. 37. 73. 241
13	2. 5. 13^2. 733	42	5. 97
14	29	43	2. 5^2. 17. 29. 53
15	2. 113	44	
16	37. 41. 821	45	2. 113
17	2. 5	46	
18	5^2. 17^2. 173	47	2. 5
19	2. 29	48	5. 29. 61. 149
1120	433	49	2. 13
21	2. 101	1150	
22	5. 73	51	2
23	2. 5. 13. 89. 109	52	5. 13. 17
24		53	2. 5. 37
25	2	54	317
26	13. 17	55	2
27	2. 5. 157. 809	56	
28	5. 397. 641	57	2. 5^2. 41. 653
29	2	58	5. 269 997
1130	577	59	2. 337

	Diuiſores ipſius $aa+1$		Diuiſores ipſius $aa+1$
1160	17	89	2. 53
61	2	1190	37
62	5. 13	91	2. 13. 89. 613
63	2. 5	92	5
64	1061	93	2. 5^3
65	2. 13	94	17^2
66	109	95	2. 73
67	2. 5	96	53. 137. 197
68	5^2. 197. 277	97	2. 5
69	2. 17	98	5. 41
1170	61	99	2.
71	2	1200	337
72	5. 29	1	2. 13. 29
73	2. 5	2	5. 101
74		3	2. 5. 17
75	2. 13	4	13
76		5	2.
77	2. 5. 17. 29. 281	6	29
78	5. 13. 37. 577	7	2. 5^2
79	2.	8	5
1180	41	9	2. 61
81	2	1210	
82	5^3	11	2. 17
83	2. 5. 349. 401	12	5. 89
84		13	2. 5
85	2	14	13. 73
86	17. 97. 853	15	2. 37
87	2. 5	16	661
88	5. 13	17	2. 5. 13

a	Diuiſores ipſius $aa+1$	*a*	Diuiſores ipſius $aa+1$
18	5^2	47	2. 5
19	2	48	5. 181
1220	17	49	2. 53
21	2. 41	1250	1201
22	5. 101	51	2
23	2. 5. 373. 401	52	5. 37^2. 229
24	569	53	2. 5. 13^2. 929
25	2	54	17. 233. 397
26	509	55	2
27	2. 5. 13. 37. 313	56	13
28	5. 17. 113. 157	57	2. 5^2
29	2. 773. 977	58	5. 113
1230	13. 29	59	2. 29
31	2. 61	1260	349
32	5^2. 109. 557	61	2. 613
33	2. 5	62	5. 17. 41. 457
34		63	2. 5. 269. 593
35	2. 29	64	29. 37
36	149	65	2
37	2. 5. 17	66	13
38	5	67	2. 5. 229. 701
39	2. 41. 97. 193	68	5^2. 73. 881
1240	13	69	2. 13. 241. 257
41	2	1270	61. 137. 193
42	5. 53	71	2. 17
43	2. 5^2. 13	72	5
44		73	2. 5
45	2. 17	74	
46		75	2. 109

	Diuiſores ipſius $aa+1$		Diuiſores ipſius $aa+1$
1276		5	2. 13. 17
77	2. 5. 313 521	6	
78	5	7	$2. 5^3$
79	2. 13. 17	8	5. 13
1280	41. 89. 449	9	2. 233
81	2	1310	293
82	$5^2. 13^2. 389$	11	2
83	2. 5. 97	12	5
84	157	13	2. 5. 17
85	2	14	
86	181	15	2
87	2. 5. 73	16	
88	5. 17. 29. 673. 1033	17	2. 5. 29
89	2. 37	18	$5^3. 13$
1290		19	2. 509
91	2. 173	1320	
92	5. 13. 61	21	2. 13. 41
93	$2. 5^2. 29. 1153$	22	5. 17 29. 709
94		23	2. 5. 101
95	2. 13. 53. 1217	24	
96	17	25	2. 277
97	2. 5. 149. 1129	26	37
98	5	27	2. 5. 293. 601
99	2	28	5. 521. 677
1300	809	29	2
1	2. 37 89. 257	1330	17
2	5 53	31	2 13. 61. 1117.
3	$2. 5\ 41^2. 101$	32	5^2
4	173	33	2. 5. 137. 1297.

	Diuiſores ipſius $aa+1$		Diuiſores ipſius $aa+1$
34	13	63	2. 5. 37
35	2. 461	64	17
36	97	65	2. 197
37	2. 5	66	
38	5. 37	67	2. 5
39	2. 17	68	5^2
1340		69	2. 89
41	2. 73. 109. 113	1370	13 353 409
42	5	71	2. 113
43	2. 5^2	72	5
44	13. 41	73	2. 5. 13. 17. 853
45	2	74	
46	29	75	2. 29. 37. 881
47	2. 5. 13. 17. 821	76	
48	5. 53	77	2, 5
49	2	78	5
1350		79	2. 797 1193
51	2. 29	1380	29. 97. 677
52	5. 281. 1301	81	2. 17
53	2. 5. 61	82	5^2. 241. 317
54		83	2. 5. 13
55	2. 53	84	109
56	17	85	2 41. 149. 157
57	2. 5^2. 13	86	13
58	5	87	2. 5
59	2	88	5. 373
1360	13. 73	89	2
61	2	1390	17. 89. 1277
92	5. 41	91	2

1392

	Diuiſores ipſius $aa+1$		Diuiſores ipſius $aa+1$
1392	5. 61	1421	2
93	2. 5^2. 197^2	22	5. 13^2
94		23	2. 5
95	2. 953	24	17. 101. 1181
96	13	25	2. 13
97	2. 5	26	41
98	5. 17	27	2. 5. 269. 757
99	2. 13	28	5. 617. 661
1400	37	29	2. 181
1	2. 53	1430	
2	5	31	2. 461
3	2. 5. 41	32	5^4. 17. 193
4	29. 101. 673	33	2. 5. 29. 73. 97
5	2	34	
6		35	2. 13
7	2. 5^2. 17^2. 137	36	641
8	5. 53	37	2. 5. 37
9	2. 13. 29	38	5. 13. 29. 1097
1410		29	2
11	2	1440	
12	5. 13. 37. 829	41	2. 17. 157. 389
13	2. 5	42	5
14	61. 73. 449	43	2. 5^3
15	2. 17	44	41
16		45	2. 277
17	2. 5	46	149
18	5^2	47	2. 5
19	2	48	5. 13
1420		49	2. 17. 37

1450

	Diuiſores ipſius $aa+1$
1450	109
1	$2.\ 13^2$
2	5
3	2. 5. 61
4	53. 113. 353
1455	2. 653
6	
7	$2.\ 5^2$
8	5. 17. 89. 281
9	2
1560	
1	2. 13. 53
2	5. 29
3	2. 5. 193. 1109
4	13. 173. 953.
1465	2
6	17
7	2. 5. 29. 41. 181
8	5^2
9	2
1470	137
1	2. 317
2	5
3	2. 5
4	13. 37
1475	2. 17. 61. 1049

	Diuiſores ipſius $aa+1$
6	769
7	2 5. 13. 97. 173
8	5. 433. 1009
9	2. 89
1480	457
1	2. 229
2	5^2
3	$2.\ 5.\ 17^2.\ 761$
4	113
1485	2. 41
6	37^2
7	2. 5. 13. 73. 233
8	5
9	2
1490	13. 313
1	2. 29
2	5. 17
3	$2.\ 5^2.\ 109.\ 409$
4	
1495	2
6	29. 229. 337
7	2. 5
8	5
9	2
1500	13. 17

DE RESOLVTIONE AEQVATIONIS

$$dy + ayydx = bx^m dx.$$

Auctore

L. EVLERO.

Problema I.

I.

Inuenire numeros loco exponentis indefiniti m ſubſtituendos, vt valor ipſius y algebraice per x definiri queat.

Solutio.

Ponatur $y = cx^{n-1} + \frac{dz}{azdx}$, ac poſito dx conſtante, erit $dy = (n-1)cx^{n-2}dx + \frac{ddz}{azdx} - \frac{dz^2}{azzdx^2}$. Cum vero ſit $yy = ccx^{2n-2} + \frac{2cx^{n-1}dz}{azdx} + \frac{dz^2}{a^2z^2dx^2}$ facta ſubſtitutione tranſibit aequatio propoſita in hanc:

$$\frac{ddz}{azdx} + (n-1)cx^{n-2}dx + accx^{2n-2}dx + \frac{2cx^{n-1}dz}{z} = bx^m dx.$$

Fiat $m = 2n-2$ et $b = acc$, habebiturque:

$$ddz + (n-1)acx^{n-2}zdx^2 + 2acx^{n-1}dxdz = 0$$

quae

quae ergo reſultat ex hac aequatione propoſitae aequivalente

$$dy + ayydx = accx^{2n-2}dx$$

facta ſubſtitutione $y = cx^{n-1} + \frac{dz}{azdx}$. Fingatur iam haec aequatio:

$$z = Ax^{\frac{-n+1}{2}} + Bx^{\frac{-3n+1}{2}} + Cx^{\frac{-5n+1}{2}} + Dx^{\frac{-7n+1}{2}} + \text{etc.}$$

eritque differentiando:

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{(n-1)}{2}Ax^{\frac{-n-1}{2}} - \frac{(3n-1)}{2}Bx^{\frac{-3n-1}{2}} - \frac{(5n-1)}{2}Cx^{\frac{-5n-1}{2}} - \text{etc.}$$

$$\frac{ddz}{dx^2} = +\frac{(nn-1)}{4}Ax^{\frac{-n-3}{2}} + \frac{(9nn-1)}{4}Bx^{\frac{-3n-3}{2}} + \frac{(25nn-1)}{4}Cx^{\frac{-5n-3}{2}} - \text{etc.}$$

Cum vero ex ſuperiori aequatione per dx^2 diuiſa ſit:

$$\frac{ddz}{dx^2} + \frac{2acx^{n-1}dz}{dx} + (n-1)acx^{n-1}z = 0$$

ſi ſeries aſſumta ſubſtituatur, prodibit ſequens aequatio:

$$0 = \begin{cases} + \frac{(nn-1)}{4}Ax^{\frac{-n-3}{2}} + \frac{(9nn-1)}{4}Bx^{\frac{-3n-3}{2}} + \frac{(25nn-1)}{4}Cx^{\frac{-5n-3}{2}} \\ \qquad + \frac{(49nn-1)}{4}Dx^{\frac{-7n-3}{2}} + \text{etc.} \\ -(n-1)acAx^{\frac{n-3}{2}} - (3n-1)acBx^{\frac{-n-3}{2}} - (5n-1)acCx^{\frac{-3n-3}{2}} \\ \qquad -(7n-1)acDx^{\frac{-5n-3}{2}} - (9n-1)acEx^{\frac{-7n-3}{2}} - \text{etc.} \\ +(n-1)acAx^{\frac{n-3}{2}} + (n-1)acBx^{\frac{-n-3}{2}} + (n-1)acCx^{\frac{-3n-3}{2}} \\ \qquad +(n-1)acDx^{\frac{-5n-3}{2}} + (n-1)acEx^{\frac{-7n-3}{2}} - \text{etc.} \end{cases}$$

V 2 Ponan-

Ponantur termini homogenei iunctim ſumti nihilo aequales, vt determinentur coefficientes A, B, C, D, E, etc. eritque

$$B = \frac{(nn-1)A}{2n.4ac} = \frac{(nn-1)}{2} \cdot \frac{A}{4nac}$$

$$C = \frac{(9nn-1)}{4n} \cdot \frac{B}{4ac} = \frac{(nn-1)}{2.} \frac{(9nn-1)}{4} \cdot \frac{A}{4^2 n^2 a^2 c^2}$$

$$D = \frac{(25nn-1)}{6n} \cdot \frac{C}{4ac} = \frac{(nn-1)}{2.} \frac{(9nn-1)}{4.} \frac{(25nn-1)}{6} \cdot \frac{A}{4^3.n^3 a^3 c^3}$$

$$E = \frac{(49nn-1)}{8n} \cdot \frac{D}{4ac} = \frac{(nn-1)}{2.} \frac{(9nn-1)}{4.} \frac{(25nn-1)}{6.} \frac{(49nn-1)}{8} \cdot \frac{A}{4^4 n^4 a^4 c^4}$$

etc.

Determinabitur ergo z per x ſequenti modo: $z =$

$$Ax^{\frac{-n+1}{2}} + \frac{(nn-1)}{8} \frac{A}{nac} x^{\frac{-3n+1}{2}} + \frac{(nn-1)}{8.} \frac{(9nn-1)}{16} \frac{A}{n^2 a^2 c^2} x^{\frac{-5n+1}{2}}$$
$$+ \frac{(nn-1)}{8.} \frac{(9nn-1)}{16.} \frac{(25nn-1)}{24} \frac{A}{n^3 a^3 c^3} x^{\frac{-7n+1}{2}} + \text{etc.}$$

Valore hoc ſubſtituto reſultabit valor quaeſitus: $y = cx^{n-1}$

$$-\frac{1}{a}\left\{\frac{\frac{(n-1)}{2} Ax^{\frac{-n-1}{2}} + \frac{(3n-1)(nn-1)}{2 \quad 8} \frac{A}{nac} x^{\frac{-3n-1}{2}} + \frac{(5n-1)}{2} \cdot \frac{(nn-1)(9nn-1)}{8. \quad 16} \cdot \frac{A}{n^2 a^2 c^2} x^{\frac{-5n-1}{2}} + \text{etc.}}{Ax^{\frac{-n+1}{2}} + \frac{(nn-1)}{8} \cdot \frac{A}{nac} x^{\frac{-3n+1}{2}} + \frac{(nn-1)}{8} \cdot \frac{(9nn-1)}{16} \cdot \frac{A}{n^2 a^2 c^2} x^{\frac{-5n+1}{2}} + \text{etc.}}\right\}$$

ſiue numeratore ac denominatore per $Ax^{\frac{-n-1}{2}}$ diuiſo: $y = cx^{n-1}$

$$-\frac{1}{ax}\left\{\frac{\frac{(n-1)}{2} + \frac{(3n-1)(nn-1)}{2 \quad 8} \frac{x^{-n}}{nac} + \frac{(5n-1)}{2} \cdot \frac{(nn-1)(9nn-1)}{8. \quad 16} \frac{x^{-2n}}{n^2 a^2 c^2} + \frac{(7n-1)}{2} \cdot \frac{(nn-1)(nn-1)(9nn-1)(25nn-1)}{8 \quad 8. \quad 16 \quad 24} \frac{x^{-3n}}{n^3 a^3 c^3} + \text{etc.}}{1 + \frac{(nn-1)}{8} \cdot \frac{x^{-n}}{nac} + \frac{(nn-1)(9nn-1)}{8. \quad 16} \cdot \frac{x^{-2n}}{n^2 a^2 c^2} + \frac{(nn-1)(9nn-1)(25nn-1)}{8. \quad 16. \quad 24} \cdot \frac{x^{-3n}}{n^3 a^3 c^3} + \text{etc.}}\right\}$$

Haec

Haec ergo expreſſio generaliter in infinitum excurrens fit finita, ſi fuerit $(2i+1)^2 nn - 1 = 0$, denotante i numerum quemcunque integrum, hoc eſt, ſi fuerit $n = \frac{\pm 1}{2i+1}$; et $m = 2n - 2 = \frac{-4i-2\pm 2}{2i+1}$. Huius ergo aequationis, quoties i fuerit numerus integer:

$$dy + ayydx = accx^{\frac{-4i-2\pm 2}{2i+1}} dx$$

integrale ſemper in terminis finitis poterit exhiberi, ſeu valor ipſius y per x algebraice exponi.

Sit primo $n = \frac{+1}{2i+1}$, vt ſit $m = 2n - 2 = \frac{-4i}{2i+1}$, erit huius aequationis:

$$dy + ayydx = accx^{\frac{-4i}{2i+1}} dx$$

integrale in terminis algebraicis expreſſum:

$$ayx = acx^{\frac{1}{2i+1}}$$

$$\frac{+\frac{i}{2i+1} - \frac{i(i^2-1)}{2(2i+1)^2} \cdot \frac{x^{\frac{-1}{2i+1}}}{ac} + \frac{i(i^2-1)(i^2-4)}{2\cdot 4(2i+1)^3} \cdot \frac{x^{\frac{-2}{2i+1}}}{a^2c^2} - \frac{i(i^2-1)(i^2-4)(i^2-9)}{2\cdot 4\cdot 6(2i+1)^4} \cdot \frac{x^{\frac{-3}{2i+1}}}{a^3c^3} + \text{etc.}}{1 - \frac{i(i+1)}{2(2i+1)} \cdot \frac{x^{\frac{-1}{2i+1}}}{ac} + \frac{i(i^2-1)(i+2)}{2\cdot 4(2i+1)^2} \cdot \frac{x^{\frac{-2}{2i+1}}}{a^2c^2} - \frac{i(i^2-1)(i^2-4)(i+3)}{2\cdot 4\cdot 6(2i+1)^3} \cdot \frac{x^{\frac{-3}{2i+1}}}{a^3c^3} + \text{etc.}}$$

ſeu facta ad communem denominatorem reductione erit: $ayx =$

$$\frac{acx^{\frac{+1}{2i+1}} - \frac{ii-i}{2(2i+1)} + \frac{i(i^2-1)(i-2)}{2\cdot 4(2i+1)^2} \cdot \frac{x^{\frac{-1}{2i+1}}}{ac} - \frac{i(i^2-1)(i^2-4)(i-3)}{2\cdot 4\cdot 6(2i+1)^3} \cdot \frac{x^{\frac{-2}{2i+1}}}{a^2c^2} + \text{etc.}}{1 - \frac{i(i+1)}{2(2i+1)} \cdot \frac{x^{\frac{-1}{2i+1}}}{ac} + \frac{i(i^2-1)(i+2)}{2\cdot 4(2i+1)^2} \cdot \frac{x^{\frac{-2}{2i+1}}}{a^2c^2} - \frac{i(i^2-1)(i^2-4)(i+3)}{2\cdot 4\cdot 6(2i+1)^3} \cdot \frac{x^{\frac{-3}{2i+1}}}{a^3c^3} + \text{etc.}}$$

 Sit

Sit deinde $n = \frac{-1}{2i+1}$, vt ſit $m = \frac{-4i-4}{2i+1}$, erit huius aequationis

$$dy + ayydx = accx^{\frac{-4i-4}{2i+1}}dx$$

integrale in terminis algebraicis expreſſum:

$$ayx = acx^{\frac{-1}{2i+1}} + \frac{\frac{i+1}{2i+1} + \frac{i(i+1)(i+2)}{2(2i+1)^2}\cdot\frac{x^{\frac{1}{2i+1}}}{ac} + \frac{i(i^2-1)(i+2)(i+3)}{2\cdot4(2i+1)^3}\cdot\frac{x^{\frac{2}{2i+1}}}{a^2c^2} + \frac{i(i^2-1)(i^2-4)(i+3)(i+4)}{2\cdot4\cdot6(2i+1)^4}\cdot\frac{x^{\frac{3}{2i+1}}}{a^3c^3} + \text{etc.}}{1 + \frac{i(i+1)}{2(2i+1)}\cdot\frac{x^{\frac{1}{2i+1}}}{ac} + \frac{i(i^2-1)(i+2)}{2\cdot4(2i+1)^2}\cdot\frac{x^{\frac{2}{2i+1}}}{a^2c^2} + \frac{i(i^2-1)(i^2-4)(i+3)}{2\cdot4\cdot6(2i+1)^3}\cdot\frac{x^{\frac{3}{2i+1}}}{a^3c^3} + \text{etc.}}$$

ſeu facta ad communem denominatorem reductione, erit $ayx =$

$$\frac{acx^{\frac{-1}{2i+1}} + \frac{(i+1)(i+2)}{2(2i+1)} + \frac{i(i+1)(i+2)(i+3)}{2\cdot4(2i+1)^2}\cdot\frac{x^{\frac{1}{2i+1}}}{ac} + \frac{i(i^2-1)(i+2)(i+3)(i+4)}{2\cdot4\cdot6(2i+1)^3}\cdot\frac{x^{\frac{2}{2i+1}}}{a^2c^2} + \text{etc.}}{1 + \frac{i(i+1)}{2(2i+1)}\cdot\frac{x^{\frac{1}{2i+1}}}{ac} + \frac{i(i^2-1)(i+2)}{2\cdot4(2i+1)^2}\cdot\frac{x^{\frac{2}{2i+1}}}{a^2c^2} + \frac{i(i^2-1)(i^2-4)(i+3)}{2\cdot4\cdot6(2i+1)^3}\cdot\frac{x^{\frac{3}{2i+1}}}{a^3c^3} + \text{etc.}}$$

Quotiescunque igitur fuerit i numerus integer, toties huius aequationis:

$$dy + ayydx = accx^{\frac{-4i-2\pm2}{2i+1}}dx$$

integrale in terminis algebraicis poteſt exprimi. Q. E. I.

Coroll. 1.

Coroll. 1.

2. Aequatio ergo propoſita $dy + ayydx = accx^m dx$ integrationem algebraicam admittit, ſi fuerit exponens m, vel terminus huius ſeriei:

$$-0;\ -\tfrac{4}{3};\ -\tfrac{8}{5};\ -\tfrac{12}{7};\ -\tfrac{16}{9};\ -\tfrac{20}{11};\ -\tfrac{24}{13};\ \text{etc.}$$

vel ſi fuerit m terminus ex hac fractionum ſerie:

$$-\tfrac{4}{1};\ -\tfrac{8}{3};\ -\tfrac{12}{5};\ -\tfrac{16}{7};\ -\tfrac{20}{9};\ -\tfrac{24}{11};\ -\tfrac{28}{13};\ \text{etc.}$$

Coroll. 2.

3. Subſtituamus in priori integrabilitatis claſſe loco i ſucceſſiue numeros 0, 1, 2, 3, 4, etc. atque reperietur, vt ſequitur.

Si $i = 0$; huius aequationis:

I. $dy + ayydx = accdx$, integrale erit:
$ayx = acx$; ſiue $y = c$.

Si $i = 1$; huius aequationis:

II. $dy + ayydx = accx^{-\frac{4}{3}}dx$, integrale erit:

$$ayx = \frac{acx^{\frac{1}{3}}}{1 - \frac{1\cdot 2}{2\cdot 3}\frac{x^{-\frac{1}{3}}}{ac}}\ \text{ſeu}\ y = \frac{cx^{-\frac{2}{3}}}{1 - \frac{1}{3}\frac{x^{-\frac{1}{3}}}{ac}} = \frac{3acc}{3acx^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}}}$$

Si $i = 2$; huius aequationis:

III. $dy + ayydx = accx^{-\frac{8}{5}}dx$, integrale erit:

$$ayx = \frac{acx^{\frac{1}{5}} - \frac{2\cdot 1}{2\cdot 5}}{1 - \frac{2\cdot 3}{2\cdot 5}\cdot\frac{x^{-\frac{1}{5}}}{ac} + \frac{2\cdot 3\cdot 4}{2\cdot 4\cdot 5^2}\cdot\frac{x^{-\frac{2}{5}}}{a^2c^2}} = \frac{acx^{\frac{1}{5}} - \frac{1}{5}}{1 - \frac{3x^{-\frac{1}{5}}}{5ac} + \frac{3x^{-\frac{2}{5}}}{5^2a^2c^2}}$$

Si

Si $i = 3$ huius aequationis:

IV. $dy + ayydx = accx^{-\frac{12}{7}}dx$, integrale erit:

$$ayx = \frac{acx^{\frac{1}{7}} - \frac{3\cdot 2}{2\cdot 7} + \frac{3\cdot 2\cdot 1\cdot 4}{2\cdot 4\cdot 7^2}\cdot\frac{x^{-\frac{1}{7}}}{ac}}{1 - \frac{3\cdot 4}{2\cdot 7}\cdot\frac{x^{-\frac{1}{7}}}{ac} + \frac{3\cdot 4\cdot 5\cdot 2}{2\cdot 4\cdot 7^2}\cdot\frac{x^{-\frac{2}{7}}}{a^2c^2} - \frac{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7^3}\cdot\frac{x^{-\frac{3}{7}}}{a^3c^3}}$$ ſiue

$$ayx = \frac{acx^{\frac{1}{7}} - \frac{3}{7} + \frac{3\cdot 7}{7^2}\cdot\frac{x^{-\frac{1}{7}}}{ac}}{1 - \frac{6}{7}\cdot\frac{x^{-\frac{1}{7}}}{ac} + \frac{3\cdot 5}{7^2}\cdot\frac{x^{-\frac{2}{7}}}{a^2c^2} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{7^3}\cdot\frac{x^{-\frac{3}{7}}}{a^3c^3}}.$$

Si $i = 4$, huius aequationis:

V. $dy + ayydx = accx^{-\frac{16}{9}}dx$, integrale erit:

$$ayx = \frac{acx^{\frac{1}{9}} - \frac{4\cdot 3}{2\cdot 9} + \frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 9^2}\cdot\frac{x^{-\frac{1}{9}}}{ac} - \frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 5\cdot 6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 9^3}\cdot\frac{x^{-\frac{2}{9}}}{a^2c^2}}{1 - \frac{4\cdot 5}{2\cdot 9}\frac{x^{-\frac{1}{9}}}{ac} + \frac{4\cdot 5\cdot 6\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 9^2}\cdot\frac{x^{-\frac{2}{9}}}{a^2c^2} - \frac{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 3\cdot 2}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 9^3}\cdot\frac{x^{-\frac{3}{9}}}{a^3c^3} + \frac{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 9^4}\cdot\frac{x^{-\frac{4}{9}}}{a^4c^4}}$$

Si $i = 5$; huius aequationis

VI. $dy + ayydx = accx^{-\frac{20}{11}}dx$, integrale erit:

$$ayx = \frac{acx^{\frac{1}{11}} - \frac{5\cdot 4}{2\cdot 11} + \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 6}{2\cdot 4\cdot 11^2}\cdot\frac{x^{-\frac{1}{11}}}{ac} - \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 6\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 11^3}\frac{x^{-\frac{2}{11}}}{a^2c^2} + \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 11^4}\cdot\frac{x^{-\frac{3}{11}}}{a^3c^3}}{1 - \frac{5\cdot 6}{2\cdot 11}\frac{x^{-\frac{1}{11}}}{ac} + \frac{5\cdot 6\cdot 7\cdot 4}{2\cdot 4\cdot 11^2}\frac{x^{-\frac{2}{11}}}{a^2c^2} - \frac{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 4\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 11^3}\frac{x^{-\frac{3}{11}}}{a^3c^3} + \frac{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 11^4}\cdot\frac{x^{-\frac{4}{11}}}{a^4c^4} - \frac{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 11^5}\cdot\frac{x^{-\frac{5}{11}}}{a^5c^5}}.$$

Coroll. 3.

3. In poſteriori integrabilitatis ordine ſubſtituamus pariter loco i numeros 0, 1, 2, 3, 4, etc. ac reperietur, vt ſequitur.

Si

Si $i=0$; huius aequationis:

I. $dy+ayydx=accx^{-4}dx$, integrale erit:

$$ayx=\frac{acx^{-1}+\frac{1\cdot2}{2\cdot1}}{1}=1+\frac{ac}{x} \text{ ſeu } y=\frac{1}{ax}+\frac{c}{xx}$$

Si $i=1$; huius aequationis:

II. $dy+ayydx=accx^{-\frac{8}{3}}dx$, integrale erit:

$$ayx=\frac{acx^{-\frac{1}{3}}+\frac{2\cdot3}{2\cdot3}+\frac{2\cdot3\cdot4\cdot1}{2\cdot4\cdot3^2}\cdot\frac{x^{\frac{1}{3}}}{ac}}{1+\frac{1\cdot2}{2\cdot3}\cdot\frac{x^{\frac{1}{3}}}{ac}}=\frac{acx^{-\frac{1}{3}}+1+\frac{x^{\frac{1}{3}}}{3ac}}{1+\frac{x^{\frac{1}{3}}}{3ac}}$$

Si $i=2$ huius aequationis:

III. $dy+ayydx=accx^{-\frac{12}{5}}dx$, integrale erit:

$$ayx=\frac{acx^{-\frac{1}{5}}+\frac{3\cdot4}{2\cdot5}+\frac{2\cdot3\cdot4\cdot5}{2\cdot4\cdot5^2}\cdot\frac{x^{\frac{1}{5}}}{ac}+\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}{2\cdot4\cdot6\cdot5^3}\cdot\frac{x^{\frac{2}{5}}}{a^2c^2}}{1+\frac{2\cdot3}{2\cdot5}\cdot\frac{x^{\frac{1}{5}}}{ac}+\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4}{2\cdot4\cdot5^2}\cdot\frac{x^{\frac{2}{5}}}{a^2c^2}}$$

Si $i=3$; huius aequationis:

IV. $dy+ayydx=accx^{-\frac{16}{7}}dx$, integrale erit:

$$ayx=\frac{acx^{-\frac{1}{7}}+\frac{4\cdot5}{2\cdot7}+\frac{3\cdot4\cdot5\cdot6}{2\cdot4\cdot7^2}\cdot\frac{x^{\frac{1}{7}}}{ac}+\frac{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot7^3}\cdot\frac{x^{\frac{2}{7}}}{a^2c^2}+\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot7^4}\cdot\frac{x^{\frac{3}{7}}}{a^3c^3}}{1+\frac{3\cdot4}{2\cdot7}\cdot\frac{x^{\frac{1}{7}}}{ac}+\frac{2\cdot3\cdot4\cdot5}{2\cdot4\cdot7^2}\cdot\frac{x^{\frac{2}{7}}}{a^2c^2}+\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}{2\cdot4\cdot6\cdot7^3}\cdot\frac{x^{\frac{3}{7}}}{a^3c^3}}$$

Atque ex his caſibus analogia patet, cuius ope omnium caſuum, qui quidem integrationem admittunt, integralia algebraica expedite formari poterunt.

Scholion.

5. De his integralibus autem probe notandum eſt, ea non eſſe completa, neque ideo aeque late patere,

 ac

ac aequationem differentialem; id quod vel ex primo caſu $dy + ayydx = accdx$ patet, cui etſi ſatisfacit $y = c$, tamen facile intelligitur, logarithmos inſuper in ea comprehendi. Manifeſtum autem hoc eſt quoque hinc, quod in his integralibus non contineatur noua conſtans arbitraria, quae in differentiali non inerat; in quo criterium integrationis completae verſatur. Caeterum vero hinc duplicia integralia cuiusuis caſus obtinentur, eo quod c tam affirmatiue, quam negatiue, accipere licet, aequatione differentiali, quae tantum cc continet non mutata.

Problema 2.

6. Inuento ope praecedentis methodi integrali particulari pro caſibus aſſignatis aequationis $dy + ayydx = accx^m dx$, inuenire integrale completum pro iisdem caſibus.

Solutio.

Poſito $m = 2n - 2$, integrale particulare aequationis propoſitae inuentum eſt eſſe $ayx = acx^n -$

$$\frac{\frac{(n-1)}{2} - \frac{(3n-1)}{2}\frac{(nn-1)}{8n}\cdot\frac{x^{-n}}{ac} - \frac{(5n-1)}{2}\frac{(nn-1)}{8n}\frac{(9nn-1)}{16n}\cdot\frac{x^{-2n}}{a^2c^2} - \frac{(7n-1)}{2}\frac{(nn-1)}{8n}\frac{(9nn-1)}{16n}\frac{(25nn-1)}{24n}\cdot\frac{x^{-3n}}{a^3c^3} - \text{etc.}}{1 + \frac{(nn-1)}{8n}\cdot\frac{x^{-n}}{ac} + \frac{(nn-1)}{8n}\frac{(9nn-1)}{16n}\cdot\frac{x^{-2n}}{a^2c^2} + \frac{(nn-1)}{8n}\frac{(9nn-1)}{16n}\frac{(25nn-1)}{24n}\cdot\frac{x^{-3n}}{a^3c^3} + \text{etc.}}$$

cuius loco ſcribamus breuitatis gratia $y = P$. Cum igitur P ſit eiusmodi valor, per variabilem x datus, qui ſatisfaciat aequationi $dy + ayydx = accx^{2n-2}dx$, erit vtique $dP + aP^2dx = accx^{2n-2}dx$. Ponamus iam, integrale completum aequationis propoſitae $dy + ayydx =$

$= accx^{2n-2}dx$ eſſe $y = P + v$, quo valore loco y ſubſtituto habebimus hanc aequationem $dP + dv + aP^2dx + 2aPvdx + avvdx = accx^{2n-2}dx$. Cum vero ſit $dP + aP^2dx = accx^{2n-2}dx$, erit $dv + 2aPvdx + avvdx = 0$. Sit $v = \frac{1}{u}$, erit $du - 2aPudx = + adx$, quae multiplicata per $e^{-2a\int Pdx}$ denotante e numerum, cuius logarithmus hyperbolicus eſt $= 1$, fit integrabilis; erit ſcilicet aequationis $e^{-2a\int Pdx}(du - 2aPudx) = e^{-2a\int Pdx}adx$, integrale $e^{-2a\int Pdx}u = \int e^{-2a\int Pdx}adx$: ideoque $u = e^{2a\int Pdx}\int e^{-2a\int Pdx}adx$. Quo valore cum ſit $v = \frac{1}{u}$ ſubſtituto, erit integrale completum aequationis propoſitae $y = P + \frac{e^{-2a\int Pdx}}{\int e^{-2a\int Pdx}adx}$. At ex problemate primo eſt valor ipſius y particularis, quem hic ponimus $P = cx^{n-1} + \frac{dz}{azdx}$; exiſtente

$$z = x^{\frac{-n+1}{2}} + \frac{(nn-1)}{8n}\cdot\frac{x^{\frac{-3n+3}{2}}}{ac} + \frac{(nn-1)(9nn-1)}{8n \quad 16n}\cdot\frac{x^{\frac{-5n+1}{2}}}{a^2c^2} + \frac{(nn-1)(9nn-1)(25nn-1)}{8n. \quad 16n. \quad 24n}\cdot\frac{x^{\frac{-7n+1}{2}}}{a^3c^3} + \text{etc.}$$

Hinc erit $\int Pdx = \frac{cx^n}{n} + \frac{1}{a}lz$, et $e^{-2a\int Pdx} = e^{\frac{-2acx^n}{n}} : zz$. Quo valore ſubſtituto habebitur integrale completum:

$$y = cx^{n-1} + \frac{dz}{azdx} + \frac{e^{\frac{-2acx^n}{n}}}{zz\int e^{\frac{-2acx^n}{n}}adx : zz}. \quad \text{Q. E. I.}$$

Aliter.

Quemadmodum hac ratione ex vno integrali particulari inuenitur integrale completum, ita ex duobus integralibus particularibus expeditius integrale comple-tum

tum indagabitur, neque in hoc modo peruenitur ad formulam integralem, cuiusmodi eſt ea $\int e^{\frac{-2acx^n}{n}} adx:zz$, quae integrali completo, quod inuenimus, inuoluitur. Cum enim aequatio $dy+ayydx=accx^{2n-2}dx$ maneat inuariata, ſiue c affirmatiue, ſiue negatiue, accipiatur, habemus vtique duo integralia particularia, quorum prius eſt $y=P=cx^{n-1}+\frac{dz}{azdx}$, exiſtente $z=x^{\frac{-n+1}{2}}$ $+\frac{(nn-1)}{8n}\cdot\frac{x^{\frac{-3n+1}{2}}}{ac}+\frac{(nn-1)(9nn-1)}{8n\cdot 16n}\cdot\frac{x^{\frac{-5n+1}{2}}}{a^2c^2}+$ etc. Poſterius vero ſimili modo inueſtigandum erit $y=Q$ $=-cx^{n-1}+\frac{du}{audx}$; fietque $u=x^{\frac{-n+1}{2}}-\frac{(nn-1)}{8n}\cdot\frac{x^{\frac{-3n+1}{2}}}{ac}$ $+\frac{(nn-1)(9nn-1)}{8n.\,16n}\cdot\frac{x^{\frac{-5n+1}{2}}}{a^2c^2}-$ etc. qui duo valores z et u tantum ſignis inter ſe differunt. Erit ergo tam $dP+aP^2dx=accx^{2n-2}dx$, quam $dQ+aQ^2dx$ $=accx^{2n-2}dx$. Ponamus iam $R=\frac{P-y}{Q-y}$, quae aequatio ſit integralis completa propoſitae differentialis; quam formam ideo aſſumimus, quia in ea vtraque particularium $y=P$ et $y=Q$ continetur, illa nempe ſi fiat $R=0$, haec ſi $R=\infty$. Fiet ergo $QR-Ry=P-y$, hincque $y=\frac{QR-P}{R-1}$, quae dat $dy=\frac{RRdQ-QdR-RdQ-RdP+dP+PdR}{(R-1)^2}$ ſubſtituantur hic valores ſupra inuenti $dP=-aP^2dx$ $+accx^{2n-2}dx$ et $dQ=-aQQdx+accx^{2n-2}dx$, eritque $dy=accx^{2n-2}dx+\frac{aP^2dx}{R-1}-\frac{aQ^2Rdx}{R-1}+\frac{(P-Q)dR}{(R-1)^2}$ $=-a\frac{(QR-P)^2dx}{(R-1)^2}+accx^{2n-2}dx$. Ex hac aequatione reſultat haec $(P-Q)dR=-aRdx(P-Q)^2$, quae diviſa per $R(P-Q)$ dat $\frac{dR}{R}=a(Q-P)dx=-2acx^{n-1}dx$ $+$

$+\frac{du}{u}-\frac{dz}{z}$. Haec iam aequatio integrabilis exiſtit, eritque integrale $lR-lC=-\frac{2acx^n}{n}+lu-lz$. Cum vero ſit $R=\frac{P-y}{Q-y}$, erit $\frac{P-y}{Q-y}=\frac{(acx^{n-1}zdx+dz-ayzdx):z}{(-acx^{n-1}udx+du\ ayudx):u}$ $=\frac{Ce^{\frac{-2acx^n}{n}}u}{z}$. Hinc ita, quia valores ipſarum u et z per x conſtant, habebitur aequatio integralis completa

$$Ce^{\frac{-2acx^n}{n}}=\frac{dz+acx^{n-1}zdx-ayzdx}{du-acx^{n-1}udx-ayudx}=\frac{(P-y)z}{(Q-y)u}$$

Q. E. I.

Coroll. I.

7. Valor particularis, quem ſupra pro y inuenimus, ita erat comparatus, vt eſſet $y=cx^{n-1}-\frac{(K+L)}{ax(M+N)}$; exiſtente

$$K=\frac{(n-1)}{2}+\frac{(5n-1)(nn-1)}{2\cdot 8n}\cdot\frac{(9nn-1)}{16n}\cdot\frac{x^{-2n}}{a^2c^2}+\frac{(9n-1)}{2}\cdot\frac{(n^2-1)(9n^2-1)(25n^2-1)(49n^2-1)}{8n\cdot 16n\cdot 24n\cdot 32n}\cdot\frac{x^{-4n}}{a^4c^4}+\text{etc.}$$

$$L=\frac{(3n-1)(nn-1)}{2\cdot 8n}\cdot\frac{x^{-n}}{ac}+\frac{(7n-1)(nn-1)(9nn-1)(25nn-1)}{2\cdot 8n\cdot 16n\cdot 24n}\cdot\frac{x^{-3n}}{a^3c^3}+\text{etc.}$$

$$M=1+\frac{(nn-1)(9nn-1)}{8n\cdot 16n}\cdot\frac{x^{-2n}}{a^2c^2}+\frac{(nn-1)(9nn-1)(25nn-1)(49nn-1)}{8n\cdot 16n\cdot 24n\cdot 32n}\cdot\frac{x^{-4n}}{a^4c^4}+\text{etc.}$$

$$N=\frac{(nn-1)}{8n}\cdot\frac{x^{-n}}{ac}+\frac{(nn-1)(9nn-1)(25nn-1)}{8n\cdot 16n\cdot 24n}\cdot\frac{x^{-3n}}{a^3c^3}+\text{etc.}$$

Facto autem c negatiuo, erit alter valor particularis $y=-cx^{n-1}-\frac{(K-L)}{ax(M-N)}$. Erit ergo $P=\frac{acx^n(M+N)\ K-L}{ax(M+N)}$; $Q=\frac{-acx^n(M-N)-K+L}{ax(M-N)}$; et $z:u=M+N:M-N$.

Ex quibus colligitur, aequationis propoſitae: $dy + ayydx = accx^{2n-2}dx$ integrale completum fore:

$$Ce^{\frac{-2acx^n}{n}} = \frac{(acx^n - axy)(M+N) - K - L}{-(acx^n + axy)(M-N) - K + L}$$ ſiue $-C$ poſito loco C

$$Ce^{\frac{-2acx^n}{n}} = \frac{ax(cx^{n-1} - y)(M+N) - K - L}{ax(cx^{n-1} + y)(M-N) + K - L}.$$

Coroll. 2.

8. Si cc eſt numerus negatiuus, fiet c hincque L et N quantitates imaginariae, at $c\sqrt{-1}$; $L\sqrt{-1}$; et $N\sqrt{-1}$ quantitates reales: Tum autem integrale completum realiter expreſſum erit:

$$C + \frac{acx^n}{n}\sqrt{-1} = \text{A tang.} \frac{acx^n N - axyM - K}{acx^n M\sqrt{-1} - axyN\sqrt{-1} - L\sqrt{-1}}.$$

Coroll. 3.

9. Sit $c = b\sqrt{-1}$, vt habeatur haec aequatio integranda:

$$dy + ayydx + abbx^{2n-2}dx = 0.$$

Huius ergo aequationis integrale completum erit:

$$C - \frac{abx^n}{n} = \text{A tang.} \frac{abx^n N - axyM - K}{-abx^n M - axyN - L}$$ ſiue

$$C - \frac{abx^n}{n} = \text{A tang.} \frac{K - abx^n N + axyM}{L + abx^n M + axyN};$$ exiſtente

$$K = \frac{(n-1)}{2} - \frac{(5n-1)(nn-1)(9nn-1)}{2 \cdot 8n \cdot 16n} \cdot \frac{x^{-2n}}{a^2b^2} + \frac{(9n-1)(nn-1)(9nn-)(25nn-1)(49nn-1)}{2 \cdot 8n \cdot 16n \cdot 24n \cdot 32n} \cdot \frac{x^{-4n}}{a^4b^4} - \text{etc.}$$

$$L = \frac{(5n-1)(nn-1)}{2 \cdot 8n} \cdot \frac{x^{-n}}{ab} - \frac{(7n-1)(nn-1)(9nn-1)(25nn-1)}{2 \cdot 8n \cdot 16n \cdot 24n} \cdot \frac{x^{-3n}}{a^3b^3} + \text{etc.}$$

M =

$$M = 1 - \frac{(nn-1)(9nn-1)}{8n \cdot 16n} \cdot \frac{x^{-2n}}{a^2 b^2} + \frac{(nn-1)(9nn-1)(25nn-1)(49nn-1)}{8n \cdot 16n \cdot 24n \cdot 32n} \cdot \frac{x^{-4n}}{a^4 b^4} - \text{etc.}$$

$$N = \frac{(nn-1)}{8n} \cdot \frac{x^{-n}}{ab} - \frac{(nn-1)(9nn-1)(25nn-1)}{8n \cdot 16n \cdot 24n} \cdot \frac{x^{-3n}}{a^3 b^3} + \text{etc.}$$

His igitur caſibus integralia particularia, quae ſimul ſint algebraica, non dantur.

Coroll. 4.

10. Quoties ergo fuerit $n = \frac{\pm 1}{2i+1}$, denotante i numerum quemcunque integrum, expreſſiones finitae algebraicae pro litteris K, L, M et N reperiuntur. His igitur caſibus integratio aequationis huius $dy + ayydx = accx^{2n-2}dx$ ope logarithmorum, huius vero aequationis $dy + ayydx + abbx^{2n-2}dx = 0$ ope quadraturae circuli abſoluitur.

Scholion.

11. Quoniam aequationis differentialis propoſitae $dy + ayydx = accx^{2n-2}dx$ integrale completum duplici modo expreſſimus, poterimus formulae integralis $\int \frac{e^{\frac{-2acx^n}{n}}dx}{zz}$, quae in priori ineſt, valorem ex poſteriori aſſignare, huiusque adeo integrationem, quae ſaepe numero maximopere difficilis videatur, exhibere. Poſteriori modo autem inuenimus $y = \frac{QR - P}{R - 1} = \frac{P - QR}{1 - R}$ $= P + \frac{(P-Q)R}{1-R}$, at eſt $R = \frac{Ce^{\frac{-2acx^n}{n}}u}{z}$; $P = cx^{n-1}$

+

$+ \frac{dz}{azdx}$ et $Q = -cx^{n-1} + \frac{du}{audx}$. Conſequenter habebitur $y = cx^{n-1} + \frac{dz}{azdx} + \frac{(2cx^{n-1} + \frac{dz}{azdx} - \frac{du}{audx}) Ce^{\frac{-2acx^n}{n}} u}{z - Ce^{\frac{-2acx^n}{n}} u}$.

Per priorem vero integrationem eſt $y = cx^{n-1} + \frac{dz}{azdx}$ $+ \frac{e^{\frac{-2acx^n}{n}}}{zz\int e^{\frac{-2acx^n}{n}} adx : zz}$ ex quorum comparatione oritur $\frac{z - Ce^{\frac{-2acx^n}{n}} u}{Czzu(2cx^{n-1} + \frac{dz}{azdx} - \frac{du}{audx})} = \frac{\int e^{\frac{-2acx^n}{n}} adx}{zz}$.

Quae transmutatur in hanc aequationem:

$$\frac{zdx - Ce^{\frac{-2acx^n}{n}} udx}{Cz(2acx^{n-1}uzdx + udz - zdu)} = \int \frac{e^{\frac{-2acx^n}{n}}}{zz} dx.$$

Quodſi ergo fuerit:

$$z = x^{\frac{-n+1}{2}} + \frac{(nn-1)}{8n} \cdot \frac{x^{\frac{-3n+1}{2}}}{ac} + \frac{(nn-1)}{8n.} \frac{(9nn-1)}{16n} \cdot \frac{x^{\frac{-5n+1}{2}}}{a^2c^2} + \text{etc.}$$

$$u = x^{\frac{-n+1}{2}} - \frac{(nn-1)}{8n} \cdot \frac{x^{\frac{-3n+1}{2}}}{ac} + \frac{(nn-1)}{8n} \frac{(9nn-1)}{16n} \cdot \frac{x^{\frac{-5n+1}{2}}}{a^2c^2} - \text{etc.}$$

haec formula differentialis $\frac{e^{\frac{-2acx^n}{n}} dx}{zz}$ integrari poterit eritque integrale $= \frac{zdx - Ce^{\frac{-2acx^n}{n}} udx}{Cz(2acx^{n-1}uzdx + udz - zdu)}$.

Simili

Simili vero modo facto c negatiuo, quo z et u inter ſe permutantur, erit formulae differentialis $\frac{e^{+\frac{2acx^n}{n}}dx}{uu}$

integrale $= \frac{udx - Ce^{+\frac{2acx^n}{n}}zdx}{Cu(-2acx^{n-1}uzdx + zdu - udz)}$

$= \frac{Ce^{\frac{2acx^n}{n}}zdx - udx}{Cu(2acx^{n-1}uzdx + udz - zdu)}$ in quibus integrationibus C denotat eam conſtantem arbitrariam, quae per integrationem more ſolito ingreditur.

INVESTIGATIO FVNCTIONVM EX DATA DIFFERENTIALIVM CONDITIONE.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Si V denotet functionem quamcunque binarum variabilium x et y, eaque differentietur, vt prodeat eius differentiale:

$$dV = Pdx + Qdy$$

tum vero hae duae quantitates P et Q denuo differentientur, ſicque proueniat:

$$dP = pdx + rdy \text{ et } dq = sdx + qdy$$

notum eſt, ſemper fore $r = s$. Quam proprietatem quoque ita exprimere ſoleo, vt dicam, eſſe:

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right).$$

Huiusmodi ſcilicet expreſſione $\left(\frac{dP}{dy}\right)$ indico, functionem P ita differentiari, vt ſola quantitas y pro variabili habeatur, et differentiale reſultans per dy diuidi, quo pacto, quantitas finita a differentialibus libera proueniat, neceſſe eſt.

2. Quodſi ergo formula $Pdx + Qdy$ ita fuerit comparata, vt ſecundum hanc ſcribendi rationem in ea ſit $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$, hinc viciſſim concludimus, iſtam formulam

mulam $Pdx + Qdy$ re vera oriri ex differentiatione cuiuſpiam functionis V ipſarum x et y. Cum autem haec proprietas latiſſime pateat, plus inde concludere non licet, quam formulam $Pdx + Qdy$ eſſe integrabilem, neque quicquam per hanc ſolam conditionem in genere definitur, vnde vlla peculiaris proprietas eius functionis, ex cuius differentiatione eſt nata, colligi poſſet.

3. Quando autem functio V ad certum quoddam genus refertur, tum poſito $dV = Pdx + Qdy$, inter quantitates P et Q, praeter illam generalem affectionem, alia quaedam particularis relatio intercedit Ita nouimus, ſi V ſit functio nullius dimenſionis binarum variabilium x et y, tum praeter illam generalem proprietatem, qua eſt $(\frac{dP}{dy}) = (\frac{dQ}{dx})$, inſuper hanc particularem locum ſemper habere, vt ſit: $Px + Qy = 0$. Deinde ſimili modo demonſtratum extat, ſi V ſit functio homogenea binarum variabilium x et y, cuius dimenſionum numerus ſit $= n$, eius differentiale $dV = Pdx + Qdy$ ſemper ita eſſe comparatum, vt ſit

$$nV = Px + Qy.$$

Quo ergo caſu hoc inprimis notatu dignum occurrit, quod formulae differentialis $Pdx + Qdy$ integrale ſtatim aſſignari poſſit, cum ſit $V = \frac{1}{n}(Px + Qy)$.

4. Quae cum ſint demonſtrata, iam pridem in mentem mihi venit, huiusmodi quaeſtiones inuerſo modo tractare, atque in methodum inquirere, cuius ope, ſi

poſito $dV = Pdx + Q\,dy$, compertum ſit, eſſe vel $Px + Qy = 0$, vel $Px + Qy = nV$, viciſſim inueniri poſſit, functionem V vel eſſe nullius dimenſionis, vel eſſe functionem homogeneam, in qua binae variabiles x et y vbique n dimenſiones adimpleant. Scilicet nullo reſpectu, ad illas proprietates iam cognitas habito, ex hoc ſolo, quod ſit vel $Px + Q\,y = 0$, vel $Px + Q\,y = nV$, per legitima analyſeos ratiocinia elici oportet, functionem finitam V hac proprietate praeditam eſſe, vt vel ſit nullius dimenſionis, vel homogenea n dimenſionum. Intelligendum autem eſt, proprietatem generalem $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$ ſemper locum habere debere, ſine qua aequatio $dV = Pdx + Qdy$ adeo eſſet abſurda.

5. Hae quaeſtiones, quae vix adhuc tactae videntur, ampliſſimum aperiunt campum, fines analyſeos vlterius extendendi. Propoſita namque aequatione $dV = Pdx + Q\,dy$, quaeri poteſt indoles functionis V, ſi relatio quaecunque inter binas quantitates P et Q vel adeo inter ternas P, Q et V proponatur. Huiusmodi autem quaeſtiones etiamſi pene nouae videantur, tamen nullum eſt dubium, quin methodus eas rite reſoluendi maximam per totam matheſin allatura ſit vtilitatem. In problemate enim de cordis vibrantibus tota vis ſolutionis ad hoc genus eſt referenda, cum certa quadam relatione inter quantitates P et Q contineatur. Deinde etiam vniuerſam motus fluidorum ſcientiam in huiusmodi formulis differentialibus ſum complexus, vbi certa quaedam relatio inter partes differentialium praeſcribitur, ex qua autem ob defectum talis methodi vix quicquam concludere licet.

6.

6. Huiusmodi autem quaeſtiones etiam alio modo proponi poſſunt, vt ſolius functionis V, cuius natura quaeritur, mentio occurrat. Cum enim, poſito $dV = P\,dx + Q\,dy$, ſit $P = (\frac{dV}{dx})$ et $Q = (\frac{dV}{dy})$, prior quaeſtio ita enunciari poterit:

Inuenire indolem functionis V, *vt ſit:*

$$x(\frac{dV}{dx}) + y(\frac{dV}{dy}) = 0$$

poſterior vero hoc modo;

Inuenire indolem functionis V, *vt ſit:*

$$x(\frac{dV}{dx}) + y(\frac{dV}{dy}) = nV$$

ac priori quidem oſtendi debet, V eſſe functionem nullius dimenſionis ipſarum x et y; poſteriori vero, eſſe earumdem functionem homogeneam n dimenſionum. Hoc ſcribendi autem modo in genere tenendum eſt, eſſe:

$$dV = dx(\frac{dV}{dx}) + dy(\frac{dV}{dy})$$

7. Problema igitur latius patens ita ſe habebit, vt propoſita quacunque relatione inter quantitates V, $(\frac{dV}{dx})$ et $(\frac{dV}{dy})$ definiri debeat, qualis functio ſit V ipſarum x et y. Deinde etiam huiusmodi quaeſtiones ad functiones trium pluriumue variabilium extendi poſſunt; quin etiam quantitates ex duplici vel triplici differentiatione oriundae introduci poſſunt; cuiusmodi ſunt $(\frac{ddV}{dx^2})$; $(\frac{ddV}{dxdy})$; $\frac{ddV}{dy^2})$; $(\frac{d^3V}{dx^3})$; $(\frac{d^3V}{dx^2dy})$ etc. quarum ſignificatus ita ſe habet, vt verbi gratia $(\frac{d^3V}{dx^2dy})$ oriatur, ſi primo V differentietur ſola x variabili ſumta, et differentiale per dx diuidatur, vt prodeat $(\frac{dV}{dx})$; tum vero haec quantitas denuo differentietur, ſola x variabili

ſumta, vt eius differentiale per dx diuiſum praebeat $\left(\frac{ddV}{dx^2}\right)$, quod denique rurſus differentiatum, ſumta ſola y variabili, et per dy diuiſum, dabit $\left(\frac{d^3V}{dx^2dy}\right)$.

8 Dum autem hunc ſignandi modum recipimus, notandum eſt, eſſe:

$$\left(\frac{ddV}{dxdy}\right) = \left(\frac{ddV}{dydx}\right) \text{ et}$$
$$\left(\frac{d^3V}{dx^2dy}\right) = \left(\frac{d^3V}{dxdydx}\right) = \left(\frac{d^3V}{dydx^2}\right)$$

Perinde ſcilicet eſt, quonam ordine quantitates x et y, quarum alterutra in qualibet differentiatione ſola variabilis aſſumitur, diſponantur, dummodo praeſcriptus differentiationum numerus inſtituatur. Quin etiam ſi V ſit functio trium variabilium x, y, z, ſimilis conuenientia locum habet; erit enim:

$$\left(\frac{d^3V}{dxdydz}\right) = \left(\frac{d^3V}{dxdzdy}\right) = \left(\frac{d^3V}{dydxdz}\right) = \left(\frac{d^3V}{dydzdx}\right) = \left(\frac{d^3V}{dzdxdy}\right) = \left(\frac{d^3V}{dzdydx}\right)$$

hic autem meas inueſtigationes tantum ad functiones duarum variabilium reſtringam.

9. Hoc modo deducimur non ſolum ad inſolitas et etiamnum vix tractatas quaeſtiones, ſed etiam ad noua ſigna, quibus adhuc parum ſumus adſueti; vnde haec methodus, cuius culturam tantopere expetere debemus, non immerito tanquam noua plane Analyſeos pars eſt ſpectanda. Non parum igitur mihi praeſtitiſſe videbor, ſi prima tantum iſtius methodi fundamenta conſtituero, neque ob rei nouitatem vix minimam aedificii iis ſuperſtruendi partem polliceri audeo. Tempore ſine dubio haud exiguo et indefeſſo labore opus erit, antequam iſtam Analyſeos partem, in ſe

certe

certe difficillimam, non dicam perficere, ſed tantum ad vberiorem vſum accommodare liceat. Quam ob rem ea, quae mihi adhuc in hoc genere ſunt reperta, ordine ac dilucide exponere conſtitui, quo aliis, quos dignitas argumenti ad eundem laborem ſuſcipiendum alliciet, prima quaſi obſtacula de via remoueam, animosque ad nouum hoc inueſtigationum genus praeparem.

10. Antequam autem hoc munere fungar, principia quaedam per ſe perſpicua praemittenda ſentio. Primo ſcilicet, ſi fuerit $(\frac{dV}{dx}) = 0$, intelligitur, functionem V prorſus non ab x pendere, ſed ex ſola altera variabili y cum conſtantibus eſſe conflatam, ſicque etiam formam $(\frac{dV}{dy})$ fore functionem ipſius y tantum. Viciſſim autem ſi $(\frac{dV}{dy})$ fuerit functio ipſius y tantum, ipſa quantitas V erit aggregatum ex functione ipſius y tantum, et ex functione ipſius x tantum; quo ergo caſu forma $(\frac{dV}{dx})$ erit functio ipſius x tantum. Deinde ſi fuerit $dV = R\,ds$, neceſſe eſt, vt R ſit functio ipſius S, vel S ipſius R, vnde et V erit functio ipſius S, vel ipſius R; quia alioquin integrale $\int R\,ds$ non determinaretur. His igitur poſitis principiis primum binas quaeſtiones initio memoratas, quae huic inueſtigationi anſam praebuerunt, reſoluam, deinceps ad alias progreſſurus.

Problema I.

11. Exiſtente $dV = P\,dx + Q\,dy$, ſi fuerit $Px + Qy = 0$, inuenire, qualis V ſit functio ipſarum x et y, vt huic conditioni ſatisfiat.

Solutio.

Solutio.

Cum igitur inter quantitates P et Q haec conditio praeſcribatur, vt ſit $Px+Qy=0$, erit $Q=-P\frac{x}{y}$, qui valor in aequalitate $dV=Pdx+Qdy$ ſubſtitutus dabit:

$$dV=P(dx-\frac{xdy}{y})=\frac{P(ydx-xdy)}{y}$$

neceſſe igitur eſt, vt formula $\frac{P(ydx-xdy)}{y}$ ſit integrabilis. Quae vt ad formam RdS perducatur, ita repraeſentetur:

$$dV=Py.\frac{ydx-xdy}{yy}$$

Sumto enim $\frac{ydx-xdy}{yy}=dS$ et $S=\frac{x}{y}$, cum ſit $dV=PydS$, neceſſe eſt, vt Py ſit functio ipſius S, ideoque et V erit functio ipſius S, hoc eſt, ipſius $\frac{x}{y}$. Proprietas igitur praeſcripta, qua eſt $Px+Qy=0$, huiusmodi indolem functionis V declarat, vt ſit V functio quaecunque ipſius $\frac{x}{y}$; hinc autem manifeſtum eſt, pro V prodire functionem nullius dimenſionis ipſarum x et y.

Coroll. 1.

12. Quodſi ergo ob $P=(\frac{dV}{dx})$ et $Q=(\frac{dV}{dy})$ haec proprietas functionis V proponitur, vt ſit $x(\frac{dV}{dx})+y(\frac{dV}{dy})=0$ inde certo concludimus, V eſſe functionem formulae $\frac{x}{y}$ ſeu, quod eodem redit, eſſe functionem nullius dimenſionis ipſarum x et y.

Coroll. 2.

13. Viciſſim ergo hinc id, quod quidem iam dudum conſtat, confirmatur, vt, quoties fuerit V functio

ctio nullius dimenſionis ipſarum x et y, toties quoque fore $x(\frac{dV}{dx})+y(\frac{dV}{dy})=0$. Verum vti hoc facillime oſtenditur, ita eius inuerſum ſingulari demonſtratione indigebat.

Scholion.

14. Vis huius ſolutionis in eo eſt poſita, quod differentiale functionis V ad iſtam formam $dV=R\,dS$ reduxerim, ex qua, cum vnicum differentiale dS contineat, liquido ſequebatur, V eſſe functionem quantitatis S tantum; erat autem $S=\frac{x}{y}$, et notum eſt, omnes functiones ipſius $\frac{x}{y}$ ſimul eſſe functiones nullius dimenſionis et viciſſim. Eodem ergo principio in ſolutione ſequentium problematum vtendum eſſe intelligetur. Caeterum ſine litteris P et Q problema tam proponi, quam reſolui, potuiſſet: ſi ſcilicet quaeri debeat indoles functionis V, vt ſit $x(\frac{dV}{dx})+y(\frac{dV}{dy})=0$, cum ſit $dV=dx(\frac{dV}{dx})+dy(\frac{dV}{dy})$, ob $(\frac{dV}{dy})=-\frac{x}{y}(\frac{dV}{dx})$, erit

$$dV=(dx-\frac{x\,dy}{y}).(\frac{dV}{dx})=y(\frac{dV}{dx}).\,d.\frac{x}{y}$$

manifeſtum eſt, V neceſſario eſſe debere huius vnius quantitatis $\frac{x}{y}$. Quemadmodum autem, ſi fuerit $dV=R\,dr$, recte concluditur, eſſe V functionem ipſius r tantum, ita porro, ſi fuerit $dV=R\,dr+S\,ds$, concludere debemus, V eſſe functionem binarum variabilium r et s; quod principium vtilitatem habebit, in indaganda indole functionum trium variabilium, dum quaepiam conditio differentialium proponitur.

Problema 2.

15. Exiſtente $dV = Pdx + Qdy$, definire indolem functionis V, vt fiat $Px + Qy = nV$, denotante n numerum quemcunque.

Solutio.

Ex conditione praeſcripta $Px + Qy = nV$ eliciatur altera quantitatum P et Q, puta $Q = \frac{nQ}{y} - \frac{Px}{y}$, qui valor in aequalitate differentiali ſubſtitutus dabit:

$$dV = Pdx + \frac{nVdy}{y} - \frac{Pxdy}{y}$$

cui ſtatim iſta forma inducatur:

$$dV - \frac{nVdy}{y} = Py\frac{(ydx - xdy)}{yy} = Pyd\frac{x}{y}$$

quae, vt prius membrum integrabile reddatur, per y^{-n} multiplicetur, ſicque prodibit:

$$d.y^{-n}V = Py^{1-n}d.\frac{x}{y}$$

vnde concludimus, eſſe $y^{-n}V$ functionem quantitatis $\frac{x}{y}$, ſeu functionem nullius dimenſionis binarum variabilium x et y. Denotet ergo Z huiusmodi functionem quamcunque nullius dimenſionis, et cum ſit $y^{-n}V = Z$, erit $V = y^nZ$; talis autem expreſſio continet omnes functiones homogeneas ipſarum x et y, quarum dimenſionum numerus eſt $= n$.

Coroll. 1.

16. Quando ergo nouerimus, functionem V eius eſſe indolis, vt ſit $nV = x(\frac{dV}{dx}) + y(\frac{dV}{dy})$, pro certo affirmare poterimus, V eſſe functionem homogeneam, in

in qua binae variabiles vbique n dimenſiones adimpleant.

Coroll. 2.

17. Quodſi ergo ponatur $dV = Pdx + Qdy$, erunt etiam P et Q functiones homogeneae ipſarum x et y, ſed quarum dimenſionum numerus eſt $n-1$, ſcilicet vno ordine inferior.

Coroll. 3.

18. Quare ſi P et Q fuerint functiones homogeneae binarum variabilium x et y, quarum numerus dimenſionum ſit idem, puta $= n-1$; ac ſi praeterea fuerit $(\frac{dP}{dy}) = (\frac{dQ}{dx})$, ita vt $Pdx + Qdy$ ſit formula differentialis completa; tum eius integrale facillime aſſignatur. Erit quippe:

$$\int (Pdx + Qdy) = \frac{Px + Qy}{n}.$$

Dummodo ergo n non euaneſcat, integrale huiusmodi formularum ſine vlla alia operatione exhiberi poteſt.

Scholion.

19. En ergo ſolutionem ambarum quaeſtionum, quas initio commemoraui; quae cum iam contineat ſpecimen methodi, qua in hoc genere eſt vtendum, eandem ad ſolutionem aliorum ſimilium problematum adhibere licebit. Cum igitur hic proponatur certa quaedam relatio inter functionem V et quantitates inde deriuatas $P = (\frac{dV}{dx})$ et $Q = (\frac{dV}{dy})$, ex qua indolem functionis V definiri oportet, vt ordinem quendam in huiusmodi quaeſtionibus ſeruem, quoniam tam P et Q, quam V, ſunt functiones ipſarum x et y; primum in-

dolem alterius litterarum P et Q dari aſſumam; deinde ad eiusmodi problemata progrediar, in quibus relatio quaedam inter P et Q praeſcribitur; tum vero ad talia, vbi vel inter P et V, vel inter Q et V, relatio quaedam intercedere debet. Denique vero relationem datam ad omnes tres quantitates V, P et Q extendi aſſumam, quemadmodum in problemate ſecundo eſt factum. Cum autem hic tantum ad quantitates V, $(\frac{dV}{dx})$, $(\frac{dV}{dy})$ reſpiciamus, euidens eſt, huiusmodi inueſtigationes multo latius extendi poſſe, dum relatio praeſcripta alias quantitates ex V deriuatas, veluti $(\frac{ddV}{dx^2})$, $(\frac{ddV}{dxdy})$, et $(\frac{ddV}{dy^2})$, complectitur. Verum tantum abeſt, vt omnium iſtiusmodi problematum ſolutiones promittere audeam, vt potius ea tantum, quae ſunt faciliora, ſim euoluturus. Mox enim patebit, innumerabilia eiusmodi problemata proponi poſſe, quorum ſolutiones primos hos conatus longe ſuperent, neque antequam haec quaſi noua Analyſeos pars penitius fuerit exculta, ſperari queant.

Problema 3.

20. Exiſtente $dV = Pdx + Qdy$, ſi P fuerit functio ipſius x tantum, definire indolem functionis V.

Solutio.

Ex parte differentialis Pdx iam functionem V inuenire poſſe notum eſt, dum ſpectata y vt conſtante, differentiale Pdx integratur, conſtans arbitraria autem adiicienda alteram variabilem y vtcunque inuoluere aſſumi-

aſſumitur. Cum igitur P ſit functio ipſius x tantum, erit $\int P dx$ etiam eiusmodi functio, quae ſit $= X$, et conſtans addenda per Y functionem quamcunque ipſius y tantum repraeſentetur. Hinc ergo prodibit $V = X + Y$, ſeu indoles quaeſita functionis V in hoc conſiſtet, vt ſit V aggregatum duarum functionum, alterius ipſius x tantum, alterius vero ipſius y tantum.

Corollarium.

21. Cum ergo hinc fiat $dV = dX + dY$, manifeſtum eſt, ſi P fuerit functio ipſius x tantum, tum Q fore functionem ipſius y tantum, quae quidem proprietas per ſe eſt notiſſima.

Problema 4.

22. Exiſtente $dV = P dx + Q dy$, ſi P fuerit functio ipſius y tantum, definire indolem functionis V.

Solutio.

Cum P ſit functio ipſius y tantum, ex ſola parte differentialis $P dx$, ſpectata y vt conſtante, functio V ita definitur, vt ſit $V = Px + Y$, denotante Y functionem quamcunque ipſius y. Quare indoles quaeſita functionis V in hoc conſiſtet, vt deſignantibus P et Y functiones quaſcunque ipſius y, forma functionis V ſemper ſit huiusmodi $V = Px + Y$.

Coroll. 1.

23. Si ergo $P = (\frac{dV}{dx})$ ſit functio ipſius y tantum, cum fiat $dV = P dx + x dP + dY$, erit $Q = \frac{x dP + dY}{dy}$, ſeu ob $\frac{dP}{dy} = (\frac{ddV}{dx dy})$, fiet $Q = x(\frac{ddV}{dx dy}) + \frac{dY}{dy}$.

Coroll. 2.

24. Quoties igitur fuerit $(\frac{dV}{dx})$ functio ipſius y tantum, toties neceſſe eſt, vt ſit $(\frac{dV}{dy}) = x(\frac{ddV}{dx\,dy} + \frac{dY}{dy}$, vbi $\frac{dY}{dy}$ denotare poteſt functionem quamcunque ipſius y tantum. Vnde viciſſim colligere licet, ſi fuerit $(\frac{dV}{dy}) = x(\frac{ddV}{dx\,dy}) + f.y$, fore $(\frac{dV}{dx})$ functionem ipſius y tantum.

Coroll. 3.

25. Simili modo oſtendetur, ſi $Q = (\frac{dV}{dy})$ fuerit functio ipſius x tantum, fore $V = Qy + X$, denotante X functionem quamcunque ipſius x tantum: tum vero etiam, ſi fuerit $(\frac{dV}{dx}) = y(\frac{ddV}{dx\,dy}) + f.x$, fore $(\frac{dV}{dy})$ functionem ipſius x tantum.

Problema 5.

26. Exiſtente $dV = Pdx + Qdy$, ſi fuerit P functio homogenea ipſarum x et y, cuius dimenſionum numerus ſit $= n$, definire indolem functionis V.

Solutio.

Cum P ſit functio homogenea n dimenſionum, ſi pars differentialis Pdx integretur, ſpectata y vt conſtante, integrale erit functio homogenea $n+1$ dimenſionum, ſit Z talis functio homogenea quaecunque, eritque $V = Z + Y$, denotante Y functionem quamcunque ipſius y tantum, in quo conſiſtit indoles quaeſita functionis V.

Coroll.

Coroll.

27. Simili ergo modo oſtendetur, ſi fuerit Q functio homogenea n dimenſionum, fore $V = Z + X$, denotante, vt ante, Z functionem homogeneam quamcunque $n + 1$ dimenſionum, et X ipſius x tantum.

Problema 6.

28. Exiſtente $dV = Pdx + Qdy$, ſi fuerit $Q = nP$, definire indolem functionis V.

Solutio.

Cum ſit $Q = nP$, erit $dV = P(dx + ndy)$: quare, poſito $x + ny = s$, fiet $dV = Pds$. Ex V valorem certum habere nequit, niſi ſit P functio ipſius s, ex qua etiam V erit functio ipſius s. Conſequenter ſi fuerit $Q = nP$, indoles quantitatis V in hoc conſiſtet, vt ſit V functio quaecunque formulae $x + ny$; ſeu ſi character Φ adhibeatur ad functionem quamcunque quantitatis, cui praefigitur, deſignandam, erit $V = \Phi : (x + ny)$.

Problema 7.

29. Exiſtente $dV = Pdx + Qdy$, ſi fuerit $Py + Qx = 0$, inuenire indolem functionis V.

Solutio.

Cum ſit $Py + Qx = 0$, erit $Q = -\frac{Py}{x}$, atque hinc $dV = Pdx - \frac{Pydy}{dx} = \frac{P}{x}(xdx - ydy)$ Poſito ergo $xx - yy = s$, ob $xdx - ydy = \frac{1}{2}ds$, fit $dV = \frac{P}{2x}ds$. Quae formu-

formula cum per hypotheſin ſit integrabilis, neceſſe eſt, vt ſit $\frac{P}{2x}$ functio ipſius s, vnde etiam V prodibit functio ipſius $s = xx - yy$. Quocirca indoles quaeſita in hoc conſiſtet, vt V ſit functio quaecunque quantitatis $xx - yy$.

Problema 8.

30. Exiſtente $dV = Pdx + Qdy$, ſi fuerit $Q = Pp$, dum p exprimit functionem quamcunque datam ipſarum x et y, definire indolem functionis V.

Solutio.

Habebimus ergo $dV = Pdx + Ppdy = P(dx + pdy)$. Iam conſideretur formula $dx + pdy$, quae ſi non fuerit per ſe integrabilis, dabitur multiplicator q, qui eam reddat integrabilem. Sit ergo $qdx + pqdy = ds$, eritque s functio quoque data ipſarum x et y, et ob $dx + pdy = \frac{ds}{q}$, habebitur $dV = \frac{P}{q} ds$. Neceſſe igitur eſt, vt haec formula ſit integrabilis, ideoque indoles quaeſita in hoc conſiſtet, vt ſit V functio quaecunque quantitatis s, quae quomodo ex x et y ſit compoſita, ex conditione quantitatis datae p colligi debet.

Coroll. 1.

31. Problema hoc ſatis late patet, cum in eo ratio quaecunque inter quantitates P et Q, ſeu $(\frac{dV}{dx})$ et $(\frac{dV}{dy})$ proponatur. Si enim ſit $P : Q = 1 : p$, quaecunque functio ipſarum x et y pro p fuerit data, qualis futura ſit functio V, definiri poteſt.

Coroll.

Coroll. 2.

32. Quanquam autem ſemper multiplicator q exiſtit, qui formulam $dx + pdy$ integrabilem reddit, tamen ſaepe euenire poteſt, vt ob defectum analyſeos hic multiplicator aſſignari nequeat. Atque his caſibus ſolutio problematis impeditur.

Coroll. 3.

33. Alio autem loco oſtendi, huiusmodi multiplicatores ſemper exhiberi poſſe, ſi aequatio $dx + pdy = 0$ reſolui queat. Quare niſi p eiusmodi fuerit functio ipſarum x et y, vt aequatio $dx + pdy$ reſolui poſſit, huic analyſeos defectui tribui debet, ſi problema reſolui nequeat.

Problema 9.

34. Si ſint X et Y functiones datae, illa ipſius x tantum, haec vero ipſius y tantum, tum vero p ſit functio etiam data ipſarum x et y: definire indolem functionis V, vt poſito $dV = Pdx + Qdy$, ſit $Q = (P + X)p + Y$.

Solutio.

Cum igitur ſit $Q = (P + X)p + Y$, erit aequatio differentialis $dV = Pdx + Ppdy + Xpdy + Ydy$, quae ad hanc reducitur formam:

$$dV = (P + X)(dx + pdy) - Xdx + Ydy$$

vbi partes Xdx et Ydy per ſe ſunt integrabiles. Quaeratur ergo iterum multiplicator q formulam $dx + pdy$

 inte-

integrabilem reddens; ſitque $q(dx+pdy)=ds$, atque erit:

$$dV=\frac{P+X}{q}ds-Xdx+Ydy$$

quae forma cum per hypotheſin ſit integrabilis, neceſſe eſt, vt $\frac{P+X}{q}$ ſit functio ipſius s tantum, quae ſi ponatur $=S$, prodibit $V=\int Sds-\int Xdx+\int Ydy$; quae eſt indoles deſideratae functionis V.

Coroll. 1.

35. Cum igitur ex data functione p definiatur functio s, ſi pro Σ capiatur functio quaecunque huius quantitatis s, functio quaeſita V ita debet eſſe comparata, vt ſit

$$V=\Sigma-\int Xdx+\int Ydy.$$

Coroll. 2.

36. Haec igitur adiectio functionum X et Y ſolutionem problematis non reddidit difficiliorem; dummodo X ſit functio ipſius x tantum, et Y ipſius y tantum. Verum ſolutio, vt ante, pendet a reſolutione aequationis differentialis $dx+pdy=0$, quae ſi vires noſtras ſuperet, etiam problema reſoluere non valemus.

Coroll. 3.

37. Poſſunt etiam loco X et Y aliae functiones binarum variabilium x et y, puta M et N, aſſumi, dummodo formula $Mdx+Ndy$ integrationem admittat. Si enim haec conditio proponatur, vt ſit $Q-N=(P-M)p$, functio quaeſita V ita prodibit expreſſa:

$$V=\Sigma+\int(Mdx+Ndy).$$

Problema

Problema 10.

38. Exiſtente $dV = Pdx + Qdy$, inuenire, qualis ſit V functio ipſarum x et y, vt fiat $Q = \frac{Py}{x} + nx$.

Solutio.

Cum ſit $Q = \frac{Py}{x} + nx$, erit $dV = \frac{P}{x}(xdx + ydy) + nxdy$. Statuatur $xx + yy = ss$, vt ſit $x = \sqrt{(ss - yy)}$, ac fiet

$$dV = \frac{Ps}{x} ds + nxdy = \frac{Ps}{x} ds + ndy\sqrt{(ss - yy)}$$

vnde patet, V eſſe functionem ipſarum y et s, et quidem talem, vt poſita s conſtante ea differentiata praebeat $ndy\sqrt{(ss - yy)}$. Quare viciſſim functio V reperietur, ſi formula $ndy\sqrt{(ss - yy)}$, ſpectato s vt conſtante, integretur, et inſuper functio quaecunque ipſius s adiiciatur. Cum igitur ſit $\int ndy\sqrt{(ss - yy)} = \frac{1}{2}ny\sqrt{(ss - yy)} + \frac{1}{2}nss \text{ A ſin.} \frac{y}{s}$, erit Φ pro ſigno functionis cuiuscunque aſſumendo:

$$V = \tfrac{1}{2}nxy + \tfrac{1}{2}n(xx + yy) \text{ A tang.} \frac{y}{x} + \Phi : (xx + yy)$$

in qua forma functio quaeſita V ſemper debet contineri.

Scholion.

39. Hoc exemplum, vtut valde particulare, tamen non continetur in problemate praecedente, neque in eius amplificatione ipſi in coroll. poſtremo illata, quoniam in formula reducta membrum $nxdy = ndy\sqrt{(ss - yy)}$ non eſt integrabile. Quare probe notetur artificium, quo hic ſum vſus, et quod in hoc

conſiſtit, quod valorem differentialis dV ad duas alias variabiles s et y, ſcilicet $dV = R\,ds + T\,dy$, reuocaui, cuius alterum membrum $T\,dy$ abſolute datur, vnde problema ad primum genus pertinet, in quo binarum quantitatum P et Q alterutra eſt cognita. Huiusque artificii ope problema ſequens multo latius patens reſolui poterit.

Problema II.

40. Si ſint p et t functiones datae quaecunque binarum variabilium x et y, definire indolem functionis V, vt poſito $dV = P\,dx + Q\,dy$ ſit $Q = Pp + t$.

Solutio.

Habebitur ergo, ſubſtituto pro Q iſto valore:

$$dV = P(dx + p\,dy) + t\,dy$$

vbi pro formula differentiali $dx + p\,dy$ iterum idoneus multiplicator q quaeratur, qui eam integrabilem reddat. Sit ergo $q(dx + p\,dy) = ds$, et iam quantitas s tanquam noua variabilis introducatur, per quam et y altera variabilis x definiatur. Hoc modo x aequabitur cuipiam functioni datae ipſarum s et y, quae in t vbique loco x ſcribatur, ſicque fiet t functio quoque data ipſarum s et y. Cum ergo ob $dx + p\,dy = \frac{ds}{q}$ ſit $dV = \frac{P}{q}\,ds + t\,dy$, erit V eiusmodi functio ipſarum s et y, quae ſpectata s vt conſtante differentiata praebeat $t\,dy$, quare viciſſim pro functione V inuenienda integretur formula differentialis $t\,dy$, ſpectata s vt conſtante, ſit integrale hoc modo proueniens $\int t\,dy = T$, quod igitur etiam datur, tum quia quantitas P non datur,

datur, erit $V = T + \Phi . s$. Denique hic pro s et in T reſtituatur valor ipſius s vi x et y, atque patebit, quomodo functio V ex x et y ſit compoſita.

Exemplum.

41. *Quaeratur indoles functionis* V, *vt poſita* $\sqrt{V} = Pdx + Qdy$, *ſit* $Px + Qy = n(xx + yy)$

Cum ergo ſit $Q = -\frac{Px}{y} + \frac{n(xx+yy)}{y}$, erit $p = -\frac{x}{y}$ et $t = \frac{n(xx+yy)}{y}$, vnde $dx + p\,dy = dx - \frac{x\,dy}{y}$. Capiatur $q = \frac{1}{y}$, erit $ds = \frac{dx}{y} - \frac{x\,dy}{yy}$ et $s = \frac{x}{y}$; hincque $x = sy$ et $t = ny(ss+1)$. Quare ſpectata s vt conſtante, habebitur $\int t\,dy = \frac{1}{2}nyy(ss+1) = \frac{1}{2}n(xx+yy) = T$; ſicque tandem prodit:

$$V = \tfrac{1}{2}n(xx+yy) + \Phi . \tfrac{x}{y}$$

vbi notandum eſt, $\Phi : \frac{x}{y}$ exprimere functionem quamcunque nullius dimenſionis binarum variabilium x et y.

Scholion.

42. Feliciter igitur expediuimus caſum, quo relatio inter P et Q per aequationem quamcunque primi gradus exprimitur, in qua ſcilicet quantitates P et Q non vltra primam dimenſionem aſſurgunt Ex tali enim aequatione Q ſemper ita definietur, vt ſit $Q = Pp + t$, exiſtentibus p et t functionibus quibuscunque datis ipſarum x et y. Verum hic iterum aqua haeret, quoties aequationem $dx + p\,dy = 0$ reſoluere non licet, quia tum quantitas s inueniri nequit. Tum vero etiamſi haec quantitas s ſit inuenta, cum fuerit imprimis tranſcen-

 dens,

dens, ex ea plerumque difficillimum erit, variabilem x definire, ita vt tantum binae s et y in calculo ſuperſint. Poterunt quidem ſubſidia excogitari, quibus tametſi ex functione data t variabilis x non eliminetur, tamen formulae tdy id integrale T erui queat, quod prodire debet, ſpectata quantitate s vt conſtante. Verum quantaecunque ſint iſtae difficultates, eae non huic methodo, quam adumbrare coepi, ſunt imputandae. Videamus ergo quousque nobis progredi liceat, ſi relatio inter P et Q per aequationem vel ſecundi, vel ſuperiorum graduum detur.

Problema 12.

43 Exiſtente $dV = Pdx + Qdy$, definire indolem functionis V, vt fiat $PQ = \alpha$.

Solutio.

Cum ſit $Q = \frac{\alpha}{P}$, erit $dV = Pdx + \frac{\alpha dy}{P}$, quaeriturque, qualis functio debeat eſſe P, vt iſta formula differentialis $Pdx + \frac{\alpha dy}{P}$ fiat integrabilis. Adhibeamus hic transformationem integralium obuiam, qua eſt $\int z\,du = zu - \int u\,dz$, ac reperietur:

$$V = Px + \frac{\alpha y}{P} - \int x\,dP + \int \frac{\alpha y\,dP}{PP}.$$

Quare neceſſe eſt, vt haec formula differentialis $dP(\frac{\alpha y}{PP} - x)$ integrabilis exiſtat; id quod fieri nequit, niſi $\frac{\alpha y}{PP} - x$ ſit functio ipſius P; quo caſu etiam integrale $\int dP(\frac{\alpha y}{PP} - x)$ fiet functio ipſius P. Denotet ergo Π functionem quamcunque ipſius P, ac ponatur $\frac{\alpha y}{PP} - x = \Pi$, ex cuius

ius aequationis reſolutione quantitas P per x et y definiri intelligitur. Inuenta autem hac functione P habebimus:

$$V = Px + \frac{\alpha y}{P} + \int \Pi \, dP.$$

Coroll. 1.

44 Caſus ergo ſimpliciſſimus, quo huic problemati ſatisfit, eſt ſi $\Pi = 0$, quo fit $P = \sqrt{\frac{\alpha y}{x}}$, et $\int \Pi \, dP =$ conſt. Habebimus ergo

$$V = 2\sqrt{\alpha x y} + \text{Conſt.}$$

nam ob $dV = \frac{dx\sqrt{\alpha y}}{\sqrt{x}} + \frac{dy\sqrt{\alpha x}}{\sqrt{y}}$ erit vtique $PQ = \alpha$.

Coroll. 2.

45. Tum ſumto $\Pi = \beta$, erit $P = \frac{\alpha y}{x+\beta}$ et $\int \Pi \, dP = \beta P$. Hoc ergo caſu conſequemur ſequentem functionem ſatisfacientem:

$$V = x\sqrt{\frac{\alpha y}{x+\beta}} + \sqrt{\alpha y(x+\beta)} + \beta\sqrt{\frac{\alpha y}{x+\beta}} = 2\sqrt{\alpha y(x+\beta)}$$

et generalius ſatisfacere manifeſtum eſt

$$V = 2\sqrt{\alpha(x+\beta)(y+\gamma)}.$$

Coroll. 3.

46. Si velimus functiones magis compoſitas, quae tamen exhiberi queant, ſit $\Pi = \beta PP$, ideoque $\int \Pi \, dP = \frac{1}{3}\beta P^3$. At cum habeamus:

$$\frac{\alpha y}{PP} - x = \beta PP \text{ ſeu } P^4 = \frac{-xPP + \alpha y}{\beta}, \text{ fiet}$$

$$PP = \frac{-x + \sqrt{(xx + 4\alpha\beta y)}}{2\beta}, \text{ vnde ob}$$

$$V = \frac{PPx + \alpha y + \frac{1}{3}\beta P^4}{P} = \frac{2PPx + 4\alpha y}{3P}$$

et

et ſubſtitutione abſoluta:

$$V = \sqrt{\tfrac{2}{9\beta}}\left((xx + 4\alpha\beta y)^{\frac{3}{2}} + x(12\alpha\beta y - x^3)\right).$$

Scholion 1.

47. Eodem modo reſolui poſſe patet problema, ſi Q debeat eſſe functio quaecunque ipſius P. Ponatur enim $dQ = R\,dP$, et fiet $V = Px + Qy - \int (x + Ry)\,dP$. Oportet ergo eſſe $x + Ry$ functionem ipſius P, cuius etiam R eſt functio data. Quare ſi ponatur, vt ante, $x + Ry = \Pi$, ex hac aequatione P per x et y definietur; quo valore deinceps in Q, R et Π ſubſtituto obtinebitur functio $V = Px + Qy - \int \Pi\,dP$ per ſolas binas variabiles x et y expreſſa.

Exemplum.

48. Quaeratur functio V, vt poſito $dV = P\,dx + Q\,dy$, ſit $PP + QQ = aa$, ſeu $Q = \sqrt{(aa - PP)}$: hincque $R = \frac{-P}{\sqrt{(aa - PP)}}$, et $x - \frac{Py}{\sqrt{(aa - PP)}} = \Pi$, vnde P debet definiri. Sumatur autem $\Pi = 0$, fiet $P = \frac{ax}{\sqrt{(xx + yy)}}$, et $Q = \frac{ay}{\sqrt{(xx + yy)}}$, et $V = a\sqrt{(xx + yy)}$.

Scholion 2.

49. At ſi Q non ſolum per P detur, ſed etiam variabiles x et y vtcunque in eius determinationem ingrediantur, tum hoc modo negotium non expedire licet. Verum his caſibus perpendendum eſt, quemadmodum P et Q vt functiones ipſarum x et y conſiderantur, ita quaternarum P, Q, x et y binas quasque

vt

vt functiones binarum reliquarum conſiderari poſſe. Quare quouis caſu oblato non ad hanc formulam $Pdx + Qdy$ ſumus adſtricti, quam integrabilem reddi oporteat, ſed negotium pariter conficiemus, ſi vel hanc $-xdP + Qdy$, vel hanc $Pdx - ydQ$, vel hanc $-xdP - ydQ$ integrabilem reddamus; quin etiam per ſubſtitutiones nouae variabiles introduci poſſunt, quo pacto methodus ſoluendi vehementer amplificabitur; cuius rei aliquot ſpecimina attuliſſe iuuabit.

Problema 13.

50. Exiſtente $dV = Pdx + Qdy$, ſi Q detur vtcunque per x et P, inuenire indolem functionis V.

Solutio.

Cum Q ponatur dari per x et P, habebitur aequatio inter ternas quantitates x, P et Q, ex quo etiam P definiri poterit per x et Q, ita vt P aequetur certae cuipiam functioni ipſarum x et Q. Sumantur ergo x et Q pro binis variabilibus, ex quibus reliqua omnia ſint determinanda, et cum ſit:

$$V = Qy + \int (Pdx - ydQ)$$

neceſſe eſt, vt formula differentialis $Pdx - ydQ$ ſit integrabilis, cuius integrale ſpectetur tanquam functio ipſarum x et Q. Cum igitur P per x et Q detur, quarta autem variabilis y indefinita relinquatur, hoc integrale $\int (Pdx - ydQ)$ inuenietur, ſi ſpectata Q vt conſtante formula Pdx integretur, et ad integrale functio quaecunque ipſius Q adiiciatur. Sit igitur integra-

le hoc modo ſumtum $\int P dx = R$, eritque R functio data ipſarum x et Q, vnde fiat $dR = P dx + S dQ$, vtraque ſcilicet quantitate x et Q pro variabili ſumta. Quo poſito habebimus $\int (P dx - y dQ) = R + \Phi . Q$, et $V = Q y + R + \Phi . Q$. Deſignetur iam differentiale ipſius $\Phi : Q$ per $dQ . \Phi' : Q$, eritque

$$P dx - y dQ = P dx + S dQ + dQ . \Phi' : Q$$

vnde fit $y = - S - \Phi' : Q$. Denique ex hac aequatione $y = - S - \Phi' : Q$ vna cum relatione, quae inter Q, P et x intercedit, definiantur per binas variabiles x et y alterae binae P et Q, earumque valores reſtituti oſtendent, qualis functio V debeat eſſe ipſarum x et y; in quo id ipſum, quod quaeritur, conſiſtit.

Coroll. 1.

51. Simili modo, ſi Q detur per y et P, ita, vt x non ingrediatur in hanc relationem, vtendum erit hac forma $V = P x + \int (Q dy - x dP)$, quae, cum Q conſiderari debeat tanquam functio data ipſarum x et P, paribus operationibus ad integrabilitatem perducetur.

Coroll. 2.

52. Quodſi autem, vel P, vel Q, per x et y determinantur, quaeſtio nihil habet difficultatis. Si enim ſit P functio data ipſarum x et y, quaeratur integrale $\int P dx$, ſpectata y vt conſtante, poſitoque $\int P dx = R$, erit $V = R + \Phi : y$.

Coroll. 3.

Coroll. 3.

53. Quoties ergo relatio inter quantitates P, Q, x et y per huiusmodi aequationem datur, in quam tantum ternae harum quantitatum ingrediantur, indoles functionis V per problemata iam tractata definiri poteſt.

Scholion.

54. Ex hoc ergo genere ſuperſunt caſus, quibus relatio data omnes quatuor litteras P, Q, x et y continet. At pro hoc iam eum caſum euoluimus, quo erat $Q = Pp + t$, exiſtentibus p et t functionibus quibuscunque ipſarum x et y, cuius ſolutio in Probl. 11 eſt exhibita. Quia vero loco binarum variabilium x et y, ſequentia paria ſimili modo tractari poſſunt:

I. Si ſit $Q = xM + N$,

exiſtentibns M et N functionibus quibuscunque ipſarum P et y.

II. Si ſit $P = yM + N$,

exiſtentibus M et N functionibus quibuscunque ipſarum Q et x.

III. Si ſit $y = xM + N$,

exiſtentibus M et N functionibus quibuscunque ipſarum P et Q. His ſcilicet quoque caſibus ſolutio per praecepta §. 40 tradita inueniri poterit.

Exemplum.

55. *Exiſtente* $dV = Pdx + Qdy$, *oporteat definire functionem* V, *vt ſit* $xyPQ = \alpha$.

Cum ergo ſit $Q = \frac{\alpha}{Pxy}$, erit

$$dV = Pdx + \frac{\alpha dy}{Pxy}$$

qui caſus in nullo tractatorum continetur. Verum poſito $ly = u$, cum ſit $dV = Pdx + \frac{\alpha du}{Px}$, ſi u loco y ſpectemus, hancque formam cum $Pdx + Qdy$ comparemus, erit iſtud $Q = \frac{\alpha}{Px}$, ideoque per x et P tantum datur; ita vt hoc exemplum reductum ſit ad praeſens problema. Ne igitur hoc Q cum principali confundatur, cum ſit $P = \frac{\alpha}{Qx}$, habebimus ſcribendo u loco y:

$$V = Qy + \int \left(\frac{\alpha dx}{Qx} - y dQ\right)$$

ſumta ergo Q conſtante, erit $\int \frac{\alpha dx}{Qx} = R = \frac{\alpha}{Q} lx$, hincque $S = \frac{-\alpha lx}{QQ}$: vnde fit $u = ly = \frac{\alpha lx}{QQ} - \Phi' : Q$, et

$$V = Qly + \frac{\alpha lx}{Q} + \Phi : Q$$

exiſtente $\Phi : Q = \int dQ \Phi' : Q$, vbi pro $\Phi' : Q$ ſumi poteſt functio quaecunque ipſius Q.

Sit ergo pro caſu ſimpliciſſimo $\Phi' : Q = 0$, eritque $Q = \sqrt{\frac{\alpha lx}{ly}}$, et $V = 2\sqrt{\alpha lx . ly} +$ Conſt.

Ac ſi ſumatur $\Phi' : Q = n - \frac{\alpha m}{QQ}$, fiet $\Phi : Q = nQ + \frac{\alpha m}{Q} + C$ et $ly + n = \frac{\alpha(lx + m)}{QQ}$, hincque $Q = \sqrt{\alpha \frac{lx + m}{ly + n}}$, et

$$V = 2\sqrt{\alpha(lx + m)(ly + n)} + \text{Conſt.}$$

Problema 14.

56. Exiſtente $dV = Pdx + Qdy$, definire indolem functionis V, vt fiat $PP + QQ = xx + yy$.

Solu-

Solutio.

Hoc problema in nullo caſuum hactenus tractatorum continetur; verumtamen idonea transformatione ad caſum facillimum reduci poteſt. Ponatur enim $PP+QQ=xx+yy=tt$, ſitque angulis duobus indefinitis Φ et θ introducendis:

$P=t\,\text{ſin.}\,\Phi$; $Q=t\,\text{coſ.}\,\Phi$; $x=t\,\text{ſin.}\,\theta$ et $y=t\,\text{coſ.}\,\theta$ ob $dx=dt\,\text{ſin.}\,\theta+td\theta\,\text{coſ.}\,\theta$, et $dy=dt\,\text{coſ.}\,\theta-td\theta\,\text{ſin.}\,\theta$, erit:

$dV\text{-}tdt(\text{ſin.}\,\Phi\,\text{ſin.}\,\theta+\text{coſ.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\theta)-ttd\theta(\text{coſ.}\,\Phi\,\text{ſin.}\,\theta-\text{ſin.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\theta)$

ſeu $dV=tdt\,\text{coſ.}\,(\theta-\Phi)-ttd\theta\,\text{ſin.}\,(\theta-\Phi)$.

At eſt $\int tdt\,\text{coſ.}\,(\theta-\Phi)=\frac{1}{2}tt\,\text{coſ.}\,(\theta-\Phi)+\frac{1}{2}\int tt\,(d\text{-}\theta\Phi)\,\text{ſin.}\,(\theta-\Phi)$ vnde fit:

$$V=\tfrac{1}{2}tt\,\text{coſ}\,(\theta-\Phi)-\tfrac{1}{2}\int tt\,(d\theta+d\Phi)\,\text{ſin.}\,(\theta-\Phi).$$

Cum igitur haec formula integrabilis eſſe debeat, neceſſe eſt, vt ſit $tt\,\text{ſin.}\,(\theta-\Phi)=\text{funct.}\,(\theta+\Phi)$.

Quare cum ſit $tt=xx+yy$ et $\text{tang.}\,\theta=\frac{x}{y}$, hinc angulus Φ per x et y determinabitur, cuius valor ſubſtitutus dabit functionem V, per x et y expreſſam.

Sit, vt functiones algebraicas ſimpliciores eliciamus, $tt\,\text{ſin.}\,(\theta-\Phi)=\alpha\,\text{ſin.}\,(\theta+\Phi)+\beta\,\text{coſ.}\,(\theta+\Phi)$, eritque

$$V=\tfrac{1}{2}tt\,\text{coſ}\,(\theta-\Phi)+\tfrac{1}{2}\alpha\,\text{coſ.}\,(\theta+\Phi)-\tfrac{1}{2}\beta\,\text{ſin.}\,(\theta+\Phi)$$

vnde, ſi eliminetur tt, prodit:

$$2V\,\text{ſin.}\,(\theta-\Phi)=\alpha\,\text{ſin.}\,2\theta+\beta\,\text{coſ.}\,2\theta=\frac{2\alpha xy-\beta(xx-yy}{xx+yy}.$$

At euolutis illis angulis, fit:

$ttx\,\text{coſ.}\,\Phi-tty\,\text{ſin.}\,\Phi=\alpha x\,\text{coſ.}\,\Phi+\alpha y\,\text{ſin.}\,\Phi+\beta y\,\text{coſ.}\,\Phi-\beta x\,\text{ſin.}\,\Phi$

ideoque $\text{tang.}\,\Phi=\frac{ttx-\alpha x-\beta y}{tty+\alpha y-\beta x}$ et

ſec. $\Phi = \frac{\surd(t^6 - 2\alpha tt(xx-yy) - 4\beta ttxy + \alpha\alpha tt + \beta\beta tt)}{tty + \alpha y - \beta x}$

ſit $T = t\surd(t^4 - 2\alpha(xx-yy) - 4\beta xy + \alpha\alpha + \beta\beta)$

erit ſi $\Phi = \frac{ttx - \alpha x - \beta y}{T}$ et coſ. $\Phi = \frac{tty + \alpha y - \beta x}{T}$

hincque ſin. $(\theta - \Phi) = \frac{2\alpha xy - \beta(xx-yy)}{Tt}$, quo valore ſubſtituto, orietur $V = \frac{T}{2t}$ ideoque

$$V = \tfrac{1}{2}\surd((xx+yy)^2 - 2\alpha(xx-yy) - 4\beta xy + \alpha\alpha + \beta\beta)$$

quae functio etiam hoc modo repraeſentari poteſt:

$$V = \tfrac{1}{2}\surd((\alpha - xx + yy)^2 + (\beta - 2xy)^2).$$

Caſus ſimpliciſſimus prodit ſumendo $\alpha = 0$, et $\beta = 0$, quo fit $V = \frac{1}{2}(xx+yy)$, et $dV = xdx + ydy$.

Scholion.

57. Ex hoc problemate intelligitur, quomodo huiuſmodi quaeſtiones, quae dum omnes quatuor litterae in relationem praeſcriptam ingrediuntur, ſolutu difficillimae videntur, idonea tamen ſubſtitutione interdum ad caſus iam tractatos reduci queant. Neque vero adhuc modum perſpicio, quo in genere, vtcunque relatio inter quatuor quantitates P, Q, x et y fuerit comparata, ſolutio obtineri poſſit; plurima autem alia huiusmodi exempla afferre poſſem, in quibus reductio ad caſus iam tractatos perfici queat; ſed quia hoc argumentum minime exhaurire confido, ad ſequentia capita progredior, quando relatio praeſcripta praeter quantitates P, Q, x et y etiam ipſam functionem quaeſitam V complectitur: vbi quidem per ſe eſt perſpicuum, ſi relatio inter V, x et y tantum proponeretur, ne quaeſtionem quidem fore, cum functio V immedia-

mediate per x et y daretur. Quare ab eiusmodi problematibus exordiar, vbi relatio praeſcripta praeter functionem V alterutram quantitatum P et Q vel etiam ambas implicat; dum variabiles x et y ipſae vel ſimul ingrediuntur, vel ſecus. Facile autem intelligitur, haec problemata multo eſſe difficiliora praecedentibus.

Problema 15.

58. Exiſtente $dV = Pdx + Qdy$, definire indolem functionis V, vt fiat $P = nV$.

Solutio.

Cum ſit $P = nV$, erit $dV = nVdx + Qdy$, ſeu $dV - nVdx = Qdy$. Multiplicetur prius membrum per e^{-nx}, vt fiat integrabile, eiusque integrale $e^{-nx}V = \int e^{-nx}Qdy$ aequari debebit functioni cuicunque ipſius y, quae ſit $= Y$. Vnde functio quaeſita erit $V = e^{nx}Y$.

Aliter.

Cum V debeat eſſe eiusmodi functio ipſarum x et y, vt eius differentiale ſit $dV = nVdx + Qdy$; perſpicuum eſt, ſi functio V differentietur poſita y conſtante, proditurum eſſe $dV = nVdx$. Quare viciſſim ex integratione formulae $dV = nVdx$ functio V inuenietur, ſi y vt conſtans ſpectetur; tum vero conſtans per integrationem ingreſſa quantitatem y vtcunque inuoluere poterit. At aequatio $dV = nVdx$ integrata praebet $lV = nx + lY$, ſeu $V = e^{nx}Y$ vt ante.

Coroll.

Coroll. 1.

59. Eodem modo reſolui poterit quaeſtio latius patens, ſi P debeat eſſe functio quaecunque ipſius V. Conſideretur enim, ſpectata y vt conſtante, haec aequatio differentialis $dV = Pdx$, quae cum duas tantum variabiles contineat V et x integretur, conſtanti autem ingreſſa quantitas y vtcunque inuoluatur.

Coroll. 2.

60. Quia binae variabiles x et y ſunt inter ſe permutabiles, eodem modo reſoluitur problema, ſi Q debeat eſſe functio quaecunque ipſius V.

Problema 16.

61. Exiſtente $dV = Pdx + Qdy$, definire indolem functionis V, vt P fiat functio quaecunque ipſarum V et x.

Solutio.

Cum igitur P detur per V et x, ſi y vt conſtantem ſpectemus, habebimus hanc aequationem $dV = Pdx$ inter duas variabiles x et V. Integretur itaque ea, et loco conſtantis in aequationem integralem introducatur functio quaecunque ipſius y; hoc modo obtinebitur aequatio inter V, x et y, qua indoles functionis V per x et y definietur.

Coroll. 1.

62. Quaecunque igitur relatio inter ternas quantitates V, P et x proponatur, ſiue ex ea V per x

et

et P, ſiue P per V et x, ſiue x per V et P definiatur, ſolutio problematis ſemper erit in promtu.

Coroll. 2.

63. Ob permutabilitatem variabilium x et y, eodem modo problema ſoluetur, ſi relatio quaecunque inter Q, V et y proponatur: neque opus eſt, vt hunc caſum ſeorſim euoluamus.

Exemplum 1.

64. *Poſito* $dV = Pdx + Qdy$ *oporteat eſſe* $P = \frac{mV}{x} + nx$; ſpectata ergo y vt conſtante, erit $dV = \frac{mVdx}{x} + nxdx$ ſeu $dV - \frac{mVdx}{x} = nxdx$, cuius integralis eſt

$$\frac{V}{x^m} = \frac{nx^{2-m}}{2-m} + Y$$

exiſtente Y functione quacunque ipſius y. Quare erit

$$V = x^m Y + \frac{n}{2-m} xx$$

ſi eſſet $m = 2$, foret $V = xxY + nxxlx$

Exemplum 2.

65. *Poſito* $dV = Pdx + Qdy$ *oporteat eſſe* $aV = P(aa - xx)$.

Cum ergo ſit $P = \frac{aV}{aa-xx}$ erit, ſumta y conſtante:

$$dV = \frac{aVdx}{aa-xx} \text{ ſeu } \frac{dV}{V} = \frac{adx}{aa-xx},$$

cuius integrale eſt $lV = \frac{1}{2} l \frac{a+x}{a-x} lY$, vnde habebitur $V = Y \surd \frac{a+x}{a-x}$, denotante Y functionem quamcunque ipſius y.

Problema 17.

65 Exiſtente $dV = Pdx + Qdy$, definire indolem functionis V, ſi P fiat functio quaecunque data ipſarum x, y et V.

Solutio.

Aſſumo hic, relationem propoſitam contineri aequatione quacunque inter quatuor quantitates x, y, V et P; ex qua idcirco P per x, y et V definire liceat. Spectetur igitur y vt quantitas conſtans, et cum ſit $dV = Pdx$, haec aequatio iam duas tantum variabiles x et V inuoluet. Integretur igitur ea, et loco conſtantis introducatur functio quaecunque ipſius y, hocque modo prodibit aequatio, naturam functionis V oſtendens.

Corollarium.

67. Simili ergo modo problema ſoluetur, ſi proponatur relatio quacunque inter quatuor quantitates x, y, Q et V, quo caſu hoc tantum diſcrimen obſeruetur, vt primum quantitas x tanquam conſtans ſpectetur.

Exemplum.

68. *Poſito* $dV = Pdx + Qdy$, *oporteat eſſe* $V = \frac{Px}{y}$. Cum igitur ſit $P = \frac{Vy}{x}$, erit, ſumta y conſtante:

$$dV = \frac{Vydx}{x}, \text{ ideoque } lV = ylx + lY$$

vnde prodit functio quaeſita $V = x^y Y$.

Scholion.

Scholion.

69. Quodſi ergo in relationem propoſitam alterutra tantum quantitatum P et Q ingrediatur, problemata ſunt ſolutu facilia. Verum ſi vtraque quantitas P et Q inſit, maior difficultas occurrit, quae quandoque tanta eſt, vt ſuperari nullo modo queat. Quoniam igitur hoc caſu ſolutionem generalem expectare non licet, nonnulla exempla, quae quidem ſatis late pateant, percurramus.

Problema 18.

70. Exiſtente $dV = Pdx + Qdy$, inuenire indolem functionis V, vt fiat $V = mPx + nQy$.

Solutio.

Cum hinc ſit $Q = \frac{V - mPx}{ny}$, erit:

$$dV - \frac{Vdy}{ny} = Pdx - \frac{mPxdy}{ny} = \frac{P}{ny}(nydx - mxdy).$$

Quaeratur multiplicator, qui formulam $nydx - mxdy$ reddat integrabilem, qui cum ſit $\frac{1}{xy}$, ideoque

$$dV - \frac{Vdy}{ny} = \frac{Px}{n}\left(\frac{ndx}{x} - \frac{mdy}{y}\right)$$

ponatur $nlx - mly = lz$ ſeu $z = \frac{x^n}{y^m}$; vnde fit $x = y^{\frac{m}{n}} z^{\frac{1}{n}}$, qui valor loco x ſubſtitui concipiatur. Quare cum ſit $dV = \frac{Vdy}{ny} + \frac{Pxdz}{nz}$; quantitas V ſpectari poterit tanquam functio binarum quantitatum y et z: quae igitur talis eſſe debet, vt ſumta z conſtante fiat $dV = \frac{Vdy}{ny}$. Hinc ergo integrando prodibit:

$$lV = \frac{1}{n}ly + lZ \text{ ſeu } V = y^{\frac{1}{n}}Z$$

 ſumta

ſumta pro Z functione quacunque ipſius $z = \frac{x^n}{y^m}$: ſicque habebitur $V = y^{\frac{1}{n}} \Phi : \frac{x^n}{y^m}$.

Coroll. 1.

71. Cum ſit $\frac{x^{\frac{1}{m}}}{y^{\frac{1}{n}}}$ functio ipſius $\frac{x^n}{y^m}$, erit etiam $V = x^{\frac{1}{m}} \Phi . \frac{x^n}{y^m}$. Tum vero etiam ita exhiberi poteſt: $V = x^{\frac{1}{m}} \Phi . \frac{x^{\lambda n}}{y^{\lambda m}}$; vel $V = y^{\frac{1}{n}} \Phi : \frac{x^{\lambda n}}{y^{\lambda m}}$, ſumto pro n numero quocunque.

Coroll. 2.

72. Si ſit $m = n$, caſus habebitur functionum homogenearum ſupra tractatus. Sumto enim $\lambda = \frac{1}{n}$, denotabit $\Phi : \frac{x}{y}$ functionem quamcunque nullius dimenſionis ipſarum x et y: et V fiet earundem functio homogenea, cuius dimenſionum numerus eſt $= \frac{1}{n}$.

Coroll. 3.

73. Si ponamus in genere $x^{\frac{1}{m}} = t$ et $y^{\frac{1}{n}} = u$; tum vero capiamus $\lambda = \frac{1}{mn}$, habebimus $V = t \Phi . \frac{t}{u}$, ſeu V erit functio homogenea vnius dimenſionis binarum quantitatum t et u.

Scholion.

74. Si deſideretur, vt ſit $V = mP + nQ$, ſolutio aeque parum habebit difficultatis. Nam ob $Q = \frac{V}{n} - \frac{mP}{n}$ erit

erit $dV - \frac{V dy}{n} = P(dx - \frac{m dy}{n})$. Statuatur $x - \frac{my}{n} = z$, vt ſit $dV = \frac{V dy}{n} + P dz$: iam ſpectata z vt conſtante, erit $lV = \frac{y}{n} + \Phi : z$, ideoque

$$V = e^{\frac{y}{n}} \Phi : (nx - my).$$

At ſi debeat eſſe $V = mPy + nQx$, ob $Q = \frac{V - mPy}{nx}$, erit $dV = P(dx - \frac{my dy}{nx}) + \frac{V dy}{nx}$. Statuatur $nxx - myy = zz$, vt ſit $x = \sqrt{\frac{zz + myy}{n}}$, et cum fiat:

$$dV = \frac{V dy}{\sqrt{n(zz + myy)}} + \frac{P}{nx} z dz,$$

ſpectetur quantitas z vt conſtans, et ob $\frac{dV}{nV} = \frac{dy}{\sqrt{(nzz + mnyy)}}$ erit $lV = \frac{1}{\sqrt{mn}} l(y\sqrt{mn} + \sqrt{n(zz + myy)}) + lZ$, ideoque ob $\sqrt{n(zz + myy)} = nx$, prodibit:

$$V = (y\sqrt{m} + x\sqrt{n})^{\frac{1}{\sqrt{mn}}} \Phi : (nxx - myy).$$

Quare ſi eſſe debeat $V = Py + Qx$, erit:

$$V = (x + y) \Phi : (xx - yy).$$

Problema autem ſequens omnes huiusmodi caſus in ſe complectetur.

Problema 19.

75. Si p ſit functio quaecunque data ipſarum x et y, at M functio quaecunque etiam data ipſarum x, y et V, definire indolem functionis V, vt, poſito $dV = Pdx + Qdy$, fiat $Q = Pp + M$.

Solutio.

Subſtituto hoc loco Q valore, habemus:

$$dV = M dy + P(dx + p dy).$$

 Quae-

Quaeratur multiplicator q, formulam $dx + p\,dy$ integrabilem reddens, ſitque $\int q(dx + p\,dy) = z$: vnde valor ipſius x definiatur per y et z, isque in M, quatenus x ineſt, loco x ſubſtituatur, quo facto erit:

$$dV = M\,dy + \frac{P\,dz}{q}$$

ſicque V conſiderari poterit vt functio ipſarum y et z. Spectetur nunc z vt quantitas conſtans, et cum ſit $dV = M\,dy$, vbi duae tantum variabiles y et V ineſſe ſunt intelligendae, integretur haec aequatio et loco conſtantis introducatur functio quaecunque ipſius z: in qua ſi loco z valor in x et y, ſcilicet: $\int q(dx + p\,dy)$ reſtituatur, illa aequatio $dV = M\,dy$ integrata exhibebit naturam functionis V, quemadmodum ea a binis variabilibus x et y pendere debet.

Exemplum.

76. *Poſito* $dV = P\,dx + Q\,dy$, *oportet eſſe* $V = Pyy + Qxx$. Eſt ergo $Q = -\frac{Pyy}{xx} + \frac{V}{nx}$, vnde fit

$$dV = \frac{V\,dy}{xx} + P\left(dx - \frac{yy\,dy}{xx}\right)$$

Sumatur $q = xx$, erit $\int (xx\,dx - yy\,dy) = z = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}y^3$ ſeu $x^3 = y^3 + 3z$, ideoque $xx = (y^3 + 3z)^{\frac{2}{3}}$. Sumto igitur z conſtante, habetur

$$\frac{dV}{V} = \frac{dy}{(y^3 + 3z)^{\frac{2}{3}}}$$

Sit itaque S integrale formulae $\frac{dy}{(y^3 + 3z)^{\frac{2}{3}}}$, dum z conſtans aſſumitur, et obtinebitur:

V =

$V = e^S \phi : z = e^S \Phi : (x^3 - y^3)$,

ſcilicet in S loco z vbique eius valor $\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}y^3$ ſubſtitui debet.

Problema 20.

77. Exiſtente $dV = Pdx + Qdy$, definire indolem functionis V, vt ſit $V = nPQ$.

Solutio.

Ergo ob $Q = \frac{V}{nP}$ erit

$$dV = Pdx + \frac{Vdy}{nP}.$$

Quo iam V ex poſteriori membro poſſit ſeparari, ponatur $P = R\sqrt{V}$, prodibitque:

$$\frac{dV}{\sqrt{V}} = Rdx + \frac{dy}{nR},$$

vnde conuertendo obtinetur:

$$2\sqrt{V} = Rx + \frac{y}{nR} - \int dR\left(x - \frac{y}{nRR}\right).$$

Quare neceſſe eſt, vt $x - \frac{y}{nRR}$ ſit functio ipſius R tantum; ac tali functione aſſumta definiri poterit R per x et y, vnde etiam functio quaeſita V per x et y expreſſa reperietur.

Aliter.

Cum ſit $V = nPQ$, eliminetur V, vt habeatur haec aequatio:

$$nPdQ + nQdP = Pdx + Qdy$$

ex qua fit $dy = -\frac{Pdx}{Q} + \frac{nPdQ}{Q} + ndP$,

hincque $y = nP + \int \frac{P}{Q}(ndQ - dx)$.

Neceſſe ergo eſt, vt $\frac{P}{Q}$ ſit functio quantitatis $nQ - x$.

Pona-

Ponatur $nQ-x=z$; ſitque $\int\frac{P}{Q}dz=\Phi:z$, erit $\frac{P}{Q}=\Phi':z$ et $y=nP+\Phi\cdot z=nQ\Phi':z+\Phi:z$. At eſt $V=nQQ\Phi':z$, vnde $Q=\sqrt{\frac{V}{n\Phi':z}}$; ſicque habebuntur hae aequationes:

$$\sqrt{\frac{nV}{\Phi':z}}=x+z \text{ et } y=\Phi z+\sqrt{nV\Phi':z},$$

ex quibus conficitur $nV=(x+z)(y-\Phi z)$: ac ſi eliminetur quantitas z, orietur functio V per x et y expreſſa.

Coroll. 1.

78 Capiatur z conſtans, ſeu $ndQ-dx=0$, fiet $Q=\frac{x+a}{n}$ et $y=nP-b$, ſeu $P=\frac{y+b}{n}$; vnde oritur $V=\frac{(x+a)(y+b)}{n}$ qui eſt caſus ſimpliciſſimus.

Coroll. 2.

79 Si ſtatuatur $\Phi':z=a$, erit $\Phi z=az+b$, vnde fit:

$\sqrt{\frac{nV}{a}}=x+z$ et $nV=(y-az-b)\sqrt{\frac{nV}{a}}$ ſeu $\sqrt{naV}=y-b-az$, ex quibus coniunctis nanciſcimur: $2\sqrt{naV}=ax+y-b$, hincque $V=\frac{(ax+y-b)^2}{4na}$; qui eſt alter caſus ſimpliciſſimus.

Coroll. 3.

80. Sit $\Phi':z=\frac{1}{(az+b)^2}$; vt ſit $\Phi:z=-\frac{1}{a(az+b)}+c$ et fiet:

$(az+b)\sqrt{nV}=x+z$ et $y-c+\frac{1}{a(az+b)}=\frac{\sqrt{nV}}{az+b}$ ſeu $a(az+b)(y-c)=a\sqrt{nV}-1$: at inde eſt $z=\frac{x-b\sqrt{nV}}{a\sqrt{nV}-1}$, ideoque $az+b=\frac{ax-b}{a\sqrt{nV}-1}$; hocque valore ſubſtituto:

$a(ax-b)(y-c)=(a\sqrt{n}V-1)^2$, quae euolutio praebet:

$$V=\frac{1+a(ax-b)(y-c)+2\sqrt{a(ax-b)(y-c)}}{naa}.$$

Problema 21.

81. Exiſtente $dV=Pdx+Qdy$, ſi detur V vtcunque per P et Q, definire indolem functionis V, ſeu quemadmodum V per x et y determinetur.

Solutio.

Cum igitur ſit V functio binarum quantitatum P et Q, ponatur eius differentiale $dV=MdP+NdQ$, eruntque etiam M et N functiones datae ipſarum P et Q. Quare cum ſit

$$MdP+NdQ=Pdx+Qdy, \text{ erit}$$

$$dy=-\frac{Pdx}{Q}+\frac{MdP+NdQ}{Q}, \text{ ideoque}$$

$$y=-\frac{Px}{Q}+\int\left(xd.\frac{P}{Q}+\frac{MdP}{Q}+\frac{NdQ}{Q}\right).$$

Ponatur $P=QS$, qui valor in M et N loco P ſubſtitui intelligatur, ita vt iam variabiles Q et S conſiderandae occurrant, fietque:

$$y=-Sx+\int\left(dS(x+M)+\frac{dQ}{Q}(N+MS)\right).$$

Cum hic M et N ſint functiones datae ipſarum Q et S, ſumatur S pro conſtante, ac ponatur integrale:

$$\int\frac{dQ}{Q}(N+MS)=R+\Phi:S$$

erit ergo $x+M=\left(\frac{dR}{dS}\right)+\Phi':S$, exiſtente $\Phi S=\int dS\Phi':S$ et $y=MS-S\left(\frac{dR}{dS}\right)-S\Phi'S+R+\Phi:S$.

Quia nunc R et M dantur per Q et S, et ob $P = QS$ etiam V detur per Q et S. Si haec relatio cum his binis coniungatur:

$$x = -M + \left(\frac{dR}{dS}\right) + \Phi' : S, \text{ et } y = -Sx + R + \Phi : S$$

poterunt hinc eliminari binae quantitates S et Q, quo facto prodibit aequatio, qua V determinabitur per x et y.

Exemplum I.

82. *Exiſtente* $dV = Pdx + Qdy$, *oporteat eſſe* $V = mPP + nQQ$.

Cum ergo ſit $dV = 2mPdP + 2nQdQ$, erit $M = 2mP$, et $N = 2nQ$, ſeu $M = 2mQS$ ob $P = QS$, ita vt ſit $V = QQ(mSS + n)$.

Habebimus ergo $N + MS = 2Q(mSS + n)$, ideoque ſpectata S vt conſtante:

$$R = \int \frac{dQ}{Q}(N + MS) = 2Q(mSS + n),$$

ac proinde $\left(\frac{dR}{dS}\right) = 4mQS$,

Vnde has tres aequationes adipiſcimur:

I. $V = QQ(mSS + n)$

II. $x + 2mQS = 4mQS + \Phi' : S$ ſeu $x = 2mQS + \Phi' : S$

III. $y + Sx = 2Q(mSS + n) + \Phi : S$

ſeu $y = 2nQ + \Phi : S - S\Phi' : S$.

Quodſi ex II et III eliminetur Q, erit:

IV. $nx - mSy = (mSS + n)\Phi' : S - mS\Phi : S$

ex iisdem vero coniunctis fit $Q = \frac{Sx + y - \Phi : S}{2(mSS + n)}$, quae cum prima dat $\sqrt{} : 2\sqrt{}V(mSS + n) = Sx + y - \Phi : S$. Quare

Quare ſupereſt, vt ex IV et V eliminetur S, ſicque prodibit functio V per x et y expreſſa.

Sit $\Phi':S = a$, erit $\Phi:S = aS + b$, et

IV. $nx - mSy = na - mbS$

V. $2\sqrt{V}(mSS + n) = Sx + y - aS - b.$

Inde eſt $S = \frac{n(x-a)}{m(y-b)}$, quo valore ſubſtituto, erit:

$$2\sqrt{mnV} = \sqrt{(n(x-a)^2 + m(y-b)^2)}$$

hincque $V = \frac{n(x-a)^2 + m(y-b)^2}{4mn}$.

Exemplum 2.

83. *Exiſtente* $dV = Pdx + Qdy$, *oporteat eſſe* $V = \frac{P}{Q}$.

Erit ergo $M = \frac{1}{Q}$; $N = -\frac{P}{QQ} = -\frac{S}{Q}$ ob $P = QS$ et $V = S$ atque $N + MS = 0$, vnde fit $R = 0$. Quare prodit:

$$x + \frac{1}{Q} = \Phi':S \text{ et } y + Sx = \Phi:S$$

et quia eſt $S = V$, ita functio V per x et y determinatur, vt ſit $y + Vx = \Phi:V$.

Ponatur $\Phi:V = \frac{\alpha + 2\beta V + \gamma VV}{2\delta + 2\varepsilon V}$, vt fiat:

$$2\delta y + 2\varepsilon Vy + 2\delta Vx + 2\varepsilon VVx = \alpha + 2\beta V + \gamma VV$$

hincque $VV = \frac{2V(\delta x + \varepsilon y - \beta) + 2\delta y - \alpha}{\gamma - 2\varepsilon x}$ et

$$V = \frac{\delta x + \varepsilon y - \beta \pm \sqrt{((\delta x - \varepsilon y)^2 + 2(\alpha\varepsilon - \beta\delta)x + 2(\gamma\delta - \beta\varepsilon)y + \beta\beta - \alpha\gamma)}}{\gamma - 2\varepsilon x}$$

ſi ſit γ et $\varepsilon = 0$, erit $V = \frac{2\delta y - \alpha}{2\beta - 2\delta x}$ ſeu $V = \frac{y-m}{n-x}$.

Scholion.

84. Plures aliae huiusmodi quaeſtiones proponi ac reſolui poſſent, ſed quia earum ſolutio iisdem principiis, quibus hactenus ſum vſus, innititur, iis multiplicandis non immoror, cum allatae iam ſufficere videantur, ad elementa huius nouae methodi condenda. Nonnulla adhuc adiici poſſent pro caſibus, quibus huiusmodi etiam formulae $(\frac{ddV}{dx^2})$, $(\frac{ddV}{dxdy})$, $(\frac{ddV}{dy^2})$ in relationem propoſitam ingrediuntur, item quando functio quaerenda per tres pluresue variabiles definire debet; verum ne haec tractatio nimis fiat longa, ea in aliam occaſionem reſeruabo.

PHYSICO-

PHYSICO-
MATHEMATICA.

DE MOTV VIBRATORIO FILI FLEXILIS, CORPVSCVLIS QVOTCVNQVE ONVSTI,

Auctore

L. EVLERO.

1.

Conſidero hic filum perfecte flexile, ſimulque omni inertia deſtitutum, quod in datis interuallis ſit oneratum ponduſculis quibuscunque A, B, C, D, etc. concipio autem filum hoc in terminis I et O firmiter fixum, et extenſum data quadam vi; ita vt in ſtatu naturali ſitum teneat rectilineum IO, in quo acquieſcat. Quodſi autem a cauſa quacunque de hoc ſitu deturbetur, ita vt ſingula ponduſcula A, B, C, D etc. ad datas diſtantias a recto IO depellantur, ſubitoque dimittantur, totum filum certo quodam motu agitabitur, quem hic inueſtigare conſtitui. Ne autem ſolutio huius quaeſtionis vires analyſeos penitus ſuperet, tam ponduſcula, quam interualla, ad quae a recta IO fuerint depulſa, tanquam infinite parua ſpectabo, vnde hoc commodum ſum aſſecuturus, vt viae, quas ſingula ponduſcula motu ſuo percurrent, ſint rectae ad IO normales, ac tenſio in omnibus fili partibus manſura ſit perpetuo eadem. Tab. I. Fig. 1.

2.

2. Facta hac hypotheſi, interualla ponduſculorum etiam durante motu nullam mutationem recipient, quae cum ſint data et conſtantia vocentur:

$IA = a$; $AB = b$; $BC = c$; $CD = d$; $DE = e$; $EF = f$ etc.
eritque etiam

$IP = a$; $PQ = b$; $QR = c$; $RS = d$; $ST = e$; $TV = f$; etc.
maiusculae autem litterae A, B, C, D, etc. ipſas maſſas ſingulorum corpuſculorum exprimant. Deinde ſit vis, qua filum tenditur $= K$; et graecae litterae α, β, γ, δ, etc. denotent interualla, ad quae initio ſingula corpuscula A, B, C, D etc. a linea recta IO fuerint diducta. Quibus poſitis, quaeſtio huc redit, vt elapſo ab iſto initio tempore quocunque, quod ſit ω min. ſec. ſtatus et motus fili determinetur.

3. Ponamus ergo, hoc tempore filum cum corpuſculis in eum ſitum perueniſſe, quem figura oſtendit, et deſignemus iam ſingulorum corpuſculorum ab axe IO diſtantias:

$AP = p$; $BQ = q$; $CR = r$; $DS = s$; $ET = t$; etc.
quas prae interuallis a, b, c, d, tanquam minimas ſpectare licebit. Cum igitur tenſio in ſingulis fili partibus ſit eadem $= K$, quodlibet corpuſculum a tanta vi vtrinque ſollicitabitur, et quatenus hae vires ſibi non ſunt e diametro oppoſitae, eatenus inde vis naſcetur, qua vnumquodque corpuſculum recta ad axem pelletur, vel ab eo repelletur. In has ergo ſingulas vires ante omnia erit inquirendum, quoniam ab iis corpuſcula motus ſui determinationem, hoc eſt, ſiue accele-

accelerationem, ſiue retardationem, nanciſcuntur, quandoquidem per hypotheſin certum eſt, ſingula corpuſcula A, B, C, D etc. perpetuo per rectas A P, B Q, C R etc. ad axem normales agitari.

4. Si igitur ſecundum regulas cognitas has vires colligamus, deprehendemus:

Corpuſculum	Vrgeri in directione	Vi
A	A P	$K(\frac{p}{a} + \frac{p-q}{b})$
B	B Q	$K(\frac{q-p}{b} + \frac{q-r}{c})$
C	C R	$K(\frac{r-q}{c} + \frac{r-s}{d})$
D	D S	$K(\frac{s-r}{d} + \frac{s-t}{e})$
E	E T	$K(\frac{t-s}{e} + \frac{t-v}{f})$
F	F V	$K(\frac{v-t}{f} + \frac{v-x}{g})$
G	G X	$K(\frac{v-x}{g} + \frac{x}{h})$.

Hic ſcilicet poſui, corpuſculum ſeptimum G eſſe vltimum; manifeſtum autem eſt, quotcunque fuerint ponduſcula, quomodo has formulas conſtrui oporteat.

5. Exprimunt autem hae formulae vires motrices, quibus ſingula corpuſcula axem I O verſus incitantur; earum ergo quaelibet per maſſam ponduſculi diuiſa praebebit accelerationem eius. Verum ex diſtantia cuiusque corpuſculi ab axe, quae in genere ſit $= z$, cum tempore generatim expreſſo t collata, oritur quoque per regulas mechanicas acceleratio $= -\frac{2ddz}{dt^2}$, ſumto elemento temporis conſtante. Sed haec formula non eſt ad menſuram temporis in minutis ſecundis expri-

mendi, quam hic aſſumſimus, accommodata; ſed petita eſt ex ea ratione, qua tempus per ſpatium ad celeritatem applicatum, celeritas autem per radicem quadratam altitudinis debitae, exhiberi ſolet. Quare ſi k denotet altitudinem, ex qua graue vno minuto ſecundo libere deſcendit, referet expreſſio $2\sqrt{k}$ vnum minutum ſecundum, eritque propterea $t:\omega = 2\sqrt{k}:1$, ſicque $t = 2\omega\sqrt{k}$ et $dt^2 = 4kd\omega^2$, vnde acceleratio ad noſtrum ſcopum accommodata prodit $= \frac{-ddz}{2kd\omega^2}$.

6. Quodſi iam has ſingulas accelerationes cum iis, quae ex ſollicitationibus ſunt erutae, conferamus, obtinebimus ſequentes aequationes: ſiue

$\frac{K}{A}\left(\frac{p}{a}+\frac{p-q}{b}\right)=\frac{-ddp}{2kd\omega^2}$	$\frac{p}{a}+\frac{p-q}{b}+\frac{Addp}{2Kkd\omega^2}=0$
$\frac{K}{B}\left(\frac{q-p}{b}+\frac{q-r}{c}\right)=\frac{-ddq}{2kd\omega^2}$	$\frac{q-p}{b}+\frac{q-r}{c}+\frac{Bddq}{2Kkd\omega^2}=0$
$\frac{K}{C}\left(\frac{r-q}{c}+\frac{r-s}{d}\right)=\frac{-ddr}{2kd\omega^2}$	$\frac{r-q}{c}+\frac{r-s}{d}+\frac{Cddr}{2Kkd\omega^2}=0$
$\frac{K}{D}\left(\frac{s-r}{d}+\frac{s-t}{e}\right)=\frac{-dds}{2kd\omega^2}$	$\frac{s-r}{d}+\frac{s-t}{e}+\frac{Ddds}{2Kkd\omega^2}=0$
$\frac{K}{E}\left(\frac{t-s}{e}+\frac{t-v}{f}\right)=\frac{-ddt}{2kd\omega^2}$	$\frac{t-s}{e}+\frac{t-v}{f}+\frac{Eddt}{2Kkd\omega^2}=0$
$\frac{K}{F}\left(\frac{v-t}{f}+\frac{v-x}{g}\right)=\frac{-ddv}{2kd\omega^2}$	$\frac{v-t}{f}+\frac{v-x}{g}+\frac{Fddv}{2Kkd\omega^2}=0$
$\frac{K}{G}\left(\frac{x-v}{g}+\frac{x}{h}\right)=\frac{-ddx}{2kd\omega^2}$	$\frac{x-v}{g}+\frac{x}{h}+\frac{Gddx}{2Kkd\omega^2}=0.$

6. Totidem igitur quouis caſu impetramus huiusmodi aequationes differentio-differentiales, quod ponduſculis filum intra terminos I et O fuerit oneratum, quarum reſolutio, ob variabilium permixtionem, ſummopere difficilis primo intuitu videatur. Quoniam vero in omnibus his aequationibus variabiles vnicam tantum dimenſionem obtinent, manifeſtum eſt, ſingulas iſtas aequa-

aequationes per eiusmodi conſtantes multiplicari poſſe, vt ſi omnes in vnam ſummam colligantur, prodeat huiusmodi aequatio:

$$\mathfrak{A}p+\mathfrak{B}q+\mathfrak{C}r+\mathfrak{D}s+\mathfrak{E}t+\mathfrak{F}v+\mathfrak{G}x+\frac{n}{d\omega^2}(\mathfrak{A}ddp+\mathfrak{B}ddq+\mathfrak{C}ddr+\mathfrak{D}dds+\mathfrak{E}ddt+\mathfrak{F}ddv+\mathfrak{G}ddx)=0,$$

cuius integratio iam nulli amplius difficultati eſt obnoxia, cum ſit:

$$\mathfrak{A}p+\mathfrak{B}q+\mathfrak{C}r+\mathfrak{D}s+\mathfrak{E}t+\mathfrak{F}v+\mathfrak{G}x=\text{Conſt}\cdot\text{coſ.}\,\omega n.$$

8. At ſi hos multiplicatores, qui ad huiusmodi aequationem integrabilem perducant, inueſtigemus, eos non vno modo, ſed adeo ſemper tot modis, quot uerint corpuſcula, definiri deprehendemus; ſicque tandem etiam totidem aequationes integrales diuerſas adipiſcemur. Ex tot autem aequationibus deinceps valores ſingularum applicatarum p, q, r, s etc. elicere poterimus, quorum quilibet huiusmodi formam ſortietur:

$$\mathfrak{A}\,\text{coſ}\,\mathfrak{a}\omega+\mathfrak{B}\,\text{coſ}\,\mathfrak{b}\omega+\mathfrak{C}\,\text{coſ}\,\mathfrak{c}\omega+\mathfrak{D}\,\text{coſ.}\,\mathfrak{d}\omega+\text{etc.}$$

vbi $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ etc. ſunt conſtantes arbitrariae, ex ſtatu fili initiali, quando ponitur tempus $\omega=0$, definiendae, et pro ſingulis applicatis p, q, r etc. peculiares obtinebunt valores. At vero litterae $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, etc. in omnibus erunt eaedem, ac per totidem radices aequationis cuiuspiam tot dimenſionum, quot fuerint ponduſcula, exhibebuntur.

9 Hinc aliam eumque multo faciliorem nanciſcimur methodum, cunctas ſuperiores aequationes differentia-

rentiales ſecundi gradus quaſi vno actu reſoluendi. Cum enim, ſi omnes coefficientes $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, etc. praeter vnum in vna forma integrali euaneſcant, iidem in reliquis omnibus euaneſcere debeant, ſtatuamus ſtatim mutata harum litterarum ſignificatione:

$$p = \mathfrak{A} \operatorname{coſ.} n\omega;\quad q = \mathfrak{B} \operatorname{coſ.} n\omega;\quad r = \mathfrak{C} \operatorname{coſ.} n\omega;\quad s = \mathfrak{D} \operatorname{coſ.} n\omega;\ \text{etc.}$$

quibus valoribus ſubſtitutis, non ſolum relatio inter hos coefficientes $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, etc. determinabitur, ſed etiam valor litterae n per aequationem tot dimenſionum, quot fuerint corpuſcula, definietur, vnde etiam totidem valores diuerſos recipiet. His autem inuentis ſingulae expreſſiones completae reddentur, et huiusmodi formas induent:

$$p = \mathfrak{A} \operatorname{coſ.} n\omega + \mathfrak{A}' \operatorname{coſ.} n'\omega + \mathfrak{A}'' \operatorname{coſ.} n''\omega + \mathfrak{A}''' \operatorname{coſ} n'''\omega + \text{etc.}$$

$$q = \mathfrak{B} \operatorname{coſ.} n\omega + \mathfrak{B}' \operatorname{coſ.} n'\omega + \mathfrak{B}'' \operatorname{coſ} n''\omega + \mathfrak{B}''' \operatorname{coſ.} n'''\omega + \text{etc.}$$

etc.

10. Pro quouis enim alio valore litterae n, alios quoque valores litterae $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, etc. ſortientur, qui ſi debito modo in has aequationes introducantur, obtinebimus valores integrales completos pro ſingulis applicatis p, q, r, s, etc. qui propterea ad quoduis tempus ſtatum fili praebebunt, ex cuius variatione inſtantanea ſimul eius motus innoteſcet. Praeterea vero totidem adhuc manebunt coefficientes arbitrarii, quot fuerint corpuſcula, quos denique ita definire licebit, vt initio $\omega = 0$ diſtantiae ſingulorum corpuſculorum

ſorum ab axe ſint, ſtatui filo inducto conſentaneae: tum vero hae formulae iam ita ſunt comparatae, vt initio motus ſingulorum corpuſculorum euaneſcat; ſeu motus tum a quiete incipiat, alioquin enim etiam ſinus angulorum $n\omega$, $n'\omega$ etc. introduci potuiſſent. Expoſita autem methodo ſolutionis in genere, conueniet eam pro quolibet corpuſculorum numero accuratius euolui.

Problema I.

11. Si filum in terminis I et O fixum, et a data vi $=K$ tenſum, vnico corpuſculo A ſit oneratum, determinare eius motum, poſtquam de ſtatu naturali vtcunque fuerit deturbatum. Fig. 2.

Solutio.

Cum igitur ſit $IA = IP = a$; $AO = PO = b$; et elapſo tempore ω min. ſec. ponatur diſtantia $PA = p$, quae initio fuerat $= \alpha$; habebimus hanc vnicam aequationem differentio differenrialem:

$$\frac{p}{a} + \frac{p}{b} + \frac{A\,ddp}{2Kk\,d\omega^2} = 0$$

Statuamus ergo $p = \mathfrak{A}\,\text{coſ.}\,n\omega$, eritque $\frac{ddp}{d\omega^2} = -nn\mathfrak{A}\,\text{coſ.}\,np$ vnde fit $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{Ann}{2Kk}$, et $n = \sqrt{\frac{2Kk}{A}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)}$. Quare aequatio integralis quaeſita habebitur:

$$p = \mathfrak{A}\,\text{coſ.}\,\omega\sqrt{\frac{2Kk}{A}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)}$$

quae vt praebeat $p = \alpha$, poſito $\omega = 0$, poni oportet $\mathfrak{A} = \alpha$, ſicque erit pro caſu propoſito:

$$p = \alpha\,\text{coſ.}\,\omega\sqrt{\frac{2Kk}{A}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)}$$

vnde ad quoduis tempus ω min. ſec. ab initio elapſum locus corpuſculi A cognoſcitur.

Coroll. 1.

12. Hinc ſtatim innoteſcit tempus, quo corpusculum A ab initio motus primum in rectam I O perueniet, quod eueniet, quando ſit $p = 0 = \alpha \operatorname{coſ.} \frac{1}{2}\pi$, denotante π ſemiperipheriam circuli, cuius radius eſt 1, vt $\frac{1}{2}\pi$ ſit menſura anguli recti: erit ergo hoc tempus:

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{\frac{2Kk}{A}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}} \text{ min. ſec.}$$

quod ſimul eſt tempus dimidiae vibrationis fili.

Coroll. 2.

13. Si enim tempus capiatur duplo maius, corpus A perueniet ad parem diſtantiam α ab axe in altera parte, integramque vibrationem confeciſſe eſt cenſendum. Quare tempus ſingularum vibrationum, quae inter ſe erunt iſochronae, erit:

$$\frac{\pi}{\sqrt{\left(\frac{2Kk}{A}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{b}\right)\right)}} = \frac{\pi\sqrt{Aab}}{\sqrt{2Kk(a+b)}} \text{ min. ſecund.}$$

Coroll. 3.

14. Hoc ergo tempus erit maximum, ſi corpuſculum A medium locum in filo I O tenuerit. Si enim ponamus totam longitudinem $IO = a + b = l$, et $a = \frac{l+u}{2}$; $b = \frac{l-u}{2}$, erit tempus vibrationis $\frac{\pi\sqrt{A(ll-uu)}}{2\sqrt{2Kkl}}$, vnde

vnde patet, quo magis corpuſculum a fili puncto medio remoueatur, eo rapidiores fore vibrationes; ipſum autem tempus maximum, quo $u = 0$ fit $= \frac{\pi}{2} V \frac{A l}{2 K k}$ min. ſecund.

Problema 2.

15. Si filum in terminis I et O fixum, et data vi K tenſum, duobus ponduſculis A et B fuerit oneratum, determinare eius motum, poſtquam de ſtatu ſuo naturali recto IO vtcunque fuerit deturbatum. Fig 3.

Solutio.

Hic igitur habemus IA $= a$; AB $= b$; BO $= c$, et ſi elapſo tempore ω min. ſecund. ponamus diſtantias PA $= p$, et QB $= q$, quae initio fuerant α et β, ſequentes duae aequationes differentio-differentiales reſoluendae occurrunt:

$$\frac{p}{a} + \frac{p-q}{b} + \frac{A\, d d p}{2 K k d \omega^2} = 0$$

$$\frac{q-p}{b} + \frac{q}{c} + \frac{B\, d d q}{2 K k d \omega^2} = 0$$

Statuamus ergo:

$$p = \mathfrak{A} \operatorname{coſ.} n\omega \quad \text{et} \quad q = \mathfrak{B} \operatorname{coſ.} n\omega, \text{ eritque}$$

$$\frac{ddp}{d\omega^2} = -nn\mathfrak{A} \operatorname{coſ.} n\omega \quad \text{et} \quad \frac{ddq}{d\omega^2} = -nn\mathfrak{B} \operatorname{coſ.} n\omega.$$

Hi valores ſubſtituti praebent:

$$\frac{\mathfrak{A}}{a} + \frac{\mathfrak{A}-\mathfrak{B}}{b} = \frac{nnA\mathfrak{A}}{2Kk} \quad \text{et} \quad \frac{\mathfrak{B}-\mathfrak{A}}{b} + \frac{\mathfrak{B}}{c} = \frac{nnB\mathfrak{B}}{2Kk}$$

ideoque

$$\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}} = 1 + \frac{b}{a} - \frac{nnAb}{2Kk} \quad \text{et} \quad \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = 1 + \frac{b}{c} - \frac{nnBb}{2Kk}$$

vnde

vnde per multiplicationem oritur, ponendo $\frac{nn}{2Kk} = z$:

$$1 = \left(1 + \frac{b}{a} - Abz\right)\left(1 + \frac{b}{c} - Bbz\right) \text{ ſeu}$$

$$0 = \frac{1}{a} + \frac{1}{c} + \frac{b}{ac} - Az)\left(1 + \frac{b}{c}\right) - Bz\left(1 + \frac{b}{a}\right) + ABbzz,$$

quae reducitur ad hanc formam:

$$zz - \frac{z}{A}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) - \frac{z}{B}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + \frac{1}{AB}\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc}\right) = 0,$$

vnde elicitur:

$$z = \frac{1}{2A}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) + \frac{1}{2B}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)) \pm$$

$$\sqrt{}\left(\frac{1}{4AA}\right)\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^2 + \frac{1}{4BB}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 + \frac{1}{2AB}\left(\frac{1}{bb} - \frac{1}{ab} - \frac{1}{ac} - \frac{1}{bc}\right)),$$

quo valore inuento, eſt $n = \sqrt{2Kkz}$. Tum vero habebitur

$$\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}} = \frac{1}{2} + \frac{b}{2a} - \frac{Ab}{2B}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \mp$$

$$Ab\sqrt{}\left(\frac{1}{4AA}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^2 + \frac{1}{4BB}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 - \frac{1}{2Ab}\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} - \frac{1}{bb}\right)\right).$$

Cum igitur hoc modo duo inueniantur valores ipſius n, qui ſint n et n', et pro vtroque relatio inter $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ definiatur, vnde prodeant valores $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, obtinebimus hinc ſequentes valores completos pro applicatis p et q:

$$p = \mathfrak{A}\,\text{coſ.}\,n\omega + \mathfrak{A}'\,\text{coſ.}\,n'\omega$$

$$q = \mathfrak{B}\,\text{coſ.}\,n\omega + \mathfrak{B}'\,\text{coſ.}\,n'\omega$$

ob ſtatum autem initialem eſſe oportet:

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{A}' = \alpha, \text{ et } \mathfrak{B} + \mathfrak{B}' = \beta$$

alter autem tam valorum $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$, quam $\mathfrak{A}'$ et $\mathfrak{B}'$, erat indefinitus, vnde ii hinc determinabuntur.

Coroll. 1.

Coroll. 1.

16. Si ponamus breuitatis gratia:

$$\frac{1}{2A}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=P;\ \frac{1}{2B}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=Q;\ \frac{1}{AB}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}\right)=R$$

vt ſit $zz-2(P+Q)z+R=0$; et geminus ipſius z valor:

$$z=P+Q\pm\sqrt{((P+Q)^2-R)},$$

erit $\mathfrak{B}=\mathfrak{A}Ab(2P-z)$ ſeu $\mathfrak{A}=\mathfrak{B}Bb(2Q-z)$.

Coroll. 2.

17. Verum cum ſit $4PQ=\frac{1}{AB}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{bb}\right)$ $=R+\frac{1}{ABbb}$, ideoque $R=4PQ-\frac{1}{ABbb}$, habebitur:

$$z=P+Q\pm\sqrt{((P-Q)^2+\frac{1}{ABbb})},$$

ex qua forma patet, ambos valores ipſius z ſemper eſſe reales, ex priori autem eſſe poſitiuos; vnde vterque valor ipſius $n=\sqrt{2Kkz}$ erit realis.

Coroll. 3.

18. Ponamus porro ad abbreuiandum $\sqrt{((P-Q)^2+\frac{1}{ABbb})}=S$, ac diſtinguendo geminos valores, obtinebimus:

$z=P+Q+S$; $\quad z'=P+Q-S$

$n=\sqrt{2Kk(P+Q+S)}$; $\quad n'=\sqrt{2Kk(P+Q-S)}$

$\mathfrak{B}=\mathfrak{A}Ab(P-Q-S)$; $\quad \mathfrak{B}'=\mathfrak{A}'Ab(P-Q+S)$

ac motus fili his duabus aequationibus continebitur:

$$p=\mathfrak{A}\operatorname{coſ}.n\omega+\mathfrak{A}'\operatorname{coſ}.n'\omega$$
$$q=\mathfrak{B}\operatorname{coſ}.n\omega+\mathfrak{B}'\operatorname{coſ}.n'\omega.$$

Coroll. 4.

19. Vt autem motus ad ſtatum initialem datum accommodetur, fieri debet $\mathfrak{A}+\mathfrak{A}'=\alpha$ et $\alpha Ab(P-Q) + (\mathfrak{A}'-\mathfrak{A})AbS=\beta$, vnde erit $\mathfrak{A}'-\mathfrak{A}=\frac{\beta}{A\beta S}-\frac{\alpha(P-Q)}{S}$. Quare hinc nanciſcimur vtriusque conſtantis $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{A}'$ determinationem:

$$\mathfrak{A}=\tfrac{1}{2}\alpha+\frac{\alpha(P-Q)}{2S}-\frac{\beta}{2AbS} \text{ et } \mathfrak{A}'=\tfrac{1}{2}\alpha-\frac{\alpha(P-Q)}{2S}+\frac{\beta}{2AbS}, \text{ item}$$

$$\mathfrak{B}=\tfrac{1}{2}\beta-\frac{\beta(P-Q)}{2S}-\frac{\alpha}{2BbS} \text{ et } \mathfrak{B}'=\tfrac{1}{2}\beta-\frac{\beta(P-Q)}{2S}+\frac{\alpha}{2BbS}.$$

Coroll. 5.

20. Si ſtatus initialis ita fuerit comparatus, vt vel $\mathfrak{A}$ vel $\mathfrak{A}'$ fuerit $=0$, tum etiam vel $\mathfrak{B}$ vel $\mathfrak{B}'$ euaneſcet, motusque continebitur

vel in his formulis:	vel in his formulis:
$p=\mathfrak{A}\,\text{coſ.}\,n\omega$	$p=\mathfrak{A}'\,\text{coſ.}\,n'\omega$
$q=\mathfrak{B}\,\text{coſ.}\,n\omega$	$q=\mathfrak{B}'\,\text{coſ.}\,n'\omega$

vtroque ergo caſu vibrationes orientur regulares oſcillationibus penduli ſimplicis conformes, ac tempus vnius vibrationis erit

Caſu priori $=\frac{\pi}{n}$ min. ſecund.; poſteriori $=\frac{\pi}{n'}$ min. ſec.

Coroll. 6.

21. Sin autem ſtatus initialis fuerit eiusmodi, vt neque $\mathfrak{A}$ neque $\mathfrak{A}'$ euaneſcat, vibrationes orientur irregulares, et quaſi ex vtroque genere ſimplici mixtae; neque filum vnquam ad eundem ſitum reuertetur, niſi numeri n et n' rationem inter ſe teneant rationa-

tionalem. Ponatur huiusmodi ratio $n:n' = \mu:\nu$, ac fiet $\frac{P+Q+S}{P+Q-S} = \frac{\mu\mu}{\nu\nu}$; ſeu $(\mu\mu-\nu\nu)(P+Q) = (\mu\mu+\nu\nu)S$, ideoque $4(\mu^4+\nu^4)PQ - 4\mu\mu\nu\nu(PP+QQ) = \frac{(\mu\mu+\nu\nu)^2}{ABbb}$, hincque

$$P = \frac{\mu^4+\nu^4}{2\mu\mu\nu\nu}Q \pm \frac{(\mu\mu+\nu\nu)}{2\mu\mu\nu\nu}\sqrt{\left((\mu\mu-\nu\nu)^2 QQ - \frac{\mu\mu\nu\nu}{ABbb}\right)}.$$

Coroll. 7.

22. Vt ergo vibrationes euadant regulares, ſtatus initialis ita debet eſſe comparatus, vt ſit

$$\text{vel } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{-1}{Ab(S-P+Q)} = -Bb(S+P-Q)$$

$$\text{vel } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{Ab(S+P-Q)} = +Bb(S-P-Q)$$

eſt enim $SS-(P-Q)^2 = \frac{1}{ABbb}$, ideoque $S > (P-Q)$.

Coroll. 8.

23. Si omnia interualla corpuſculorum fuerint inter ſe aequalia, ſeu $a=b=c$; erit $P = \frac{1}{Aa}$, $Q = \frac{1}{Ba}$, et $R = \frac{3}{ABaa}$, vnde fit $z = \frac{1}{a}(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}) \pm \frac{1}{a}\sqrt{(\frac{1}{AA}-\frac{1}{AB}+\frac{1}{BB})}$, ſeu $z = \frac{A+B\pm\sqrt{(AA-AB+BB)}}{ABa}$, hincque

$$n = \sqrt{\frac{2Kk}{ABa}(A+B+\sqrt{(AA-AB+BB)})};\ n' = \sqrt{\frac{2Kk}{ABa}(A+B-\sqrt{(AA-AB+BB)})}$$

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{A}.\frac{B-A-\sqrt{(AA-AB+BB)}}{B};\ \mathfrak{B}' = \mathfrak{A}'.\frac{B-A+\sqrt{(AA-AB+BB)}}{B}$$

et pro ſtatu initiali adimplendo:

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2}\alpha + \frac{\alpha(B-A)-\beta B}{2\sqrt{(AA-AB+BB)}};\ \mathfrak{A}' = \tfrac{1}{2}\alpha - \frac{\alpha(B-A)+\beta B}{2\sqrt{(AA-AB+BB)}}$$

$$\mathfrak{B} = \tfrac{1}{2}\beta - \frac{\beta(B-A)-\alpha A}{2\sqrt{(AA-AB+BB)}};\ \mathfrak{B}' = \tfrac{1}{2}\beta - \frac{\beta(B-A)+\alpha A}{2\sqrt{(AA-AB+BB)}}.$$

 Motus

Motus vero his aequationibus exprimetur:

$$p = \mathfrak{A}\,\text{coſ.}\,\omega + \mathfrak{A}'\,\text{coſ.}\,n'\omega$$
$$q = \mathfrak{B}\,\text{coſ.}\,\omega + \mathfrak{B}'\,\text{coſ.}\,n'\omega$$

Coroll. 9.

24. Vt fiat hoc caſu $n : n' = \mu : \nu$, oportet eſſe:

$$\frac{4(\mu^4 + \nu^4)}{AB} - 4\mu\mu\nu\nu\left(\frac{1}{AA} + \frac{1}{BB}\right) = \frac{(\mu\mu + \nu\nu)^2}{AB}, \text{ ſeu}$$

$$\frac{B}{A} = \frac{3\mu^4 - 2\mu\mu\nu\nu + 3\nu^4 \pm \sqrt{(9\mu^8 - 12\mu^6\nu\nu - 42\mu^4\nu^4 - 12\mu\mu\nu^6 + 9\nu^8)}}{8\mu\mu\nu\nu}$$

vnde, ſi ſit $\mu = 2$, et $\nu = 1$, ſeu $n : n' = 2 : 1$, fiet

$$\frac{B}{A} = \frac{43 \pm \sqrt{825}}{32} = \frac{43 \pm 5\sqrt{33}}{32}.$$

Coroll. 10.

25. Si praeterea ambo corpora A et B ſint aequalia, erit $z = \frac{2 \pm 1}{Aa}$, vnde ſequentes obtinentur determinationes:

$$n = \sqrt{\frac{6Kk}{Aa}} \quad ; \quad n' = \sqrt{\frac{2Kk}{Aa}}$$
$$\mathfrak{B} = -\mathfrak{A} \quad ; \quad \mathfrak{B}' = +\mathfrak{A}'$$
$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) \quad ; \quad \mathfrak{A}' = \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)$$
$$\mathfrak{B} = \tfrac{1}{2}(\beta - \alpha) \quad ; \quad \mathfrak{B}' = \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)$$

et pro motu:

$$p = \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)\,\text{coſ.}\,\omega\sqrt{\frac{6Kk}{Aa}} + \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)\,\text{coſ.}\,\omega\sqrt{\frac{2Kk}{Aa}}$$
$$q = -\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)\,\text{coſ.}\,\omega\sqrt{\frac{6Kk}{Aa}} + \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)\,\text{coſ.}\,\omega\sqrt{\frac{2Kk}{Aa}}.$$

Problema 3.

Fig. 4. 26. Si filum in terminis I et O fixum et data vi $= K$ tenſum tribus ponduſculis A, B, et C fuerit onera-

oneratum, determinare eius motum, poſtquam de ſtatu ſuo naturali recto IO vtcunque fuerit deturbatum.

Solutio.

Hic igitur habemus $IA = a$; $AB = b$; $BC = c$ et $CO = d$, ac ſi, elapſo tempore ω min. ſec., ponamus diſtantias:

$PA = p$; $QB = q$ et $RC = r$

quae initio fuerant reſpectiue α, β, γ, ſequentes tres reſoluendae ſunt aequationes:

$$\frac{p}{A}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)-\frac{q}{A}\cdot\frac{1}{b}+\frac{ddp}{2Kkd\omega^2}=0$$
$$\frac{q}{B}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-\frac{p}{B}\cdot\frac{1}{b}-\frac{r}{B}\cdot\frac{1}{c}+\frac{ddq}{2Kkd\omega^2}=0$$
$$\frac{r}{C}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)-\frac{q}{C}\cdot\frac{1}{c}+\frac{ddr}{2Kkd\omega^2}=0.$$

Quodſi ergo ſtatuamus $p = \mathfrak{A}\,\text{coſ.}\,n\omega$; $q = \mathfrak{B}\,\text{coſ.}\,n\omega$; $r = \mathfrak{C}\,\text{coſ.}\,n\omega$; habebimus, ponendo $\frac{nn}{2Kk} = z$, has aequationes:

$$\frac{\mathfrak{A}}{A}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)-\frac{\mathfrak{B}}{Ab}=\mathfrak{A}z$$
$$\frac{\mathfrak{B}}{B}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-\frac{\mathfrak{A}}{Bb}-\frac{\mathfrak{C}}{Bc}=\mathfrak{B}z$$
$$\frac{\mathfrak{C}}{C}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)-\frac{\mathfrak{B}}{Cc}=\mathfrak{C}z$$

vnde eruimus:

$$\mathfrak{A}=\frac{\mathfrak{B}}{b\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)-Abz};\quad \mathfrak{C}=\frac{\mathfrak{B}}{c\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)-Ccz}$$

qui in ſecunda ſubſtituti praebent:

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{bb\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)-Abbz}-\frac{1}{cc\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)-Cccz}=Bz$$

 qua-

qua aequatione ordinata oritur :

$$z^3 \left. \begin{matrix} -\frac{1}{A}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \\ -\frac{1}{B}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \\ -\frac{1}{C}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right) \end{matrix} \right\} zz \left. \begin{matrix} +\frac{1}{AB}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}\right) \\ +\frac{1}{AC}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right) \\ +\frac{1}{Bc}\left(\frac{1}{bc}+\frac{1}{bd}+\frac{1}{cd}\right) \end{matrix} \right\} z - \frac{1}{ABC}\left(\frac{1}{abc}+\frac{1}{abd}+\frac{1}{acd}+\frac{1}{bcd}\right)=0$$

quae aequatio, ſi ponatur breuitatis gratia :

$$\tfrac{1}{A}\left(\tfrac{1}{a}+\tfrac{1}{b}\right)=P;\ \tfrac{1}{B}\left(\tfrac{1}{b}+\tfrac{1}{c}\right)=Q;\ \tfrac{1}{C}\left(\tfrac{1}{c}+\tfrac{1}{d}\right)=R$$

transmutatur in ſequentem formam :

$$(z-P)(z-Q)(z-R)=\frac{z-R}{ABbb}+\frac{z-P}{BCcc}$$

vnde terni eliciuntur valores ipſius z, iique ſemper reales et poſitiui, qui ſint z, z', et z'', ex quibus ſequentes terni valores porro eruuntur :

$$n=\sqrt{2Kkz};\quad n'=\sqrt{2Kkz'}\quad n''=\sqrt{2Kkz''}$$

$$\mathfrak{A}=\frac{\mathfrak{B}}{Ab(P-z)};\quad \mathfrak{A}'=\frac{\mathfrak{B}'}{Ab(P-z')}\quad \mathfrak{A}''=\frac{\mathfrak{B}''}{Ab(P-z'')}$$

$$\mathfrak{C}=\frac{\mathfrak{B}}{Cc(R-z)};\quad \mathfrak{C}'=\frac{\mathfrak{B}'}{Cc(R-z')}\quad \mathfrak{C}''=\frac{\mathfrak{B}''}{Cc(R-z'')}$$

quibus valoribus inuentis, motus his formulis definietur :

$$p=\mathfrak{A}\operatorname{cof.}n\omega+\mathfrak{A}'\operatorname{cof.}n'\omega+\mathfrak{A}''\operatorname{cof.}n''\omega$$

$$q=\mathfrak{B}\operatorname{cof.}n\omega+\mathfrak{B}'\operatorname{cof.}n'\omega+\mathfrak{B}''\operatorname{cof.}n''\omega$$

$$r=\mathfrak{C}\operatorname{cof.}n\omega+\mathfrak{C}'\operatorname{cof.}n'\omega+\mathfrak{C}''\operatorname{cof}n''\omega$$

quae, vt ad ſtatum propoſitum initialem accommodentur, fiat :

$$\mathfrak{A}+\mathfrak{A}'+\mathfrak{A}''=\alpha;\ \mathfrak{B}+\mathfrak{B}'+\mathfrak{B}''=\beta \text{ et } \mathfrak{C}+\mathfrak{C}'+\mathfrak{C}''=\gamma$$

ſicque motus quaeſitus erit determinatus.

Coroll.

Coroll. 1.

27. Tota ergo ſolutio reducitur ad reſolutionem huius aequationis cubicae:

$$z^3 \left.\begin{array}{l} -\frac{1}{A}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \\ -\frac{1}{B}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \\ -\frac{1}{C}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right) \end{array}\right\} z^2 \left.\begin{array}{l} +\frac{1}{AB}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}\right) \\ +\frac{1}{AC}\left(\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ad}+\frac{1}{bd}\right) \\ +\frac{1}{EC}\left(\frac{1}{bc}+\frac{1}{bd}+\frac{1}{cd}\right) \end{array}\right\} z - \frac{1}{ABC}\left(\frac{1}{abc}+\frac{1}{abd}+\frac{1}{add}+\frac{1}{bcd}\right) = 0$$

dem caſu problematis praecedentis, vbi filum duobus tantum ponduſculis erat onuſtum, haec aequatio quadratica ſolutionem continebat:

$$zz \left.\begin{array}{l} -\frac{1}{A}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \\ -\frac{1}{B}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \end{array}\right\} z + \frac{1}{AB}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}\right) = 0.$$

Coroll. 2.

28. Tres ſcilicet huius aequationis cubicae radices, generaliter modo expoſito coniunctae, generalem problematis ſuppeditant ſolutionem, quae ad omnes caſus, quicunque ſtatus filo fuerit inductus initio, pateat. Vnde patet, ſi terni numeri n, n', n'' fuerint incommenſurabiles inter ſe, motum fili admodum fore irregularem, neque certas periodos eſſe habiturum.

Coroll. 3.

29. Tres autem dantur caſus, quibus filum ad vibrationes regulares et iſochronas excitari poteſt, qui conditionibus his locum habebunt:

Caſus I

	Caſus I	Caſus II	Caſus III
ſi ſit	$\alpha=\mathfrak{A}$	$\alpha=\mathfrak{A}'$	$\alpha=\mathfrak{A}''$
	$\beta=\mathfrak{B}$	$\beta=\mathfrak{B}'$	$\beta=\mathfrak{B}''$
	$\gamma=\mathfrak{C}$	$\gamma=\mathfrak{C}'$	$\gamma=\mathfrak{C}''$
tum erit	$p=\mathfrak{A}\,\text{coſ.}\,n\omega$	$p=\mathfrak{A}'\,\text{coſ}\,n'\omega$	$p=\mathfrak{A}''\,\text{coſ.}\,n''\omega$
	$q=\mathfrak{B}\,\text{coſ}\,n\omega$	$q=\mathfrak{B}'\,\text{coſ.}\,n'\omega$	$q=\mathfrak{B}''\,\text{coſ.}\,n''\omega$
	$r=\mathfrak{C}\,\text{coſ.}\,n\omega$	$r=\mathfrak{C}'\,\text{coſ.}\,n'\omega$	$r=\mathfrak{C}''\,\text{coſ.}\,n''\omega$
temp. vibrat.	$=\frac{\pi}{n}$ min. ſec.	$=\frac{\pi}{n'}$ min. ſec.	$=\frac{\pi}{n''}$ min. ſec.

Coroll. 4.

30. Inuentis autem his tribus caſibus, quibus vibrationes iſochronae euadunt, ex iis omnes reliqui caſus motuum irregularium per compoſitionem definiri poterunt; vbi notari meretur, vtcunque hi motus appareant irregulares, eos tamen ex combinatione vibrationum iſochronarum oriri.

Coroll. 5.

31. Quando autem tria corpora A, B, C, tam ratione maſſae, quam diſtantiarum, ita fuerint comparata, vt numeri n, n', n'' inde reſultent commenſurabiles, irregularitas motus eatenus euaneſcit, quod in motu percipientur periodi, quibus filum in eundem ſtatum reſtituitur.

Coroll. 6.

32. Si corpuſculorum interualla a, b, c, d inter ſe fuerint aequalia, aequatio cubica reſoluenda abibit in hanc formam:

$$z^3-\left(\frac{2}{A}+\frac{2}{B}+\frac{2}{C}\right)\frac{zz}{a}+\left(\frac{3}{AB}+\frac{4}{AC}+\frac{3}{BC}\right)\frac{z}{aa}-\frac{4}{ABCa^3}=0$$

quae

quae ſi corpuſcula inſuper ſint inter ſe aequalia, fit:

$$z^3 - \frac{6zz}{Aa} + \frac{10z}{A^2a^2} - \frac{4}{A^3a^3} = 0$$

cuius tres radices ſunt:

$$\text{I. } z = \frac{2}{Aa};\ \text{II. } z' = \frac{2-\sqrt{2}}{Aa};\ \text{III. } z'' = \frac{2+\sqrt{2}}{Aa}.$$

Coroll. 7.

33. In hoc ergo poſtremo caſu, quo $A = B = C$ et $a = b = c = d$ erit pro motu fili generatim determinando ob $P = \frac{2}{Aa} = Q = R$:

$$n = \sqrt{\frac{4Kk}{Aa}};\quad n' = \sqrt{\frac{2(2-\sqrt{2})Kk}{Aa}};\quad n'' = \sqrt{\frac{2(2+\sqrt{2})Kk}{Aa}}$$

$$\mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{B}}{0Aa}\qquad \mathfrak{A}' = \frac{\mathfrak{B}'}{\sqrt{2}}\qquad \mathfrak{A}'' = -\frac{\mathfrak{B}''}{\sqrt{2}}$$

$$\mathfrak{C} = \frac{\mathfrak{B}}{0Aa}\qquad \mathfrak{C}' = \frac{\mathfrak{B}'}{\sqrt{2}}\qquad \mathfrak{C}'' = -\frac{\mathfrak{B}''}{\sqrt{2}}$$

ſeu $\mathfrak{B} = 0 \qquad \mathfrak{B}' = \mathfrak{A}'\sqrt{2} \qquad \mathfrak{B}'' = -\mathfrak{A}''\sqrt{2}$

et $\mathfrak{C} = -\mathfrak{A} \qquad \mathfrak{C}' = \mathfrak{A}' \qquad \mathfrak{C}'' = \mathfrak{A}''.$

Ac pro ſtatu initiali dato habebitur:

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{A}' + \mathfrak{A}'' = \alpha;\quad 0 + \mathfrak{A}'\sqrt{2} - \mathfrak{A}''\sqrt{2} = \beta;\quad -\mathfrak{A} + \mathfrak{A}' + \mathfrak{A}'' = \gamma$$

vnde obtinetur:

$$\mathfrak{A} = \frac{\alpha-\gamma}{2};\quad \mathfrak{A}' = \frac{\alpha+\beta\sqrt{2}+\gamma}{4};\quad \mathfrak{A}'' = \frac{\alpha-\beta\sqrt{2}+\gamma}{4}$$

$$\mathfrak{B} = 0\quad \mathfrak{B}' = \frac{\alpha+\beta\sqrt{2}+\gamma}{2\sqrt{2}};\quad \mathfrak{B}'' = \frac{-\alpha+\beta\sqrt{2}-\gamma}{2\sqrt{2}}$$

$$\mathfrak{C} = \frac{-\alpha+\gamma}{2};\quad \mathfrak{C}' = \frac{\alpha+\beta\sqrt{2}+\gamma}{4};\quad \mathfrak{C}'' = \frac{\alpha-\beta\sqrt{2}+\gamma}{4}$$

Conſequenter motus definietur per has formulas:

$$p = \frac{\alpha-\gamma}{2}\operatorname{coſ}.\omega\sqrt{\frac{4Kk}{Aa}} + \frac{\alpha+\beta\sqrt{2}+\gamma}{4}\operatorname{coſ}.\omega\sqrt{\frac{2(2-\sqrt{2})Kk}{Aa}} + \frac{\alpha-\beta\sqrt{2}+\gamma}{4}\operatorname{coſ}\,\omega\sqrt{\frac{2(2+\sqrt{2})Kk}{Aa}}$$

$$q = \quad + \frac{\alpha+\beta\sqrt{2}+\gamma}{2\sqrt{2}}\operatorname{coſ}\,\omega\sqrt{\frac{2(2-\sqrt{2})Kk}{Aa}} - \frac{\alpha+\beta\sqrt{2}-\gamma}{2\sqrt{2}}\operatorname{coſ}\,\omega\sqrt{\frac{2(2+\sqrt{2})Kk}{Aa}}$$

$$r = \frac{-\alpha+\gamma}{2}\operatorname{coſ}.\omega\sqrt{\frac{4Kk}{Aa}} + \frac{\alpha+\beta\sqrt{2}+\gamma}{4}\operatorname{coſ}.\omega\sqrt{\frac{2(2-\sqrt{2})Kk}{Aa}} + \frac{\alpha-\beta\sqrt{2}+\gamma}{4}\operatorname{coſ}.\omega\sqrt{\frac{2(2+\sqrt{2})Kk}{Aa}}.$$

Problema 4.

Fig. 5. 34. Si filum, in terminis I et O fixum et data vi $=$K tenſum, quatuor corpuſculis A, B, C, D fuerit oneratum, determinare eius motum, poſtquam de ſtatu ſuo naturali recto IO vtcunque fuerit depulſum.

Solutio.

Habemus ergo IA$=a$, AB$=b$, BC$=c$, CD$=d$ et DO$=e$, ac ſi elapſo tempore ω min. ſec. ponamus diſtantias

PA$=p$; QB$=q$; RC$=r$ et SD$=s$

quae initio fuerant reſpectiue α, β, γ, δ, ſequentes quatuor reſolui debent aequationes:

$$\frac{p}{A}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)-\frac{q}{A}\cdot\frac{1}{b}+\frac{ddp}{2Kkd\omega^2}=0$$

$$\frac{q}{B}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-\frac{p}{B}\cdot\frac{1}{b}-\frac{r}{B}\cdot\frac{1}{c}+\frac{ddq}{2Kkd\omega^2}=0$$

$$\frac{r}{C}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)-\frac{q}{C}\cdot\frac{1}{c}-\frac{s}{C}\cdot\frac{1}{d}+\frac{ddr}{2Kkd\omega^2}=0$$

$$\frac{s}{D}\left(\frac{1}{d}+\frac{1}{e}\right)-\frac{r}{D}\cdot\frac{1}{d}+\frac{dds}{2Kkd\omega^2}=0.$$

Quodſi iam ſtatuamus

$$p=\mathfrak{A}\operatorname{coſ}.n\omega;\ q=\mathfrak{B}\operatorname{coſ}.n\omega;\ r=\mathfrak{C}\operatorname{coſ}.n\omega;\ s=\mathfrak{D}\operatorname{coſ}.n\omega$$

ac ad abbreuiationem ponamus $\frac{nn}{2Kk}=z$, nec non $\frac{1}{A}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=P$; $\frac{1}{B}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=Q$; $\frac{1}{C}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)=R$ et $\frac{1}{D}\left(\frac{1}{d}+\frac{1}{e}\right)=S$ orientur ſequentes aequationes:

$$\mathfrak{A}P-\frac{\mathfrak{B}}{Ab}=\mathfrak{A}z$$

$$\mathfrak{B}Q-\frac{\mathfrak{A}}{Bb}-\frac{\mathfrak{C}}{Bc}=\mathfrak{B}z$$

$$\mathfrak{C}R-\frac{\mathfrak{B}}{Cc}-\frac{\mathfrak{D}}{Cd}=\mathfrak{C}z$$

$$\mathfrak{D}S-\frac{\mathfrak{C}}{Dd}=\mathfrak{D}z$$

ex

ex quibus elicitur:

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{A}Ab(P-z);$$

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{A}ABbc(P-z)(Q-z) - \frac{\mathfrak{A}c}{b}$$

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{A}ABCbcd(P-z)(Q-z)(R-z) - \frac{\mathfrak{A}Ccd}{b}(R-z) - \frac{\mathfrak{A}Abd}{c}(P-z),$$

qui valores in vltima aequatione ſubſtituti praebent:

$$ABCbcd(P-z)(Q-z)(R-z)(S-z) - \frac{Ccd}{b}(R-z)(S-z) - \frac{Abd}{c}(P-z)(S-z) - \frac{ABbc}{Pd}(P-z)(Q-z) + \frac{c}{Dbd} = 0$$

quae per $ABCbcd$ diuiſa abit in hanc formam:

$$(P-z)(Q-z)(R-z)(S-z) - \frac{(R-z)(S-z)}{ABbb} - \frac{(P-z)(S-z)}{BCcc} - \frac{(P-z)(Q-z)}{CDdd} + \frac{1}{ABCDbbdd} = 0,$$

cuius indoles clarius perſpicietur ex hac forma:

$$1 - \frac{1}{ABbb(P-z)(Q-z)} - \frac{1}{BCcc(Q-z)(R-z)} - \frac{1}{CDdd(R-z)(S-z)} + \frac{1}{ABCDbbdd(P-z)(Q-z)(R-z)(S-z)} = 0.$$

Verum ſi illa aequatio, reſtituendis pro P, Q, R, S valoribus, penitus euoluatur, obtinebitur ſequens aequatio biquadratica:

$$z^4 \left.\begin{matrix} -\frac{1}{A}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}) \\ -\frac{1}{B}(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}) \\ -\frac{1}{C}(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}) \\ -\frac{1}{D}(\frac{1}{d}+\frac{1}{e}) \end{matrix}\right\} z^3 \left.\begin{matrix} +\frac{1}{AB}(\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}) \\ +\frac{1}{AC}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}) \\ +\frac{1}{AD}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})(\frac{1}{d}+\frac{1}{e}) \\ +\frac{1}{BC}(\frac{1}{bc}+\frac{1}{bd}+\frac{1}{cd}) \\ +\frac{1}{BD}(\frac{1}{b}+\frac{1}{c})(\frac{1}{d}+\frac{1}{e}) \\ +\frac{1}{CD}(\frac{1}{cd}+\frac{1}{ce}+\frac{1}{de}) \end{matrix}\right\} zz \left.\begin{matrix} -\frac{1}{ABC}(\frac{1}{abc}+\frac{1}{abd}+\frac{1}{acd}+\frac{1}{bcd}) \\ -\frac{1}{ABD}(\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc})(\frac{1}{d}+\frac{1}{e}) \\ -\frac{1}{ACD}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})(\frac{1}{cd}+\frac{1}{ce}+\frac{1}{de}) \\ -\frac{1}{BCD}(\frac{1}{bcd}+\frac{1}{bce}+\frac{1}{bde}+\frac{1}{cde}) \end{matrix}\right\} z$$

$$+ \frac{1}{ABCD}\left(\frac{1}{abcd}+\frac{1}{abce}+\frac{1}{abde}+\frac{1}{acde}+\frac{1}{bcde}\right) = 0.$$

Inuentis autem huius aequationis quaternis radicibus z, z', z'' et z''', ex illis totidem valores numeri n habebun-

bebuntur per formulam $n = \sqrt{2Kkz}$; ac ſumtis quoque quaternis arbitrariis $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$, $\mathfrak{A}'''$, ex vnoquoque reliqui $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{D}$ reſpondentes reperientur ope formularum:

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{A}\,Ab(P-z)$$

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{A}\,ABbc((P-z)(Q-z) - \tfrac{1}{ABbb})$$

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{A}\,ABCbcd((P-z)(Q-z)(R-z) - \tfrac{1}{ABbb}(R-z) - \tfrac{1}{BCcc}(P-z))$$

ac tandem formulae pro motu fili erunt:

$$p = \mathfrak{A}\,\text{coſ}.n\omega + \mathfrak{A}'\text{coſ}.n'\omega + \mathfrak{A}''\text{coſ}\,n''\omega + \mathfrak{A}'''\text{coſ}\,n'''\omega$$

$$q = \mathfrak{B}\,\text{coſ}.n\omega + \mathfrak{B}'\text{coſ}\,n'\omega + \mathfrak{B}''\text{coſ}.n''\omega + \mathfrak{B}'''\text{coſ}.n'''\omega$$

$$r = \mathfrak{C}\,\text{coſ}.n\omega + \mathfrak{C}'\text{coſ}.n'\omega + \mathfrak{C}''\text{coſ}.n''\omega + \mathfrak{C}'''\text{coſ}.u'''\omega$$

$$s = \mathfrak{D}\,\text{coſ}.n\omega + \mathfrak{D}'\text{coſ}.n'\omega + \mathfrak{D}''\text{coſ}.n''\omega + \mathfrak{D}'''\text{coſ}.n'''\omega$$

quatuor autem conſtantes arbitrariae $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$, $\mathfrak{A}'''$ ex ſtatu initiali ita definiri debent, vt fiat:

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{A}' + \mathfrak{A}'' + \mathfrak{A}''' = \alpha$$

$$\mathfrak{B} + \mathfrak{B}' + \mathfrak{B}'' + \mathfrak{B}''' = \beta$$

$$\mathfrak{C} + \mathfrak{C}' + \mathfrak{C}'' + \mathfrak{C}''' = \gamma$$

$$\mathfrak{D} + \mathfrak{D}' + \mathfrak{D}'' + \mathfrak{D}''' = \delta.$$

Coroll. 1.

35. Iam igitur quatuor exiſtunt caſus, quibus vibrationes erunt iſochronae, quarum tempora erunt

$$\frac{\pi}{n};\quad \frac{\pi}{n'};\quad \frac{\pi}{n''};\quad \frac{\pi}{n'''}\ \text{min. ſec.}$$

atque ex his caſibus, tanquam motibus ſimplicibus, reliqui omnes per compoſitionem oriuntur.

Coroll.

Coroll. 2.

36. Ex his iam lex iſtarum formularum, ſi filum pluribus corpuſculis fuerit onuſtum, non difficulter perſpicitur. Si enim quinque habeantur corpuſcula, adiecto valore $\frac{1}{E}(\frac{1}{e}+\frac{1}{f})=T$, aequatio principalis reſoluenda ita ſe habebit:

$$1-\frac{1}{ABbb(P-z)(Q-z)}-\frac{1}{BCcc(Q-z)(R-z)}-\frac{1}{CDdd(R-z)(S-z)}-\frac{1}{DEee(S-z)(T-z)}$$

$$+\frac{1}{ABCDb^2d^2(P-z)(Q-z)(R-z)(S-z)}+\frac{1}{BCDEccee(Q-z)(R-z)(S-z)(T-z)}=0$$

Ac ſi ſex fuerint corpuſcula, poſito $\frac{1}{F}(\frac{1}{f}+\frac{1}{g})=V$, erit

$$1-\frac{1:ABbb}{(P-z)(Q-z)}-\frac{1:BCcc}{(Q-z)(R-z)}-\frac{1:CDdd}{(R-z)(S-z)}-\frac{1:DEee}{(S-z)(T-z)}-\frac{1:EFff}{(T-z)(V-z)}$$

$$+\frac{1:ABCDbbdd}{(P-z)(Q-z)(R-z)(S-z)}+\frac{1:BCDEccee}{(Q-z)(R-z)(S-z)(T-z)}+\frac{1:CDEFddff}{(R-z)(S-z)(T-z)(V-z)}$$

$$-\frac{1:ABCDEFbbddff}{(P-z)(Q-z)(R-z)(S-z)(T-z)(V-z)}=0.$$

Coroll. 3.

37. Hae autem formulae in genere nimis ſunt complicatae, quam vt quidquam ad cognitionem motus inde concludi queat. Concipiamus ergo interualla a, b, c, d, etc. inter ſe aequalia, ac pro quouis corpuſculorum numero aequationes, ex quibus valores ipſius z elici oportet, ita ſe habebunt:

Pro vno corpuſculo

$$z-\frac{2}{Aa}=0$$

Pro duobus corpuſculis

$$zz-\frac{1}{a}(\frac{2}{A}+\frac{2}{B})z+\frac{1}{aa}\cdot\frac{3}{AB}=0$$

Pro tribus corpuſculis

$$z^3-\frac{1}{a}(\frac{2}{A}+\frac{2}{B}+\frac{2}{C})zz+\frac{1}{aa}(\frac{3}{AB}+\frac{4}{AC}+\frac{3}{BC})z-\frac{1}{a^3}\cdot\frac{4}{ABC}=0$$

Pro quatuor corpuſculis

$$z^4-\frac{1}{a}\left(\frac{2}{A}+\frac{2}{B}+\frac{2}{C}+\frac{2}{D}\right)z^3+\frac{1}{aa}\left(\frac{3}{AB}+\frac{4}{AC}+\frac{4}{AD}+\frac{3}{BC}+\frac{4}{BD}+\frac{3}{CD}\right)z^2$$
$$-\frac{1}{a^3}\left(\frac{4}{ABC}+\frac{6}{ABD}+\frac{6}{ACD}+\frac{4}{BCD}\right)z+\frac{1}{a^4}\cdot\frac{5}{ABCD}=0$$

Pro quinque corpuſculis

$$z^5-\frac{1}{a}\left(\frac{2}{A}+\frac{2}{B}+\frac{2}{C}+\frac{2}{D}+\frac{2}{E}\right)z^4$$
$$+\frac{1}{aa}\left(\frac{3}{AB}+\frac{4}{AC}+\frac{4}{AD}+\frac{4}{AE}+\frac{3}{BC}+\frac{4}{BD}+\frac{4}{BE}+\frac{3}{CD}+\frac{4}{CE}+\frac{3}{DE}\right)z^3$$
$$-\frac{1}{a^3}\left(\frac{4}{ABC}+\frac{6}{ABD}+\frac{6}{ABE}+\frac{6}{ACD}+\frac{8}{ACE}+\frac{6}{ADE}+\frac{4}{BCD}+\frac{6}{BCE}+\frac{6}{BDE}+\frac{4}{CDE}\right)z^2$$
$$+\frac{1}{a^4}\left(\frac{5}{ABCD}+\frac{8}{ABCE}+\frac{9}{ABDE}+\frac{8}{ACDE}+\frac{5}{BCDE}\right)z-\frac{1}{a^5}\cdot\frac{6}{ABCDE}=0.$$

Coroll. 4.

38. Si non ſolum interualla corpuſculorum a, b, c, d etc. ſed etiam ipſa corpuſcula A, B, C, D etc. inter ſe aequalia aſſumamus, aequationes ſequentes prodibunt:

num. corp.	
I	$z-\frac{2}{Aa}=0$
II	$z^2-\frac{4z}{Aa}+\frac{3}{AAaa}=0$
III	$z^3-\frac{6zz}{Aa}+\frac{10z}{AAaa}-\frac{4}{A^3a^3}=0$
IV	$z^4-\frac{8z^3}{Aa}+\frac{21z^2}{A^2a^2}-\frac{20z}{A^3a^3}+\frac{5}{A^4a^4}=0$
V	$z^5-\frac{10z^4}{Aa}+\frac{36z^3}{A^2a^2}-\frac{56z^3}{A^3a^3}+\frac{35z^2}{A^4a^4}-\frac{6}{A^5a^5}=0$
VI	$z^6-\frac{12z^5}{Aa}+\frac{55z^4}{A^2a^2}-\frac{120z^3}{A^3a^3}+\frac{126z^2}{A^4a^4}-\frac{56z}{A^5a^5}+\frac{7}{A^6a^6}=0$

vnde pro corpuſculorum numero quocunque m concluditur, fore:

z^{2m}

$$z^{2m} - \frac{2m}{1}\cdot\frac{z^{2m-1}}{Aa} + \frac{(2m-1)(2m-2)}{1.\ 2.}\cdot\frac{z^{2m-2}}{A^2a^2} - \frac{(2m-2)(2m-3)(2m-4)}{1.\ 2.\ 3}\cdot\frac{z^{2m-3}}{A^3a^3}$$
$$+ \frac{(2m-3)(2m-4)(2m-5)(2m-6)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.}\cdot\frac{z^{2m-4}}{A^4a^4} - \frac{(2m-4)(2m-5)(2m-6)(2m-7)(2m-8)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}\cdot\frac{z^{2m-5}}{A^5a^5}$$
$$+ \text{etc.} = 0$$

Coroll. 5.

39 Hoc autem caſu coefficientes $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, etc. ex primo $\mathfrak{A}$ arbitrario pro quouis valore ipſius z ita definientur, vt ſit:

$$\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}} = Aa\left(\frac{2}{Aa} - z\right)$$
$$\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}} = A^2a^2\left(\frac{2}{Aa} - z\right)^2 - 1$$
$$\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{A}} = A^3a^3\left(\frac{2}{Aa} - z\right)^3 - 2Aa\left(\frac{2}{Ab} - z\right)$$
$$\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{A}} = A^4a^4\left(\frac{2}{Aa} - z\right)^4 - 3A^2a^2\left(\frac{2}{Aa} - z\right)^2 + 1$$

ſiue

$$\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}} = 2 - Aaz$$
$$\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}} = 3 - 4Aaz + A^2a^2zz$$
$$\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{A}} = 4 - 10Aaz + 6A^2a^2zz - A^3a^3z^3$$
$$\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{A}} = 5 - 20Aaz + 21A^2a^2zz - 8A^3a^3z^3 + A^4a^4z^4$$

etc.

quarum formularum progreſſio ex ſuperioribus facillime colligitur.

Coroll. 6.

40. Ponamus pro eodem caſu breuitatis gratia $Aaz = y$, ac pro quouis corpuſculorum numero aequationes reſoluendae ita ſe habebunt:

Pro

Pro vno corpuſculo

$y - 2 = 0$, cuius radix eſt $y = 2$

Pro duobus corpuſculis

$yy - 4y + 3 = 0$, cuius radices ſunt $y = 1$; $y' = 3$

Pro tribus corpuſculis

$y^3 - 6yy + 10y - 4 = 0$, cuius radices ſunt

$y = 2$; $y' = 2 + \sqrt{2}$; $y'' = 2 - \sqrt{2}$

Pro quatuor corpuſculis

$y^4 - 8y^3 + 21y^2 - 20y + 5 = 0$, cuius radices ſunt

$y = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$; $y' = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$; $y'' = \frac{5 + \sqrt{5}}{2}$; $y''' = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}$.

Coroll. 7.

41. Si has formulas bene perpendamus, eas per quadrata ſinuum, denotante ϱ angulum rectum, ſequenti modo exhiberi poſſe deprehendemus:

Pro vno corpuſculo

$y = 4\,(\text{ſin.}\, \tfrac{1}{2}\varrho)^2$

Pro duobus corpuſculis

$y = 4\,(\text{ſin.}\, \tfrac{1}{3}\varrho)^2$; $y' = 4\,(\text{ſin.}\, \tfrac{2}{3}\varrho)^2$

Pro tribus corpuſculis

$y = 4\,(\text{ſin.}\, \tfrac{1}{4}\varrho)^2$; $y' = 4\,(\text{ſin.}\, \tfrac{2}{4}\varrho)^2$; $y'' = 4\,(\text{ſin.}\, \tfrac{3}{4}\varrho)^2$

Pro quatuor corpuſculis

$y = 4\,(\text{ſin.}\, \tfrac{1}{5}\varrho)^2$; $y' = 4\,(\text{ſin.}\, \tfrac{2}{5}\varrho)^2$; $y'' = 4\,(\text{ſin.}\, \tfrac{3}{5}\varrho)^2$;

$y''' = 4\,(\text{ſin.}\, \tfrac{4}{5}\varrho)^2$

quarum formularum progreſſio per ſe eſt manifeſta.

Coroll.

Coroll. 8.

42. Inuentis autem pro quouis caſu valoribus ipſius y, ob $z=\frac{y}{Aa}$, erit $n=\sqrt{\frac{2Kk}{Aa}y}$, et pro reliquis coefficientibus:

$$\mathfrak{B}=\mathfrak{A}(2-y)$$
$$\mathfrak{C}=\mathfrak{A}(3-4y+yy)$$
$$\mathfrak{D}=\mathfrak{A}(4-10y+6yy-y^3)$$
$$\mathfrak{E}=\mathfrak{A}(5-20y+21yy-8y^3+y^4)$$
$$\mathfrak{F}=\mathfrak{A}(6-35y+56yy-36y^3+10y^4-y^5)$$

etc.

Cum autem y habeat huiusmodi formam $y=4(\text{ſin.}\,\Phi)^2$, erit:

$$\mathfrak{B}=\mathfrak{A}\cdot 2\,\text{coſ.}\,2\Phi=\mathfrak{A}\cdot\frac{\text{ſin.}\,4\Phi}{\text{ſin.}\,2\Phi}$$
$$\mathfrak{C}=\mathfrak{A}\cdot(2\,\text{coſ.}\,4\Phi+1)=\mathfrak{A}\cdot\frac{\text{ſin.}\,6\Phi}{\text{ſin.}\,2\Phi}$$
$$\mathfrak{D}=\mathfrak{A}\cdot(2\,\text{coſ.}\,6\Phi+2\,\text{coſ.}\,2\Phi)=\mathfrak{A}\cdot\frac{\text{ſin.}\,8\Phi}{\text{ſin.}\,2\Phi}$$
$$\mathfrak{E}=\mathfrak{A}\cdot(2\,\text{coſ.}\,8\Phi+2\,\text{coſ.}\,4\Phi+1)=\mathfrak{A}\cdot\frac{\text{ſin.}\,10\Phi}{\text{ſin.}\,2\Phi}$$
$$\mathfrak{F}=\mathfrak{A}\cdot(2\,\text{coſ.}\,10\Phi+2\,\text{coſ.}\,6\Phi+2\,\text{coſ.}\,2\Phi)=\mathfrak{A}\cdot\frac{\text{ſin.}\,12\Phi}{\text{ſin.}\,2\Phi}$$
$$\mathfrak{G}=\mathfrak{A}\cdot(\text{coſ.}\,12\Phi+2\,\text{coſ.}\,8\Phi+2\,\text{coſ.}\,4\Phi+1)=\mathfrak{A}\cdot\frac{\text{ſin.}\,14\Phi}{\text{ſin.}\,2\Phi}$$

vnde ſequens problema poterit in genere reſolui.

Problema 5.

43. Si filum, terminis I et O fixum et data vi K tenſum, onuſtum ſit quotcunque corpuſculis A, B, C etc. aequalibus et paribus interuallis a ſe inuicem diſtinctis, definire motum eius, poſtquam de ſtatu ſuo naturali vtcunque fuerit depulſum.

 Solutio.

Solutio.

Sit numerus corpuſculorum $= m$; maſſa vniuscuiusque $= A$, et binorum interuallum $= a$, erit totius fili maſſa $= mA$, et longitudo $IO = (m + 1)a$. Reducta ſint initio corpuſcula A, B, C etc. ad diſtantias ab axe α, β, γ, etc. elapſo autem tempore ω min. ſecund. peruenerint ad diſtantias $PA = p$; $QB = q$; $RC = r$, etc. His poſitis, ſi angulus rectus denotetur ſigno ϱ, et i ſumatur pro numero quocunque integro poſitiuo; valor quilibet ipſius y erit $y = A(\text{ſin.}\frac{i}{m+1}\varrho)^2$, vnde fit $n = 2\,\text{ſin.}\frac{i}{m+1}\varrho, \sqrt{\frac{2Kk}{Aa}}$; et ob $\Phi = \frac{i}{m+1}\varrho$, erit:

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{A}\,\text{ſin.}\tfrac{4i}{m+1}\varrho : \text{ſin.}\tfrac{2i}{m+1}\varrho$$
$$\mathfrak{C} = \mathfrak{A}\,\text{ſin.}\tfrac{6i}{m+1}\varrho : \text{ſin.}\tfrac{2i}{m+1}\varrho$$
$$\mathfrak{D} = \mathfrak{A}\,\text{ſin.}\tfrac{8i}{m+1}\varrho : \text{ſin.}\tfrac{2i}{m+1}\varrho.$$
etc.

Ponatur iam $\mathfrak{A} = \mathfrak{a}\,\text{ſin.}\frac{2i}{m+1}\varrho$, ac pro motu habebuntur hae formulae:

$$p = \mathfrak{a}\,\text{ſin.}\tfrac{2i}{m+1}\varrho.\ \text{coſ.}(2\omega\,\text{ſin.}\tfrac{i}{m+1}\varrho\sqrt{\tfrac{2Kk}{Aa}}) + \text{etc.}$$
$$q = \mathfrak{a}\,\text{ſin.}\tfrac{4i}{m+1}\varrho.\ \text{coſ.}(2\omega\,\text{ſin.}\tfrac{i}{m+1}\varrho\sqrt{\tfrac{2Kk}{Aa}}) + \text{etc.}$$
$$r = \mathfrak{a}\,\text{ſin.}\tfrac{6i}{m+1}\varrho.\ \text{coſ.}(2\omega\,\text{ſin.}\tfrac{i}{m+1}\varrho\sqrt{\tfrac{2Kk}{Aa}}) + \text{etc.}$$
etc.

Scilicet ex quouis valore ipſius i formentur tales expreſſiones, eaeque coniunctae praebebunt valores generales pro applicatis p, q, r etc. At pro i ſucceſſiue ſumi debent numeri 1, 2, 3, 4 vsque ad m.

Coroll.

Coroll. 1.

44. Si breuitatis gratia ponatur angulus $\frac{1}{m+1}\varrho = \Phi$ et angulus $2\omega\sqrt{\frac{2Kk}{Aa}} = \psi$, habebuntur, ſubſtituendo pro i ſucceſſiue numeros 1, 2, 3, 4 etc. ſequentes expreſſiones pro applicatis:

$$p = \mathfrak{a}\ \text{ſin.}\ 2\Phi.\ \text{coſ.}\ \psi\ \text{ſin.}\ \Phi + \mathfrak{b}\ \text{ſin.}\ 4\Phi.\ \text{coſ.}\ \psi\ \text{ſin.}\ 2\Phi + \mathfrak{c}\ \text{ſin.}\ 6\Phi.\ \text{coſ.}\ \psi\ \text{ſin.}\ 3\Phi + \text{etc.}$$

$$q = \mathfrak{a}\ \text{ſin.}\ 4\Phi.\ \text{coſ.}\ \psi\ \text{ſin.}\ \Phi + \mathfrak{b}\ \text{ſin.}\ 8\Phi.\ \text{coſ.}\ \psi\ \text{ſin}\ 2\Phi + \mathfrak{c}\ \text{ſin.}\ 12\Phi.\ \text{coſ.}\ \psi\ \text{ſin.}\ 3\Phi + \text{etc.}$$

$$r = \mathfrak{a}\ \text{ſin.}\ 6\Phi.\ \text{coſ.}\ \psi\ \text{ſin.}\ \Phi + \mathfrak{b}\ \text{ſin.}\ 12\Phi.\ \text{coſ.}\ \psi\ \text{ſin.}\ 2\Phi + \mathfrak{c}\ \text{ſin.}\ 18\Phi.\ \text{coſ.}\ \psi\ \text{ſin.}\ 3\Phi + \text{etc.}$$

$$s = \mathfrak{a}\ \text{ſin.}\ 8\Phi.\ \text{coſ.}\ \psi\ \text{ſin.}\ \Phi + \mathfrak{b}\ \text{ſin}\ 16\Phi.\ \text{coſ.}\ \psi\ \text{ſin.}\ 2\Phi + \mathfrak{c}\ \text{ſin.}\ 24\Phi.\ \text{coſ.}\ \psi\ \text{ſin.}\ 3\Phi + \text{etc.}$$

etc.

Coroll. 2.

45. Ratio autem harum formularum clarius apparebit, ſi eas ad quemuis corpuſculorum numerum accommodemus. Maneat ergo breuitatis gratia angulus $2\omega\sqrt{\frac{2Kk}{Aa}} = \psi$, eritque pro caſu vnius corpuſculi, ob $\Phi = \frac{1}{2}\varrho$,

$$p = \mathfrak{a}\ \text{ſin.}\ \varrho.\ \text{coſ.}\ \psi\ \text{ſin}\ \tfrac{1}{2}\varrho.$$

Coroll. 3.

46. Pro caſu autem duorum corpuſculorum, vbi $\Phi = \frac{1}{3}\varrho$, habebimus:

$$p = \mathfrak{a}\ \text{ſin.}\ \tfrac{2}{3}\varrho.\ \text{coſ.}\ \psi\ \text{ſin.}\ \tfrac{1}{3}\varrho + \mathfrak{b}\ \text{ſin.}\ \tfrac{4}{3}\varrho.\ \text{coſ.}\ \psi\ \text{ſin.}\ \tfrac{2}{3}\varrho$$

$$q = \mathfrak{a}\ \text{ſin.}\ \tfrac{4}{3}\varrho.\ \text{coſ.}\ \psi\ \text{ſin.}\ \tfrac{1}{3}\varrho - \mathfrak{b}\ \text{ſin.}\ \tfrac{2}{3}\varrho.\ \text{coſ.}\ \psi\ \text{ſin}\ \tfrac{2}{3}\varrho.$$

Coroll. 4.

47. Pro caſu trium corpuſculorum, ob $\Phi = \frac{1}{4}\rho$, habebimus:

$$p = \mathfrak{a}\sin.\tfrac{2}{4}\rho.\cos.\psi\sin.\tfrac{1}{4}\rho + \mathfrak{b}\sin\tfrac{4}{4}\rho.\cos.\psi\sin.\tfrac{2}{4}\rho + \mathfrak{c}\sin.\rho.\cos.\psi\sin.\tfrac{3}{4}\rho$$

$$q = \mathfrak{a}\sin.\tfrac{4}{4}\rho.\cos.\psi\sin.\tfrac{1}{4}\rho + \mathfrak{b}\sin\tfrac{3}{4}\rho.\cos.\psi\sin\tfrac{2}{4}\rho - \mathfrak{c}\sin\tfrac{4}{4}\rho.\cos.\psi\sin.\tfrac{3}{4}\rho$$

$$r = \mathfrak{a}\sin.\tfrac{2}{4}\rho\cos.\psi\sin.\tfrac{1}{4}\rho - \mathfrak{b}\sin.\tfrac{4}{4}\rho.\cos.\psi\sin.\tfrac{2}{4}\rho + \mathfrak{c}\sin.\tfrac{2}{4}\rho.\cos.\psi\sin.\tfrac{3}{4}\rho.$$

Coroll. 5.

48. Pro caſu quatuor corpuſculorum, ob $\Phi = \frac{1}{5}\rho$, habebimus:

$$p = \mathfrak{a}\sin.\tfrac{2}{5}\rho.\cos.\psi\sin.\tfrac{1}{5}\rho + \mathfrak{b}\sin.\tfrac{4}{5}\rho.\cos.\psi\sin\tfrac{2}{5}\rho + \mathfrak{c}\sin.\tfrac{4}{5}\rho.\cos\psi\sin.\tfrac{3}{5}\rho + \mathfrak{d}\sin.\tfrac{2}{5}\rho.\cos\psi\sin\tfrac{4}{5}\rho$$

$$q = \mathfrak{a}\sin.\tfrac{4}{5}\rho.\cos\psi\sin\tfrac{1}{5}\rho + \mathfrak{b}\sin.\tfrac{2}{5}\rho\cos.\psi\sin.\tfrac{2}{5}\rho - \mathfrak{c}\sin.\tfrac{2}{5}\rho.\cos.\psi\sin.\tfrac{3}{5}\rho - \mathfrak{d}\sin.\tfrac{4}{5}\rho\cos.\psi\sin.\tfrac{4}{5}\rho$$

$$r = \mathfrak{a}\sin.\tfrac{4}{5}\rho.\cos\psi\sin.\tfrac{1}{5}\rho - \mathfrak{b}\sin.\tfrac{2}{5}\rho.\cos.\psi\sin\tfrac{2}{5}\rho - \mathfrak{c}\sin\tfrac{2}{5}\rho.\cos.\psi\sin.\tfrac{3}{5}\rho + \mathfrak{d}\sin.\tfrac{4}{5}\rho.\cos.\psi\sin\tfrac{4}{3}\rho$$

$$s = \mathfrak{a}\sin.\tfrac{2}{5}\rho\cos\psi\sin.\tfrac{1}{5}\rho - \mathfrak{b}\sin\tfrac{4}{5}\rho.\cos.\psi\sin.\tfrac{2}{5}\rho + \mathfrak{c}\sin.\tfrac{4}{5}\rho.\cos.\psi\sin\tfrac{3}{5}\rho - \mathfrak{d}\sin.\tfrac{2}{5}\rho.\cos.\psi\sin.\tfrac{4}{5}\rho.$$

Coroll. 6.

49. Quod ſi vero numerus corpuſculorum fuerit infinite magnus, ob $\sin.\Phi = \Phi = \frac{\rho}{m}$, nanciſcemur has formulas:

$$p = \frac{2\mathfrak{a}\rho}{m}\cos.\frac{\psi\rho}{m} + \frac{4\mathfrak{b}\rho}{m}\cos.\frac{2\psi\rho}{m} + \frac{6\mathfrak{c}\rho}{m}\cos.\frac{3\psi\rho}{m} + \text{etc.}$$

$$q = \frac{4\mathfrak{a}\rho}{m}\cos.\frac{\psi\rho}{m} + \frac{8\mathfrak{b}\rho}{m}\cos.\frac{2\psi\rho}{m} + \frac{12\mathfrak{c}\rho}{m}\cos.\frac{3\psi\rho}{m} + \text{etc.}$$

$$r = \frac{6\mathfrak{a}\rho}{m}\cos.\frac{\psi\rho}{m} + \frac{12\mathfrak{b}\rho}{m}\cos.\frac{2\psi\rho}{m} + \frac{18\mathfrak{c}\rho}{m}\cos.\frac{3\psi\rho}{m} + \text{etc.}$$

etc.

Coroll.

Coroll. 7.

50. Verum ſi huius cordae tota longitudo IO ponatur $= l$, et maſſa totius cordae $=$ M ob $a = \frac{l}{m}$, et $A = \frac{M}{m}$, erit $\psi = 2 m \omega V \frac{2Kk}{Ml}$, vnde $\frac{\psi \varrho}{m} = 2 \varrho \omega V \frac{2Kk}{Ml} = \pi \omega V \frac{2Kk}{Ml}$; in coefficientibus autem conſtantibus vtpote arbitrariis omitti poterunt litterae ϱ et m, ita vt ſit:

$$p = \mathfrak{a} \text{coſ.} \pi \omega V \tfrac{2Kk}{Ml} + \mathfrak{b} \text{coſ.} 2 \pi \omega V \tfrac{2Kk}{Ml} + \mathfrak{c} \text{coſ.} 3 \pi \omega V \tfrac{2Kk}{Ml} + \text{etc.}$$

$q = 2p$; $r = 3p$; $s = 4p$ etc.

quae formula eundem exhibet motum, qui pro corda vniformiter craſſa determinari ſolet.

DE MOTV VIBRATORIO CORDARVM INAEQVALITER CRASSARVM.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Quae primum a *Tayloro* circa caſum vibrationum ſingularem, tum vero generaliter a Cel. *Alemberto* et a me ſunt inueſtigata, ad cordas per totam longitudinem aequaliter craſſas reſtringuntur, ex quo etiam regulae, pro formatione ſoni inde petitae, vltra hoc cordarum genus extendi non poſſunt. Ita regula inuenta, quod tempus cuiusque vibrationis cordae, cuius longitudo $= a$, pondus $= M$, et vis tendens cordam $= F$, ſit $= \sqrt{\frac{Ma}{2Fg}}$ minutorum ſecundorum, denotante g altitudinem, ex qua graue vno minuto ſecundo libere delabitur, non niſi pro cordis vniformiter craſſis habet locum; quin etiam in his tantum cordis vſu venire poteſt, vt eadem corda vel duplo, vel triplo, vel quadruplo, plures edat vibrationes, quam haec regula continet. Denique etiam inſigne illud phaenomenon, quo eadem corda ſubinde plures huiusmodi ſonos, rationem numerorum 1, 2, 3, 4 etc. ſequentes, ſimul edere obſeruatur, cuius cauſam Vir Celeb. *Daniel Bernoulli* feliciſſime nuper explicauit, in aliis cordis, niſi quae ſint aequabiliter craſſae, haud deprehenditur.

2.

2. Quando autem cordae non ſunt aequabiliter craſſae, atque in aliis corporum vibrantium generibus etiamſi ſimili modo vſu venire poteſt, vt idem corpus plures ſonos ſimul edat, hi tamen ſoni vtcunque a ratione numerorum 1, 2, 3, 4 etc. diſcrepare poſſunt. Ex quo intelligere licet, quam infirmo nitatur fundamento principium illud, cui ſummus in arte muſica artifex *de Rameau* vniuerſam harmoniam ſuperſtruendam arbitratur. Ideo ſcilicet diuerſos ſonos ad harmoniam compoſitos eſſe putat, quod iidem ſoni ab eadem corda vibrante ſimul producantur. Verum praeterquam iam pridem firmiſſimis rationibus eſt demonſtratum, principium harmoniae in ſimplicitate rationum, quas numeri vibrationum eodem tempore editarum inter ſe tenent, vnice eſſe quaerendum; haec opinio etiam per cordas inaequaliter craſſas, quae ſonos vtcunque diſſonos ſimul edere poſſunt, funditus euertitur.

3. Ne igitur talibus phaenomenis, quae cordis vniformiter craſſis ſunt propria, nimium tribuatur, haud abs re fore arbitror, ſi cordarum etiam inaequaliter craſſarum motum, quantum quidem Analyſeos fines permittunt, examini ſubiecero, eiusque inueſtigationem latiſſime complexam inſtituero. Maxime autem ardua eſt haec quaeſtio, atque grauiſſimis difficultatibus inuoluta; hancque ob cauſam etiamſi in eius enodatione parum profecero, tamen ampliſſimus nobis aperietur campus, vires noſtras in analyſi exercendi, huiusque ſcientiae limites vlterius dilatandi Hic igitur non tam ipſius quaeſtionis, quam tractandam ſuſcipio, vtilitas eſt ſpectanda, etiamſi forte non

parum

parum doctrinam de vibrationibus cordarum ſit illuſtratura, quam opportuna occaſio nonnulla inſignia momenta, per totam Analyſin vberrimum fructum pollicentia, accuratius perpendendi. Huiusmodi autem inueſtigationibus, quae per ſe leuis momenti videantur, praeclariſſima inuenta, quibus Analyſis adhuc eſt ditata, plerumque debemus.

4. Quo igitur facilius maſſam ſeu pondus cordae ratione inaequalis craſſitiei in calculum introducere queamus, ſumamus cylindri, ex pari materia confecti, cuius baſis diameter ſit $= b$, et altitudo $= b$, maſſam ſeu pondus eſſe $= M$: hinc enim cuiusque cylindri elementaris in corda concipiendi, cuius diameter eſt $= z$, et altitudo $= dx$, pondus erit $= \frac{Mzzdx}{bbb}$. Cordam enim tanquam rotundam, ſeu quaſi tornatam, ſpectare licet, vt ſit ex infinitis huiusmodi cylindrulis elementaribus compoſita. Praeterea vero hic cordam perfecte flexilem pono, omnique rigore, ſiue elatere, penitus deſtitutam, vt inflexioni, quam inter vibrandum patitur, nullo modo obluctetur. Denique etiam, vti in cordis aequabilis craſſitiei eſt factum, ipſas vibrationes quaſi infinite paruas ſpectabo, ita vt excurſiones vtrinque a ſitu naturali recedentes prae longitudine cordae pro nihilo haberi queant. Hoc modo longitudo cordae manebit inuariata, calculoque hoc commodi aſſequemur, vt elementa curuae ab elementis axis non diſcrepent.

Tab. II. Fig. 1. 5. Sit igitur A B huiusmodi corda inaequabilis craſſitiei, in punctis A et C fixa, et tenſa a vi quacunque, quam exponamus pondere $= F$. Statuamus

totam

totam cordae longitudinem $AB = a$, quae, dum eſt in quiete, vtique ſitum rectilineum APB tenebit; abſciſſa autem a puncto A portione quacunque $AP = x$, ſit diameter craſſitiei eius in puncto $P = z$, et, quia quaeſtionem generatim complectitur, erit z functio quaecunque ipſius x, et quidem functio cognita, ſiquidem variationem craſſitiei tanquam cognitam ſpectemus. Sumto ergo longitudinis elemento $Pp = dx$, erit maſſa ſeu pondus huius elementi cordae $Pp = \frac{Mzzdx}{bbh}$. In genere ergo problema, cuius ſolutionem aggredior, ita ſe habet:

Si haec corda a ſtatu naturali recto APB *in figuram quamcunque fuerit depulſa, ita tamen vt eius elongationes a recta* AB *pro axe aſſumtae ſint quam minimae, atque corda de hoc ſitu violento ſubito dimittatur, definire motum vibratorium, quem eſt receptura:*

Proponitur ergo in hoc problemate figura quaecunque, quae cordae initio fuerit tributa, quaeſtioque huc redit, vt ad quoduis tempus, a momento relaxationis elapſum, ſtatus cordae definiatur.

6. Ponamus ergo, ab iſto momento iam elapſum eſſe tempus $= t$, atque nunc cordam conſecutam eſſe figuram AMB, cuius termini quidem A et B cum ſtatu naturali conueniant, punctum autem P cordae iam in M eſſe translatum, vocemusque hanc applicatam $BM = y$, quae erit quantitas non ſolum ab abſciſſa $AP = x$, ſed inſuper etiam a tempore t pendens, ſeu erit functio quaedam ipſius x et ipſius t ſimul, in cuius functionis inueſtigatione tota problematis

 ſolu-

ſolutio verſabitur. Iam autem quasdam primarias proprietates huius functionis ipſa quaeſtionis natura ſuppeditat, quarum prima eſt, vt, ſi ponatur $x = 0$, iſta functio y ſemper euaneſcat, quicunque valor tempori t tribuatur; deinde vero idem euenire debet in altero puncto fixo B, ſi ponatur $x = AB = a$. Tertio, ſi tempus t ſtatuatur euaneſcens, functio y ita debet eſſe comparata, vt figuram cordae primitus impreſſam referat Quarto vero, etiam poſito $t = 0$, motus cordae omnino euaneſcere debet, quod eueniet, ſi ratio differentialis $\frac{dy}{dt}$, dum abſciſſa x vt conſtans tractatur, in nihilum abeat.

7. Dum enim in his excurſionibus minimis longitudo cordae non mutari aſſumitur, longitudo AM aequalis cenſenda eſt longitudini $AP = x$, vnde durante motu punctum M ſecundum ipſam applicatam MP mouebitur, neque extra eam vsquam diuagabitur. Quare, ſi ponamus $dy = p\,dx + q\,dt$, punctum M tempuſculo dt per ſpatiolum $q\,dx$ feretur, cuius motus propterea celeritas, a recta AB ſecundum directionem PM recedens, erit $= \frac{q\,dt}{dt} = q$. Vtar autem hic ſignandi modo iam aliquoties expoſito, et pro q ſcribam $(\frac{dy}{dt})$, vti ſimiliter haec ſcriptio $(\frac{dy}{dx})$ valorem ipſius p exprimit. Vlterius autem iſtum ſignandi modum hic extendi conueniet, ita vt, quia $p = (\frac{dy}{dx})$ et $q = (\frac{dy}{dt})$ poſuimus, haec formula $(\frac{ddy}{dx^2})$ idem ſignificet, quod $(\frac{dp}{dx})$, et $(\frac{ddy}{dx\,dt})$ idem, quod $(\frac{dp}{dt})$; tum vero $(\frac{ddy}{dt^2})$ idem, quod $(\frac{dq}{dt})$, et $(\frac{ddy}{dt\,dx})$ idem, quod $(\frac{dq}{dx})$. Cum autem ex

natura

natura differentiationis ſit $(\frac{dq}{dx}) = (\frac{dp}{dt})$, manifeſtum eſt, hoc ſignandi modo fore $(\frac{ddy}{dtdx}) = (\frac{ddy}{dxdt})$, quae ſcriptionis ſimilitudo valoris vtriusque aequalitatem commodisſime declarat.

8. Dum autem corda in ſitu A M B verſatur, ſingula eius elementa in motu ſuo vel accelerabuntur, vel retardabuntur, quae motus mutatio a vi cordam tendente F oritur, indeque eſt definienda. Hanc vero vim, a tenſione reſultantem, ex figura A M B, quam corda nunc tenet, determinari oportet, quo in negotio, quamdiu eandem cordae figuram A M B contemplamur, tempus t tanquam quantitatem conſtantem tractari conueniet, vnde in calculum hic tantum formulae $(\frac{dy}{dx})$ et $(\frac{ddy}{dx^2})$ ingredientur, excluſis reliquis, variabilitatem temporis t inuoluentibus. At quia corda a ſitu naturali quam minime diſtat, tenſio cordae in ſingulis, elementis immutata manebit, eritque adhuc $= E$, vnde punctum M, ſeu potius elementum Mm, tam a portione antecedente M A, quam a ſequente mB, vim $= F$ ſuſtinebit, quarum virium directio tangentium in punctis M et m ducendarum directionem ſequetur.

9. Reſoluantur ergo hae vires more ſolito, atque hinc, ex vi F ſecundum tangentem in M antrorſum vrgente, naſcetur vis ſecundum directionem M P ſollicitans $= F(\frac{dy}{dx})$, quia elementum curuae ipſi elemento abſciſſae dx aequale reputatur. Verum ex vi F ſecundum tangentem in m retrorſum vrgente naſcetur vis ſecundum directionem contrariam P M ſollicitans $= F(\frac{dy}{dx}) + F d. (\frac{dy}{dx})$, in qua poſtrema differentia-

tiatione tempus t adhuc vt conſtans ſpectatur: erit ergo $d.\left(\frac{dy}{dx}\right) = d.\,p = dx\left(\frac{dp}{dx}\right)$ ideoque $d.\left(\frac{dy}{dx}\right) = dx\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$. Ex his ergo duabus viribus reſultat vis elementum cordae Mm ab axe AB ſecundum directionem PM remouens $= F\,dx\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$, ſi quidem haec expreſſio haberet valorem poſitiuum; quia autem ſemper valorem negatiuum ſortitur, haec vis perpetuo cordam ad ſitum naturalem AB impellit, vti ex motus natura per ſe eſt manifeſtum. Vi ergo motrice, cuius actioni ſingula cordae elementa ſunt ſubiecta, inuenta, facile erit ipſam motus mutationem elicere, vnde totus cordae motus ſubſecuturus ſponte innoteſcet.

10. Inuenta ergo vis motrix $F\,dx\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$ diuidatur per maſſam mouendam $\frac{Mzz\,dx}{bbb}$, vt obtineatur acceleratio $= \frac{Fbbb}{Mzz}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$. Cum iam celeritas puncti M ſit $= \left(\frac{dy}{dt}\right)$, inde acceleratio ſecundum directionem PM quoque definitur per $2\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$, ſecundum eas motus leges, quas alias ſtabiliui, vbi celeritas per altitudinem ipſi debitam, tempus vero per ſpatium ad celeritatem applicatum menſuratur. Quod ſi autem tempus potius in minutis ſecundis exprimere velimus, introducta altitudine g, ex qua graue vno minuto ſecundo libere deſcendit, loco litterae t poſtremam formulam afficientis ſcribi oportet $2t\sqrt{g}$, ideoque $4g\,dt^2$ loco dt^2, ex quo acceleratio erit $= \frac{1}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$, ac littera t iam numerum abſolutum denotat, indicantem, quot minuta ſecunda a motus initio iam ſint praeterlapſa. Gemina ergo accelerationis formula ſequentem praebebit aequationem:

$$\frac{1}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \frac{Fbbb}{Mzz}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) \text{ ſeu } \left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \frac{2Fbbbg}{Mzz}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$$

quae

quae totum motum, quo corda ciebitur, in ſe complectitur.

11. Hic primum obſeruandum eſt, quantitatem z eſſe functionem ipſius x tantum, atque ex data cordae craſſitie inaequabili definiri; hac ergo functione, tanquam cognita ſpectata, quaeſtio mechanica ad hanc quaeſtionem mere analyticam eſt reuocata; qua quaeritur, qualis functio binarum variabilium x et t pro y ſubſtitui debeat, vt conditiones in hac aequatione $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \frac{2Fbbbg}{Mzz}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$ contentae adimpleantur; ſiue vt haec analogia locum habeat:

$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) : \left(\frac{ddy}{dx^2}\right) = 2Fbbbg : Mzz.$$

Facile autem perſpicitur, huic conditioni infinitis modis ſatisfieri poſſe, ex quibus deinceps eos eligi oportet, qui ſimul proprietatibus ante commemoratis ſint praediti; ſcilicet vt ſemper prodeat $y=0$, ſiue ponatur $x=0$, ſiue $x=a$, quemcunque valorem tempus t obtinuerit. Deinde vt, poſito tempore $t=0$, aequatio inter x et y eam ipſam curuam ſit exhibitura, quae primum cordae fuerit inducta. Tum vero, vt, poſito $t=0$, valor quantitatis $\left(\frac{dy}{dt}\right)$ euaneſcat pro qualibet abſciſſa x.

12. Vt igitur ſolutio has cunctas determinationes ſuſcipere poſſit, facile intelligitur, aequationem inventam $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \frac{2Fbbbg}{Mzz}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$ generaliſſime conſtrui oportere, ita vt pro y expreſſio generaliſſima eliciatur, in qua omnes omnino valores, huic aequationi ſatisfacientes, ſint contentae; cuiusmodi ſolutionem dedi pro caſu cordarum aequabiliter craſſarum, quo cordae

 diame-

diameter z erit conſtans $= b$, totusque ideo coefficiens $\frac{2Fbbhg}{Mzz}$ quantitati conſtanti aequalis. Oſtendi enim pro hoc caſu, ſi breuitatis gratia ponatur $\frac{2Fbbhg}{Mzz} = cc$, huic aequationi $(\frac{ddy}{dt^2}) = cc(\frac{ddy}{dx^2})$ generaliſſime ſatisfieri per hanc formam $y = \Phi(x+ct) + \psi(x-ct)$, vbi Φ et ψ ſunt ſigna, functiones quascunque quantitatum $x+ct$ et $x-ct$ indicantia. Pro noſtro ergo caſu cordarum inaequaliter craſſarum ſimilis forma generaliſſima deſideratur, quae pari modo aequationem differentio-differentialem $(\frac{ddy}{dt^2}) = \frac{2Fbbhg}{Mzz}(\frac{ddy}{dx^2})$ exhauriat; huiusmodi autem ſolutionem ob defectum analyſeos vix ſperare licet.

13. Quodſi tantum functionem particularem eruerimus, quae loco y ſubſtituta, aequationi ſatisfaciat $(\frac{ddy}{dt^2}) = \frac{2Fbbhg}{Mzz}(\frac{ddy}{dx^2})$, ea ſpeciem quandam vibrationum, quarum corda erit capax, definiet, ſiquidem ea functio ita fuerit comparata, vt, ſiue ponatur $x=0$, ſiue $x=a$, valor ipſius y prodeat euaneſcens, quantumcunque tempus t iam fuerit elapſum. Ac ſi haec conditio locum habeat, patebit, cuiusmodi figura cordae primitus tribui debeat, vt ad hunc motum ſit accommodata. Tales igitur ſolutiones particulares vſu non carebunt, cum ſemper certam quandam ſpeciem vibrationum nobis declarent, quae ſub certis conditionibus in motu cordae locum habere queant; etiamſi ſolutio problematis, in genere propoſiti, quo figura cordae initialis eſt praeſcripta, adhuc maneat abſcondita. Ob defectum ergo ſolutionis generalis in huiusmodi ſolutionibus particularibus acquieſcere debebimus, quemadmodum etiam pro

caſu

caſu vniformiter craſſarum ſolutio *Taylori*, etſi fuerat particularis, non parum motum huiusmodi cordarum illuſtrauit, ac tandem etiam ad ſolutionem generalem perduxit.

14. Multo minus igitur pro caſu cordarum inaequaliter vtcunque craſſarum, ſolutionem completam ante expectare poterimus, quam plures ſolutiones particulares ſedulo euoluerimus. Ac primum quidem animaduerto, ſtatim ac duae pluresue ſolutiones particulares fuerint inuentae, ex iis facillime infinitas alias per compoſitionem erui poſſe. Si enim P, Q, R ſint eiusmodi functiones quantitatum x et t, quarum quaelibet loco y ſubſtituta aequationi inuentae ſatisfaciat, tum quaeuis harum aequationum $y = P$, $y = Q$, $y = R$ certam quandam ſpeciem vibrationum exprimet, quarum cuique certus quidam ſonus conueniet. Iam vero manifeſtum eſt, ſi ſingulae aequationes iſtae ſeorſim quaeſito ſatisfaciant, tum etiam aequationem ex illis vtcunque compoſitam $y = \alpha P + \beta Q + \gamma R$ quaeſito aeque eſſe ſatisfacturam; vnde hoc nanciſcimur eximium Theorema Phyſico-Muſicum, a Celeb. *Bernoullio* prolatum, quod quos ſonos corda ſeorſim edere valeat, eosdem quoque ſimul edere poſſit.

15. Ponamus breuitatis gratia $\frac{2Fbbbg}{Mzz} = ss$, vt ss denotet functionem datam abſciſſae x, et cardo quaeſtionis in hac aequatione $(\frac{ddy}{dt^2}) = ss(\frac{ddy}{dx^2})$ reſoluenda verſabitur, cuius quidem conſtructionem generalem, ſi ss eſſet quantitas conſtans, iam nouimus contentam fore in hac formula:

$$y = \Phi(x + st) + \psi(x - st)$$

ve-

verum quia s eſt quantitas variabilis, haec formula non amplius conditioni praeſcriptae ſatisfacit. Operae pretium igitur erit, inueſtigare, quibusnam caſibus ſimiles formulae generales locum habere queant; hunc in finem fingamus huiusmodi valorem

$$y = v\,\Phi\,u,$$

vbi v et u ſint functiones quaecunque ipſarum t et x, etiamſi prior v ſine detrimento amplitudinis tanquam functio ſolius x ſpectari poſſit. Vtar autem in differentiatione his ſignis:

$$d.\,\Phi u = du.\,\Phi' u \text{ et } d.\,\Phi' u = du.\,\Phi'' u.$$

16. Cum igitur differentiando ſit

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = \left(\frac{dv}{dt}\right)\Phi u + v\left(\frac{du}{dt}\right)\Phi' u \text{ et}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = \left(\frac{dv}{dx}\right)\Phi u + v\left(\frac{du}{dx}\right)\Phi' u, \text{ erit}$$

$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddv}{dt^2}\right)\Phi u + 2\left(\frac{dv}{dt}\right)\left(\frac{du}{dt}\right)\Phi' u + v\left(\frac{ddu}{dt^2}\right)\Phi' u + v\left(\frac{du}{dt}\right)^2\Phi'' u$$

$$\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) = \left(\frac{ddv}{dx^2}\right)\Phi u + 2\left(\frac{dv}{dx}\right)\left(\frac{du}{dx}\right)\Phi' u + v\left(\frac{ddu}{dx^2}\right)\Phi' u + v\left(\frac{du}{dx}\right)^2\Phi'' u$$

atque, his valoribus ſubſtitutis, in aequatione $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = ss\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$ membra, quodlibet functionis genus continentia, ſeorſim aequentur, vnde ſequentes aequationes obtinebuntur:

I. $\left(\frac{ddv}{dt^2}\right) = ss\left(\frac{ddv}{dx^2}\right)$

II. $2\left(\frac{dv}{dt}\right)\left(\frac{du}{dt}\right) + v\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = 2ss\left(\frac{dv}{dx}\right)\left(\frac{du}{dx}\right) + ssv\left(\frac{ddu}{dx^2}\right)$

III. $v\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = ssv\left(\frac{du}{dx}\right)^2$

quarum poſtrema ſtatim praebet $\left(\frac{du}{dt}\right) = \pm s\left(\frac{du}{dx}\right)$, cui ſatisfit ponendo $u = t \pm \int \frac{dx}{s}$. Satisfaceret quidem etiam functio quaecunque formulae $t \pm \int \frac{dx}{s}$; ſed hinc amplitudo formulae aſſumtae Φu non extenderetur.

17. Ponamus ergo $u = t \pm \int \frac{dx}{s}$, quae formula eſt determinata ob s functionem ipſius x tantum, eritque $\left(\frac{du}{dt}\right) = 1$, et $\left(\frac{du}{dx}\right) = \pm \frac{1}{s}$, porroque $\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = 0$, et $\left(\frac{ddu}{dx^2}\right) = \mp \frac{ds}{ssdx}$; qui valores in ſecunda aequatione ſubſtituti praebent:

$$2\left(\frac{dv}{dt}\right) = \pm 2s\left(\frac{dv}{dx}\right) \mp \frac{vds}{dx}$$

ſeu $\left(\frac{dv}{dt}\right) = \pm s\left(\frac{dv}{dx}\right) \mp \frac{vds}{2dx}$

Hinc vlterius more noſtro differentiando conſequimur:

$$\left(\frac{ddv}{dt^2}\right) = \pm s\left(\frac{ddv}{dxdt}\right) \mp \frac{ds}{2dx}\left(\frac{dv}{dt}\right) \text{ et}$$

$$\left(\frac{ddv}{dt\,dx}\right) = \pm \frac{ds}{dx}\left(\frac{dv}{dx}\right) \pm s\left(\frac{ddv}{dx^2}\right) \mp \frac{ds}{2dx}\left(\frac{dv}{dx}\right) \mp \frac{vdds}{2dx^2}$$

vnde fiet:

$$\left(\frac{ddv}{dt^2}\right) = + \frac{sds}{2dx}\left(\frac{dv}{dx}\right) + ss\left(\frac{ddv}{dx^2}\right) - \frac{svdds}{2dx^2} - \frac{sds}{2dx}\left(\frac{dv}{dx}\right) + \frac{vds^2}{4dx^2},$$

qui valor, cum per primam aequationem aequalis eſſe debeat ipſi $ss\left(\frac{ddv}{dx^2}\right)$, orietur:

$$-\frac{svdds}{2dx^2} + \frac{vds^2}{4dx^2} = 0, \text{ ſeu } 2sdds = ds^2,$$

cuius integrale primum eſt $\frac{\alpha ds^2}{dx^2} = s$, porroque $x = \beta + 2\sqrt{\alpha s}$, ſicque obtinebimus $s = \frac{(k+nx)^2}{f}$.

18. En ergo caſum eximium, pro quo ſolutionem generalem exhibere poterimus, qui toties locum habet, quoties diameter craſſitiei cordae z ita pendeat ab abſciſſa x, vt ſit $s = \frac{(k+nx)^2}{f}$; ſeu quando fuerit $\frac{2Fbbhg}{Mzz} = \frac{(k+nx)^4}{ff}$, ideoque ipſe diameter craſſitiei cordae $z = \frac{bf\sqrt{hg}}{(k+nx)^2}\sqrt{\frac{2F}{M}}$. Cum autem iam ſit $s = \frac{(k+nx)^2}{f}$, erit $u = t \mp \frac{f}{n(k+nx)} + m$; et ob $\frac{ds}{dx} = \frac{2n(k+nx)}{f}$, pro valore v habebimus:

$$2\left(\frac{dv}{dt}\right) = \pm \frac{2(k+nx)^2}{f}\left(\frac{dv}{dx}\right) \mp \frac{2n(k+nx)}{f}v$$

Ponamus ergo, v tantum ab x pendere, vt ſit $\left(\frac{dv}{dt}\right) = 0$, eſſeque oportet $(k + nx)dv = uvdx$, ſeu $v = \alpha(k + nx)$. Quare cum pro u duplicem valorem elicuerimus, et vtriusque functionem quamcunque capere liceat, exinde obtinebitur pro y ſequens valor generalis:

$$y = (k + nx)\Phi\left(t + \alpha + \frac{f}{n(k + nx)}\right) + (k + nx)\Psi\left(t + \beta - \frac{f}{n(k + nx)}\right)$$

19. Quo hunc caſum facilius applicare queamus, ponamus, diametrum craſſitiei cordae in A eſſe $= b$, in alio autem quocunque loco P eſſe $z = \frac{b}{\left(1 + \frac{nx}{a}\right)^2}$ $= \frac{aab}{(a + nx)^2}$, ita vt in altero termino B diameter cordae futurus ſit $z = \frac{b}{(1 + n)^2}$, vbi n vel numerum poſitivum quemcunque, vel fractionem quamcunque vnitate minorem negatiuam aſſumere licet. Quodſi iam haec forma comparetur cum praecedente $z = \frac{bf\sqrt{bg}}{(k + nx)^2} \sqrt{\frac{2F}{M}}$, habebimus $k = a$ et $f = \frac{aa}{\sqrt{bb}} \sqrt{\frac{M}{2F}} = \frac{a\sqrt{N}}{\sqrt{2Fbg}}$. In Formula autem ante inuenta ponamus $\alpha = -\frac{f}{nk}$, et $\beta = \frac{f}{nk}$, quod ſine detrimento vniuerſalitatis fieri poteſt, ſicque obtinebimus pro motu cordae determinando ſequentem aequationem generalem:

$$y = (a + nx)\Phi\left(t + \frac{ax\sqrt{M}}{(a + nx)\sqrt{2Fbg}}\right) + (a + nx)\Psi\left(t - \frac{ax\sqrt{M}}{(a + nx)\sqrt{2Fbg}}\right)$$

quam etiam hoc modo exprimere licet:

$$y = (a + nx)\Phi\left(\frac{ax}{a + nx} + t\sqrt{\frac{2Fbg}{M}}\right) + (a + nx)\Psi\left(\frac{ax}{a + nx} - t\sqrt{\frac{2Fbg}{M}}\right),$$

20. In hac expreſſione itaque M denotat pondus cordae, aequaliter craſſae, longitudinis $= b$, cuius craſſities aequalis eſt ei, quam noſtra corda habet in termino A; at F denotat vim, qua corda eſt tenſa; Φ autem

autem et Ψ ſunt ſigna, quibus functiones quaecunque indicantur. Has igitur ita comparatas eſſe oportet, vt, ſiue ponatur $x = 0$, ſiue $x = a$, valor ipſius y ſemper euaneſcat; vnde fit:

$$\text{I.}\quad \Phi\left(t\sqrt{\tfrac{2Fbg}{M}}\right) + \Psi\left(-t\sqrt{\tfrac{2Fbg}{M}}\right) = 0$$

$$\text{II.}\quad \Phi\left(\tfrac{a}{1+n} + t\sqrt{\tfrac{2Fbg}{M}}\right) + \Psi\left(\tfrac{a}{1+n} - t\sqrt{\tfrac{2Fbg}{M}}\right) = 0$$

Cum deinde, poſito $t = 0$, eſſe debeat $\left(\frac{dy}{dt}\right) = 0$, quidquid ſit x, neceſſe eſt, vt ſit:

$$\text{III.}\quad \Phi'\left(\tfrac{ax}{a+nx}\right) - \Psi'\left(\tfrac{ax}{a+nx}\right) = 0$$

vnde patet, ſigna Φ' et Ψ', ideoque et Φ et Ψ, ſimiles functiones denotare debere.

21. Cum igitur functio Ψ ſimilis eſſe debeat functioni Φ, haec porro eius naturae eſſe debet, vt ſit tam $\Phi u + \Phi(-u) = 0$, quam

$$\Phi\left(\tfrac{a}{1+n} + u\right) + \Phi\left(\tfrac{a}{1+n} - u\right) = 0\,;$$

vnde, cum omnis functio per lineam curuam repraeſentari poſſit, cuius applicatae exhibeant iſtas functiones abſciſſis reſpondentes, manifeſtum eſt, pro noſtro caſu eiusmodi requiri lineam curuam, quae circa initium abſciſſarum habeat ramos alternatim aequales, ita vt, poſita abſciſſa negatiua, applicata quoque prodeat negatiua; tum vero, ſumto in axe interuallo $= \frac{a}{1+n}$, vt circa hoc punctum iterum dentur rami vtrinque alternatim aequales, ita vt, ſi alter ſupra axem extendatur, alter infra axem iaceat. Quoniam igitur huiusmodi puncta, circa quae exiſtunt rami alternatim aequales, centra lineae curuae appellare licet, patet, tam initium

abſciſſarum ipſum, quam aliud punctum in axe, inde interuallo $\frac{a}{1+n}$ remotum, centri natura praedita eſſe oportere. Hinc autem ſequitur, infinita alia quoque dari centra in axe ſita, quae a ſe inuicem interuallo $\frac{a}{1+n}$ ſint remota.

Tab. II. Fig. 2. 22. Haec igitur curua, quam determinatricem motus vocabo, ita erit formata, vti in figura 2 repraeſentatur. Erit ſcilicet anguiformis, infinitos habens plexus βa, ab, $b\alpha$ inter ſe ſimiles et aequales, ita vt circa puncta β, a, b, α rami alternatim ſint aequales, atque horum punctorum interualla ſint $ab = \beta a = b\alpha = \frac{a}{1+n}$. Si iam horum punctorum quodpiam a pro abſciſſarum initio aſſumatur, capiaturque abſciſſa quaecunque $aq = u$, erit applicata $qn = \Phi u$, ſeu exhibebit eiusmodi functionem ipſius u, qualis ad motus determinationem requiritur. Quaecunque ergo curua huius formae fuerit deſcripta, ea ſemper ſpeciem quandam motus vibratorii, quem corda ſuſcipere poteſt, definiet, et cum innumerabiles curuae huius formae diuerſae deſcribi queant, innumerabiles quoque motus vibratorii ſpecies inde determinabuntur, quae ratione curuaturae, quam corda ſingulis momentis induet, erunt quidem inter ſe diuerſae; verum ſi ipſe motus vibratorius eiusque periodi ſpectentur, omnes admirabili modo inter ſe conſentient, niſi forte certis caſibus eadem corda eodem tempore, vel duplo, vel triplo, vel quadruplo etc. plures vibrationes ſit editura.

23. Ad certam autem motus ſpeciem conſtituendam non opus eſt, vt iſta curua determinatrix ſecundum

dum legem continuitatis ſit deſcripta, vt eius natura aequatione analytica comprehendi queat; ſed ad hunc vſum aeque erit accommodata, etiamſi vtcunque veluti libero manus tractu fuerit delineata, neque eius partes per legem continuitatis inter ſe connectantur, dummodo figuram habeat praeſcriptam. Ita pro lubitu ſi ſuper axe intra puncta a et b curua quaecunque, ſiue continua, ſiue non continua, fuerit deſcripta, eiusdem curvae deſcriptio vtrinque ad eundem axem infinitum repetatur, ita vt alternis vicibus ſupra et infra axem delineetur, et in ſingulis punctis a, b, α, β pares curuae anb termini inuicem iungantur. Hoc igitur modo ſemper curua ad motum quendam cordae determinandum apta obtinebitur, vbi notandum eſt, etiamſi pro curua anb linea algebraica, veluti arcus circuli, fuerit aſſumta, quae naturalem habeat continuationem, hac tamen penitus reiecta continuationem modo deſcripto inſtitui oportere.

24. Interim tamen quoque huiusmodi curuae determinatrices continuae exhiberi poſſunt, quae ſecundum totam extenſionem vna aequatione comprehendantur. Tales autem curuae, vti per ſe eſt manifeſtum, inter algebraicas non reperiuntur, ſed ex ordine tranſcendentium ſunt petendae, ex quo quidem linea ſinuum, ſeu trochois elongata, inprimis eſt notanda, quae pro noſtro inſtituto, ſi ponamus $aq = u$ et $qn = v$, hanc praebet aequationem $v = \alpha \sin. \frac{\pi(1+n)u}{a}$, quin etiam aequatio magis generalis ſequens aeque eſt idonea:

$$v = \alpha \sin. \frac{\pi(1+n)u}{a} + \beta \sin. \frac{2\pi(1+n)u}{a} + \gamma \sin. \frac{3\pi(1+n)u}{a} + \text{etc.}$$

 ſed

ſed hae curuae etiamſi continuae prae non continuis in hoc negotio nullam habent praerogatiuam, atque in hoc vis noſtrae ſolutionis generalis potiſſimum conſiſtit: quod eo magis eſt notatu dignum, quod hoc modo calculum adeo ad curuas non-continuas et per calculum non explicabiles accommodauerim, quod neſcio an vllo alio caſu adhuc ſit praeſtitum.

25. Deſcripta autem huiusmodi curua quacunque, accuratius inueſtigemus, quomodo ex ea motus cordae
Tab. II. Fig. 1. et 2. definiri queat. Totum autem negotium huc redit, vt pro corda AMB ad datum tempus t, cuius expreſſio ad minutum ſecundum tanquam vnitatem refertur, applicata $PM = y$, datae abſciſſae $AP = x$ conueniens, determinetur. Hunc in finem in curua determinatrice capiantur binae abſciſſae

$$ap = \frac{ax}{a+nx} + t\sqrt{\frac{2Fbg}{M}}, \text{ et } aq = \frac{ax}{a+nx} - t\sqrt{\frac{2Fbg}{M}}$$

notatisque applicatis pm et qn, erit

$$y = m(a+nx).pm + m(a+nx).qn$$

vbi coefficiens m tam paruus accipi debet, vt applicata PM fiat quam minima. Hinc enim orietur, vt ante inuenimus,

$$y = m(a+nx)\Phi\left(\frac{ax}{a+nx} + t\sqrt{\frac{2Fbg}{M}}\right) + m(a+nx)\Phi\left(\frac{ax}{a+nx} - t\sqrt{\frac{2Fbg}{M}}\right).$$

Cum igitur hinc ad quoduis tempus ſtatus et figura cordae determinetur, eius quoque motus innoteſcet, ſi, poſita x conſtante, tantum tempus t variabile ſtatuatur.

26. Si ponamus tempus $t = 0$, inueniemus cordae figuram initialem, ex qua motus hoc modo determinatus oriatur. Habebimus ergo pro hac figura initiali iſtam aequationem:

$$y = 2m(a+nx)\Phi\frac{ax}{a+nx},$$

vbi

vbi manifeſtum eſt, curuam determinatricem ita aſſumi poſſe, vt data curua initialis obtineatur. Si enim y denotet applicatam curuae initialis cordae tributae, quae abſciſſae x reſpondeat, in curua determinatrice abſciſſae $ao = \frac{ax}{a+nx}$ reſpondebit applicata $ol = \Phi \frac{ax}{a+nx} = \frac{y}{2m(a+nx)}$. Quo hinc conſtructio curuae determinatricis ſimplicior euadat, ponamus $2m = \frac{1}{a}$, vt pro curua initiali cordae habeamus $y = (1 + \frac{nx}{a}) \Phi \frac{ax}{a+nx}$, ac tum pro curua determinatrice, ſumta abſciſſa $ao = \frac{ax}{a+nx}$, applicata reſpondens eſſe debet $ol = \frac{ay}{a+nx}$; vnde, data cordae figura initiali, curua determinatrix facile conſtruetur, ex qua deinceps totus cordae motus expedite definietur.

27. Quoniam igitur hunc caſum cordae inaequaliter craſſae aeque generaliter reſoluere licet, atque caſum cordarum vniformiter craſſarum; hicque adeo caſus in illo tanquam ſpecies contineatur, ex quo quippe oritur, ſi numerus n, qui inaequalitatem craſſitiei continet, euaneſcat: operae certe pretium erit, vt iſtum caſum omni diligentia articulatim exponamus. Primum igitur cordas iſtas inaequaliter craſſas, ad quas hic caſus eſt accommodatus, dilucide deſcribam, vt intelligatur, quomodo cordae inaequaliter craſſae exhiberi queant, quarum motus aeque generaliter definiri poſſit, atque cordarum vniformiter craſſarum. Deinde vero poſtquam huiusmodi corda ad figuram quamcunque fuerit diducta, indeque ſubito dimittatur, motum, quem ſit proſecutura, determinabo. Atque hic quidem ex iam expoſitis perſpicitur, motum fore ſemper ſatis regularem, omninoque ſimilem ei, quo cordae vniformiter craſſae

craſſae agitantur, niſi quod tempora vibrationum aliam rationem longitudinis cordarum ſequantur.

Deſcriptio cordarum, ad hunc caſum aptarum.

28. Ad huiusmodi igitur motum regularem edendum nonniſi certa ſpecies cordarum inaequaliter craſſarum eſt idonea, quam idcirco primum accurate deſcribi conveniet. Cordam ergo primum in directum extenſam
Fig. 3. APBO contemplemur, cuius in initio A craſſitiei diameter ſit $Aa = b$, tum vero in alio loco quocunque P, poſito interuallo $AP = x$, diameter craſſitiei ſupra ita eſt determinata, vt ſit $Pp = z = \frac{b}{(1 + \frac{nx}{a})^2}$. Ne autem craſſities a longitudine cordae vibrantis a, quippe quae pro eadem corda vtcunque variari poteſt, pendere videatur, ponamus $\frac{n}{a} = \frac{1}{c}$ ſeu $n = \frac{a}{c}$, vt ſit $Pp = z = \frac{bcc}{(c+x)^2}$ vbi c eſt quantitas conſtans, non a longitudine cordae vibrantis pendens. Sin autem alter terminus conſtituatur in B, vt ſit $AB = a$, altero termino conſtanter in puncto A ſumto, erit diameter craſſitiei ibi $Bb = \frac{bcc}{(c+a)^2}$.

29. Linea ergo curua $apbo$, craſſitiem cordae referens, erit hyperbola ſecundi ordinis, quae autem, ſi variatio craſſitiei fuerit valde parua, a linea recta vix diſcrepabit. Euenit hoc, quando quantitas conſtans c prae longitudine cordae fuerit vehementer magna; tum enim erit proxime $z = b(1 - \frac{2x}{c})$; ſicque huc referri poterunt cordae, quarum craſſities vniformiter decreſcit dummodo

modo decrementum totum fuerit minimum. Sin autem id ſit notabile, curuatura lineae *apbo* negligi non poteſt. Ponamus enim in B diametrum craſſitiei $Bb = d$, erit $1 + \frac{a}{c} = \sqrt{\frac{b}{d}}$, et $\frac{1}{c} = \frac{\sqrt{b} - \sqrt{d}}{a\sqrt{d}}$, vnde pro loco quocunque P fiet $Pp = z = \frac{aabd}{(a\sqrt{d} + x\sqrt{b} - x\sqrt{d})^2}$; ſeu $Pp = \frac{AB^2 . Aa . Bb}{(AP . \sqrt{Aa} + BP . \sqrt{Bb})^2}$. Hinc ergo ex data craſſitie cordae, in vtroque termino A et B, cognoſcitur craſſities in quouis loco medio P, vt corda ad praeſentem vibrationum caſum fiat accommodata. In hoc enim conſiſtit indoles eius cordarum inaequaliter craſſarum ſpeciei, cuius motus ex ſuperioribus formulis in genere definiri poteſt.

30. Materia vero, ex qua corda fuerit confecta, eius pondus conſtituit, quam in calculo ita aſſumſi, vt cordae, ex eadem materia confectae, vniformiter craſſae, cuius craſſitiei diameter vtique foret $= Aa = b$, et longitudo $= b$, pondus eſſet futurum $= M$. Facta hac hypotheſi, videamus, quantum futurum ſit pondus portionis cuiuscunque noſtrae cordae AP. Cum igitur, poſita longitudinae $AP = x$, ſit $Pp = z = \frac{bcc}{(c+x)^2}$, erit pondus partis $AP = \frac{M}{bbb}\int zz\,dx = \frac{Mc^4}{b}\int\frac{dx}{(c+x)^4} = \frac{Mc^4}{b}\left(\frac{1}{3c^3} - \frac{1}{3(c+x)^3}\right)$, ita vt hoc pondus ſit $= \frac{Mcx(3cc + 3cx + xx)}{3b(c+x)^3}$. Quodſi ergo c prae x fuerit quantitas maxima, erit hoc pondus proxime $= \frac{Mx}{b}(1 - \frac{2x}{c})$. Hactenus quidem aſſumſi, cordam ex materia vniformi eſſe ductam, ſin autem materia non fuerit homogenea, lex craſſitiei praeſcripta ita debet immutari, vt, quo leuior fuerit materia, ibi craſſities ipſa, ſeu quadratum eius diametri, in eadem ratione vltra legem datam augeatur.

Problema.

Tab. II. Fig. 4. 31. *Si iam talis corda, qualem ratione craſſitiei deſcripſimus, primum in termino* A, *deinde in alio quocunque loco* B *figatur, et a vi quacunque, quae ponderi* F *aequipolleat, tendatur: tum vero de ſuo ſitu naturali recto* AB *ad figuram quamcunque* ALB *quam minime a recta* AB *recedentem detorqueatur, ſubitoque in omnibus punctis remittatur; quaeritur motus, quo haec corda deinceps agitabitur.*

Datur ergo primo longitudo cordae $AB = a$, deinde eius craſſities in A, cuius diameter ſit $= b$, tertio pro quouis loco intermedio P, exiſtente $AP = x$, craſſitiei diameter $z = \frac{bcc}{(c+x)^2}$, ſeu datur longitudo c. Quarto conſtat, ſi corda haberetur vniformiter craſſa longitudinis $= b$, cuius diameter craſſitiei vbique eſſet $= b$, eius pondus fore $=$ M. Quinto denique datur linea ALB, ideoque pro quauis abſciſſa $AP = x$ applicata reſpondens PL: neque vero opus eſt, vt haec linea ALB per aequationem detur, ſed ſufficit, vt ſit deſcripta, quocunque demum modo hoc fuerit factum.

Solutio.

32. Iam ante omnia ex data cordae figura initiali ALB conſtrui debet linea curua determinatrix motus vibratorii, cuius conſtructio, per praecepta ſupra (26) tradita, ita eſt inſtituenda: Ob $n = \frac{a}{c}$, ſuper axe
Fig. 5. et 4. $ab = \frac{ac}{a+c}$, pro abſciſſa $AP = x$, capiatur abſciſſa $ap = \frac{cx}{c+x}$, et in p erigatur applicata $pl = \frac{c.PL}{c+x}$; ſeu adiun-

adiuncta cordae AB recta $AC=c$, conſtruantur hae proportiones:

$$CP:CA=AP:ap$$

$$\text{et } CP:CA=PL:pl.$$

Cum iam hoc modo fuerit deſcripta curua alb, eadem vtrinque ad axem ab productum repetatur, alternatim ſupra et infra axem deſcribenda, vti figura oſtendit, ita vt in ſingulis iuncturis a, b, α, β cognomines curuae alb termini inuicem iungantur. Atque hoc pacto habebitur curua determinatrix, ex qua motus cordae quaeſitus definiri poterit.

33. Conſtructa autem curua determinatrice, ex ea motus cordae ita definitur, vt ad quoduis tempus a momento dimiſſionis elapſum cordae figura aſſignetur. Sit enim tempus hoc $=t$ min. ſec. et pro puncto M inueniendo, in quo iam punctum L verſabitur, abſciſſae $AP=x$ in curua determinatrice capiatur abſciſſa reſpondens $ap=\frac{cx}{c+x}$, et circa punctum p vtrinque capiantur ſpatia aequalia pq et pr tempori proportionalia, ita vt ſit

$$pq=pr=t\sqrt{\frac{2Fbg}{M}},$$

et cum in punctis q et r applicatae curuae determinatricis ſint:

$$qm=\Phi\left(\frac{cx}{c+x}-t\sqrt{\frac{2Fbg}{M}}\right)$$

$$rn=\Phi\left(\frac{cx}{c+x}+t\sqrt{\frac{2Fbg}{M}}\right)$$

ob $m=\frac{1}{2a}$ et $n=\frac{a}{c}$ in §. 25, habebitur

$$PM=\tfrac{1}{2}\left(1+\frac{x}{c}\right)(qm+rn).$$

 Hoc-

Hocque modo ſitus, quem tota corda poſt tempus t habebit, definietur.

34. Ponamus iam tantum elapſum eſſe tempus t, vt ſit

$$t\sqrt{\frac{2Fbg}{M}} = \frac{ac}{c+a}, \quad \text{ſeu } t = \frac{ac}{c+a}\sqrt{\frac{M}{2Fbg}}$$

atque interualla pq' et pr' vtrinque a puncto p capienda erunt aequalia internallo ab, ſicque in curuis ſimilibus adiacentibus $\beta m'a$, $bn'\alpha$ abſciſſae $\beta q'$ et br' aequales erunt abſciſſae ap; vnde ob applicatas $q'm'$ et $r'n'$ aequales, locus puncti cordae L nunc cadet infra axem AB ad diſtantiam $= \frac{1}{2}(1+\frac{x}{c})(q'm'+r'n') = (1+\frac{x}{c})q'm'$. Si vlterius tempus infinite paruum dt fluat, applicatae $q'm'$ et $r'n'$ infinite parum vlterius a puncto p remoueri debent; cum igitur, quantum illa diminuitur, haec tantundem augeatur, ob tangentes in punctis m' et n' ad axem aequaliter inclinatas, diſtantia puncti L cordae per hoc momentum ab axe non mutatur, ſicque tota corda ad ſtatum quietis erit redacta, ita vt iam in maxima excurſione infra axem reperiatur. Interea temporis igitur corda vnam vibrationem confeciſſe eſt cenſenda: eritque idcirco tempus vnius vibrationis cordae $t = \frac{ac}{c+a}\sqrt{\frac{M}{2Fbg}}$ min. ſec. vbi g denotat altitudinem fere 15 pedum, per quam graue vno minuto ſecundo libere deſcendit.

35. Sin autem tempus ab initio elapſum t tantum ſtatuamus, vt fiat $t\sqrt{\frac{2Fbg}{M}} = \frac{2ac}{c+a}$ ſeu $t = \frac{2ac}{c+a}\sqrt{\frac{M}{2Fbg}}$, ex conſtructione manifeſto liquet cordae punctum L ite-

rum in locum primitiuum L peruenire, ibique quiete frui momentanea; vnde corda interea duas vibrationes abſoluiſſe eſt exiſtimanda: deinceps vero motus cordae iterum vti ab initio ſequetur, ex quo ſufficiet, motum cordae ad hoc vsque momentum determinauiſſe. Hinc igitur perſpicuum eſt, tempus vniuscuiusque vibrationis eſſe $= \frac{ac}{c+a} \sqrt{\frac{M}{2Fbg}}$; quod ergo non amplius, vti in cordis vniformiter craſſis vſu venit, longitudini cordae a eſt proportionale, manente ſcilicet eadem tenſione; ſed iam rationem ſequitur formulae $\frac{ac}{c+a}$. Vnde ſi tempus vibrationis duplo longius fieri debeat, cordae longitudo a puncto A tanta ſumi debebit, vt ſit $= \frac{2ac}{c-a}$; ac ſi tempus vibrationis n vicibus maius eſſe debeat, cordae longitudinem eſſe oportet $= \frac{nac}{c-(n-1)a}$. Patet ergo, ſonum huiusmodi cordarum non vltra datum gradum deprimi poſſe, nam ſi longitudo cordae etiam infinita ſtatuatur, tempus vnius vibrationis etiam nunc erit finitum $= c\sqrt{\frac{M}{2Fbg}}$.

36. Semper autem minuenda cordae AB longitudine effici poteſt, vt tempus vibrationis ad medietatem reducatur, ſonusque vno interuallo diapaſon eleuetur: eueniet hoc, ſi corda praeter A etiam in E figatur, vt ſit $AE = \frac{ac}{2c+a}$. Sin autem tempus vibrationis ad trientem reduci debeat, longitudo cordae erit $= \frac{ac}{3c+2a}$, ſin ad quadrantem, erit $= \frac{ac}{4c+3a}$, et ita porro. Si igitur cordae ab initio talis figura fuerit impreſſa, vt punctum E in ſitu naturali relinquatur, indeque curua determinatrix obtineat interualla plexuum

ab, *bα*, *aβ*, vel duplo, vel triplo, vel quadruplo, minora, tum tota corda toties rapidius contremiſcet. Eo enim tempore, quod generatim vni vibrationi aſſignavimus, iam duas, vel tres, vel quatuor abſoluet vibrationes. Quin etiam euenire poteſt, vt corda ſimul duos pluresue huiusmodi motus recipiat, totidemque ſonos diuerſos edat. Omnino igitur huius generis cordarum motus ſimili modo erit comparatus, quo cordarum vniformiter craſſarum, hoc ſolo excepto, quod pro varia longitudine tempus vibrationis, non longitudinis, rationem ſequatur: hancque ob cauſam iſtud genus cordarum maxime dignum eſt viſum, cuius motus diligentius euolueretur.

37. Veriſimile eſt, praeter cordas vniformiter craſſas, et eas, quas hactenus ſum contemplatus, alias prorſus non dari, quae talis motus regularis ſint capaces, ſimulque ſonos harmonicos edere valeant. Tum etiam, ſi variatio craſſitiei aliam legem ſequatur, nulla patet via ad motum in genere definiendum, ita vt figurae cuicunque, quae cordae initio fuerit tributa, reſpondeat; interim tamen caſus exhiberi poſſunt, quibus, ſi figura initialis certis conditionibus ſit praedita, motum ſecuturum aſſignare liceat. Haec autem inueſtigatio non ſolum tantopere eſt reſtricta, vt nullum vnquam vſum habere videatur, ſed etiam diſquiſitiones ampliſſimas exigit, quae caſus aequationis *Riccatianae* conſtruibiles implicant. Longe autem difficillima videbitur quaeſtio, ſi cordae craſſities nullam legem calculo ſubiectam ſequatur: veluti ſi duae cordae vniformes

qui-

quidem, ſed diuerſae craſſitiei, iungantur. Nihilo vero minus hunc caſum generatim expediri poſſe obſeruaui, qui, cum non parum doctrinam vibrationum illuſtrare videatur, eum data opera pertractabo; quia enim duplici modo a lege continuitatis abhorret, ſcilicet ratione craſſitiei et figurae initio impreſſae, methodus talem quaeſtionem ad calculum reuocandi, imprimis ad fines Analyſeos promouendos, videtur accommodata.

Problema.

38 *Si corda* ACB, *ex duabus partibus* AC *et* BC *conflata, quarum vtraque ſeorſim ſit vniformiter craſſa, ſed craſſitiem habeant diuerſam; haecque corda, in terminis* A *et* B *fixa, a vi quacunque ſit tenſa; tum vero ad figuram quamcunque* ADB *detorqueatur, quam minime a figura naturali rectilinea* ALB *recedentem: quaeritur motus, quo corda, poſtquam repente fuerit dimiſſa, agitabitur.* Tab. II. Fig. 6.

Ponamus partis AC longitudinem $AC = a$, alterius partis longitudinem $BC = b$; diametrum craſſitiei illus partis $AC = \alpha$, huius vero $= \beta$: tum vero ſit cordae AC pondus $= N$, eritque cordae BC pondus $= \frac{Nb\beta\beta}{a\alpha\alpha} = N$. Vis autem, qua tota corda intra ſuos terminos tenſa tenetur, aequiualeat ponderi F. Initio porro huic cordae inducta fuerit curua quaecunque ADB, quae ſiue ſit aequatione quapiam exprimibilis, ſiue ſecus, poſt dimiſſionem motum determinari oportet. Sufficit ergo, ex figura noſſe, quanta applicata PL initio motus cuilibet abſciſſae $AP = x$ reſpondeat,

neque

neque hic adhuc refert, ſiue punctum P ad partem craſſiorem AC pertineat, ſiue ad tenuiorem BC, veluti ſi in Π capiatur.

Solutio.

39. Ponamus ergo, elapſo tempore $= t$ minut. ſecund. cordam iam perueniſſe in ſitum AMEMB, et applicatam abſciſſae $AP = x$ reſpondentem iam eſſe $PM = y$, quae ergo erit, certa quaedam functio temporis t et abſciſſae x. Hic vero imprimis eſt attendendum, vtrum punctum P in parte AC aſſumatur, an in parte BC, hoc eſt: vtrum ſit $x < a$, an vero $x > a$. Ponamus primo, eſſe $x < a$, atque motus puncti M continebitur in hac aequatione: $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \frac{2Fag}{M}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$, ſin autem ſit $x > a$, ſeu ſi abſciſſa capiatur AΠ, motus puncti M hac aequatione continebitur: $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \frac{2Fbg}{N}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$. Quamobrem determinatio motus ad reſolutionem harum duarum aequationum ita reducitur, vt prior tantum locum habeat, ſi ſit $x < a$, poſterior vero, ſi ſit $x > a$, vnde manifeſtum eſt, ſi ſit $x = a$, ambas aequationes conſentire debere.

40. Ponamus breuitatis gratia, $\frac{2Fag}{M} = mm$ et $\frac{2Fbg}{N} = nn$ et quamdiu eſt $x < a$, vt ſatisfaciendum ſit aequationi $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = mm\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$, nouimus in genere, fore

$$y = \Phi(x + mt) + \Psi(x - mt).$$

Sin autem ſit $x > a$, vt ſatisfaciendum ſit aequationi $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = nn\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$, erit per alias quaſcunque functiones

$$y = \phi(x + nt) + \psi(x - nt).$$

Vel

Vel cum hic abſciſſas a termino B computare liceat, etiam ſi ibi a termino A ſint captae, hae duae aequationes diſtinctius ita exhibebuntur:

$$PM = \Phi(AP + mt) + \Psi(AP - mt)$$

$$\Pi M = \phi(B\Pi + nt) + \psi(B\Pi - nt)$$

vnde ob nexum harum partium in E neceſſe eſt, vt ſit:

$$CE = \Phi(a + mt) + \Psi(a - mt) = \phi(b + nt) + \psi(b - nt)$$

quo iam quaedam relatio inter has functiones definitur.

41. Cum iam tota quaeſtio ad naturam harum quaternarum functionum inueſtigandam ſit traducta, primum perpendendum eſt, applicatas tum in A, quam in B, ſemper euaneſcere debere, vnde eſſe oportet:

$$0 = \Phi(mt) + \Psi(-mt) \text{ et } 0 = \phi(nt) + \psi(-nt).$$

Deinde etiam expendendum eſt, motus initio ſingulorum punctorum celeritatem per $(\frac{dy}{dt})$ expreſſam euaneſcere debere; hinc vero vtraque aequatione colligitur:

$$0 = \Phi'(AP) - \Psi'(AP) \text{ et } 0 = \phi'(B\Pi) - \psi'(B\Pi),$$

vnde concludimus tam $\Psi' = \Phi'$ et $\psi' = \phi'$, quam $\Psi = \Phi$ et $\psi = \phi$; et vtraque functio Φ et ϕ debet eſſe impar, ſeu eiusmodi curuam refert, cuius abſciſſae, ſi negatiuae ſumantur, applicatae quoque in negatiuas abeant, quantitate autem maneant eaedem.

42. Hac igitur functionum ϕ et Φ indole inventa habebimus binas ſequentes aequationes:

$$PM = \Phi(AP + mt) + \Phi(AP - mt)$$

$$\Pi M = \phi(B\Pi + nt) + \phi(B\Pi - nt)$$

 prae-

praetereaque eſſe oportet:

$$\Phi(a+mt)+\Phi(a-mt)=\phi(b+nt)+\phi(b-nt).$$

Hinc ergo primum, poſito $t=0$, eſſe debet $\Phi a=\phi b$. Deinde etiam perpendere debemus, ſi eſſet $m=n$, qui caſus locum haberet, ſi tota corda eſſet aequaliter vbique craſſa, abſciſſam $a+mt$, a puncto A ſumtam, in idem axis punctum eſſe caſuram, atque abſciſſam $b-nt$ a termino B computatam, ideoque fore $\Phi(a+mt) = \phi(b-nt)$, ſimilique modo $\Phi(a-mt)=\phi(b+nt)$. At ſi m et n non ſint aequales, alio modo functiones $\Phi(a+mt)$ et $\phi(b+nt)$, quae adhuc ſunt incognitae, ex functionibus cognitis $\Phi(a-mt)$ et $\phi(b-nt)$ definientur, atque ab hac determinatione ſolutio problematis potiſſimum pendebit. Sunt autem functiones $\Phi(a-mt)$ et $\phi(b-nt)$ ob curuam cordae initialem datam cognitae, cum ſit $PL=2\Phi.AP$ et $\Pi\Lambda=2\phi.B\Pi$, qui valores dantur, quoties fuerit $AP<a$ et $B\Pi<b$.

43. Verum ad plenam determinationem non ſufficit, vt applicata CE communis ſit vtrique cordae parti, motus indoles inſuper poſtulat, vt ambae curvae in iunctura E communem habeant tangentem. Hinc autem naſcitur iſta aequatio differentialis:

$$\Phi'(a+mt)+\phi'(a-mt)=-\phi'(b+nt)-\phi'(b-nt)$$

quae aequipollet huic integrali:

$$n\Phi(a+mt)-n\Phi(a-mt)=-m\phi(b+nt)+m\phi(b-nt).$$

Cum hac coniungatur ante inuenta:

$$\Phi(a+mt)+\Phi(a-mt)=\phi(b+nt)+\phi(b-nt)$$

hinc-

hincque ſunctiones incognitae ita determinabuntur, vt ſit:

$$\Phi(a+mt)=\frac{2m}{m+n}\phi(b-nt)-\frac{m-n}{m+n}\Phi(a-mt)$$
$$\phi(b+nt)=\frac{2n}{m+n}\Phi(a-mt)+\frac{m-n}{m+n}\phi(b-nt)$$

ſicque ex ſunctionibus $\Phi(a-mt)$ et $\phi(b-nt)$, quarum valor ex curua cordae initiali datur, ſunctiones incognitae $\Phi(a+mt)$ et $\phi(b+nt)$ inueniuntur, quae autem, quomodo ad vſum ſint accommodandae, iam accuratius perpendamus.

44. Reducamus ſunctiones principales ad dimidium, vt ſit:

$$PM=\tfrac{1}{2}\Phi(AP+mt)+\tfrac{1}{2}\Phi(AP-mt)$$
$$\Pi M=\tfrac{1}{2}\phi(B\Pi+nt)+\tfrac{1}{2}\phi(B\Pi-nt)$$

ſicque ex curua cordae primitus impreſſa erit:

$$\Phi(AP)=PL \text{ et } \phi(B\Pi)=\Pi\Lambda$$

vnde, dum ſint abſciſſae $AP<a$ et $B\Pi<b$, earum ſunctiones, per ſigna Φ et ϕ indicatae, ex figura cordae initiali cognoſcuntur. Tum vero etiam nouimus, ſi abſciſſae negatiuae capiantur, fore

$$\Phi(-z)=-\Phi(+z) \text{ et } \phi(-z)=-\phi(+z).$$

Functiones autem, maioribus abſciſſis conuenientes, ex minoribus, et generis quidem vtriusque, ita definiuntur, vt ſit:

$$\Phi(a+mu)=\frac{2m}{m+n}\phi(b-nu)-\frac{m-n}{m+n}\Phi(a-mu)$$
$$\phi(b+nu)=\frac{2n}{m+n}\Phi(a-mu)+\frac{m-n}{m+n}\phi(b-nu),$$

quarum formularum ope, ex vtra curua ALD et BΛD, duae curuae in infinitum extenſae conſtrui poterunt,

quarum alterius applicatae pro ſingulis abſciſſis debitas functiones ϕ, alterius vero functiones Φ exhibeant.

Fig. 7. et 8. 45. Conſtructio autem harum duarum curuarum ita commodiſſime abſoluetur: Ductis duobus axibus XY et xy, ſuper illo deſcribatur figura initialis partis ſiniſtrae cordae ALD, ſuper hoc vero figura initialis partis dextrae BAD, ſimulque tam illa vltra A infra axem in Ad, haec vero vltra B in Bd transferatur, ſicque ex figura cordae initiali illius curuae ramus DAd, huius vero ramus DBd iam deſcriptus habetur. Pro vtriusque autem continuatione, circa punctum C in vtroque axe abſcindantur vtrinque interualla aequalia $CG = CQ$ et $Cg = Cq$, ita vt illa ſint ad haec ſemper vt m et n, ſeu ſumta quantitate quacunque u, capiatur $CG = CQ = mu$, et $Cg = Cq = nu$, atque applicatae in punctis G et g erunt cognitae: in punctis vero Q et q applicatae ſtatuantur

$$QR = \frac{2m.gb + (n - m).GH}{m + n}$$

$$\text{et } qr = \frac{2n.GH - (n - m).gb}{m + n}.$$

Hoc ergo modo vtraque curua ALD et BAD, quousque libuerit, continuari poterit, prouti vero vtraque in vnam plagam continuatur, ita ſtatim ad plagam oppoſitam ſitu inuerſo transferatur.

Fig. 6. 7. 8. 46. His duabus curuis, praeſcripto modo conſtructis, prior inſeruiet motui partis cordae ALD determinando, poſterior vero partis BAD. Scilicet pro puncto quocunque L, ad partem AD pertinente; ſi quaeratur punctum M, vbi poſt tempus t min. ſec. ſit futurum, vtendum erit curua determinatrice $ALDRIV$ (fig. 7.)

(fig. 7.), in cuius axe capiatur abſciſſa AP, puncto L reſpondens, et circa P vtrinque abſcindantur interualla aequalia $PF = PG = mt$, tum applicatarum FK et GH ſemiſumma dabit loci quaeſiti *M* diſtantiam P*M* ab axe. Simili modo, ſi quaeſtio ſit de puncto Λ, in altera parte cordae BC ſumto, vbi ſit futurum poſt tempus t min. ſec. in fig. 8. a puncto B capiatur abſciſſa BΠ, puncto Λ conueniens, et circa Π vtrinque abſcindantur aequalia interualla $\Pi g = \Pi f = nt$; quo facto applicatarum gh et fk ſemiſumma dabit loci quaeſiti *M* diſtantiam ab axe AB fig. 6. Hoc igitur modo totius cordae propoſitae ADB ſitus ad quoduis tempus determinari, eiusque propterea motus aſſignari poterit. Facile autem perſpicitur, hunc motum maxime fore irregularem, dum neque ſingula eius puncta ſimul ad maximas ab axe elongationes peruenient, neque itus reditusque ſuos temporibus aequalibus abſoluant, ex quo ne quaeſtio quidem de numero vibrationum, dato tempore factarum, neque etiam de ſono, quem huiusmodi corda ſit editura, locum habere poterit.

47. Neque etiam vllus caſus huiusmodi cordarum ex duabus cordis diuerſae craſſitiei compoſitarum exhiberi poteſt, quo vibrationes fiant regulares. Caſus quidem talis oriri videtur, quando fit $m = n$, tum enim ambae curuae determinatrices inter ſe fiunt aequales, interuallaque nodorum AI, AO, toti cordae longitudini aequalia, prorſus vti pro cordis vniformiter craſſis vſu venit. Verum, ob $mm = \frac{2Fag}{M}$, et $nn = \frac{2Fbg}{N}$, pro hoc caſu habebimus $\frac{a}{M} = \frac{b}{N}$, ſeu $\frac{a}{b} = \frac{M}{N}$, at eſt $\frac{M}{N} = \frac{a\alpha\alpha}{b\beta\beta}$;

 vnde

vnde neceſſario fit $\alpha = \beta$, qui eſt caſus cordae per totam ſuam longitudinem eiusdem craſſitiei. Quam ob rem ſolutio huius problematis eo magis eſt notatu digna, quod non ſolum in inueſtigatione a lege continuitatis maxime abhorrente verſatur, ſed etiam vibrationes a lege iſochronismi, cuiusmodi adhuc a Geometris ſolae tractari ſunt ſolitae, nobis cognoſcendas offerat.

48. Caeterum cum conſtructio ac determinatio huiusmodi motus per binas curuas determinatrices perficiatur, quarum deſcriptio et irregularitas potiſſimum a ratione inaequalitatis inter quantitates m et n pendet, notari conueniet, eſſe in genere $mm : nn = \frac{a}{M} : \frac{b}{N} = \beta\beta : \alpha\alpha$, ideoque $m : n = \beta : \alpha$. Tenent ergo quantitates m et n, quatenus ad vtramque partem cordae AC et BC referuntur, rationem reciprocam diametrorum craſſitiei vtriusque partis. Caeterum etiam circa hanc ſolutionem imprimis notetur, quod motum huiusmodi cordarum compoſitarum, vtcunque fuerit irregularis, ſemper definire liceat, quaecunque etiam figura curuae primitus fuerit inducta, ſiue aequatione quapiam includi queat, ſiue ſecus; quae circumſtantia adeo pro cordis vniformiter craſſis nonnullis ſummis Geometris vires Analyſeos tranſcendere eſt viſa. Pari autem methodo vis ſoluendi extendi poterit ad cordas, quae ex tribus pluribusue partibus diuerſae craſſitiei fuerint compoſitae; manifeſtum enim eſt, totidem ſemper curuis determinatricibus opus eſſe, quarum conſtructio ex figura initiali cordae ſimili fere modo abſolui queat.

49.

49. Datur tamen caſus, quo ambae cordae partes $AC = a$ et $BC = b$ certam quandam inter ſe tenent rationem, ſi figura initialis certo modo fuerit comparata, vt motus vibratorius fiat regularis. Obtinetur autem hic caſus, ſi primo ſit $a : b = m : n$, ſeu $a : b = \beta : \alpha$; quo etiam fit $M : N = b : a$; deinde ſi figura initialis ſit huiusmodi, vt ſit $\phi(b-nu) = \Phi(a-mu)$, tum enim obtinebitur

$$\Phi(a+mu) = \Phi(a-mu) \text{ et } \phi(b+nu) = \phi(b-nu).$$

Manifeſtum enim eſt, aequationem $\phi(b-nu) = \Phi(a-mu)$ locum habere non poſſe, niſi ſit $b : a = n : m$, propterea quod eſt, tam $\phi 0 = 0$, quam $\Phi 0 = 0$, ſimul autem quantitates $b - nu$ et $a - mu$ in nihilum abire nequeunt, niſi ſit $a : b = m : n$. Hoc autem caſu vtraque curua determinatrix per ſe determinari poterit, fietque ſimilis illi, quae motui cordae vniformis definiendo inſeruit, ex quo etiam hic motus aeque regularis euadit. Hunc igitur caſum diligentius euoluamus.

Caſus motus regularis in cordis, ex duabus partibus inaequalis craſſitiei compoſitis.

50. Sit igitur ACB corda ex duabus partibus AC Tab. III. Fig. 1.
et BC compoſita, quarum partes $AC = a$ et $BC = b$ rationem teneant reciprocam diametrorum craſſitiei α et β, vt ſit $a : b = \beta : \alpha$, ideoque etiam $m : n = a : b$ et $M : N = b : a$. Haec corda ſit in terminis A et B fixa et tenſa vi, quae aequalis eſt ponderi F. Tum vero in eiusmodi figuram ADB detorquatur, vt figura

BAD

BAD affinis ſit figurae ALD, ſcilicet vt ſumtis vtrinque abſciſſis AP et BΠ, ipſis AC et BC proportionalibus, applicatae PL et ΠΛ inter ſe fiant aequales. Iam corda dimiſſa quaeritur eius motus, ſeu ſtatus ad quoduis tempus t minut. ſec. a momento di-
Fig. 2. 3. miſſionis elapſum Hunc in finem conſtruantur ambae curuae determinatrices AD$ada'd'$ (fig. 10) et BDbdb', (fig. 11) quarum portiones primitiuae ALD et BΛD ex figura cordae initiali deſumuntur, ſequens autem vtriusque portio ita conſtruitur, vt ſit pro fig. 10. $\Phi(a+mu)=\Phi(a-mu)$ et pro fig. 11. $\Phi(b+nu) = \Phi(b-nu)$.

51. In axe ſcilicet abſcindantur interualla Ca, ac, ca', $a'c'$ etc. aequalia ipſi interuallo AC, iisque applicentur, vti figura indicat, figurae aD, ad $a'd$ $a'd'$ ſimiles et aequales figurae ALD. Simili modo pro fig. 11. curuae BΛD ſimiles et aequales ſtatuantur figurae bD, bd, $b'd$, etc. tum vero etiam ad alteram partem punctorum A et B hae figurae ſimili ordine
Fig. 1. repetantur; hocque modo obtinebuntur ambae curuae determinatrices, ex quibus motus cordae promte definietur. Scilicet ſi diſtantia ab axe AB, ad quam punctum L poſt tempus t reperietur, ponatur $=y$, vocata abſciſſa AP$=x$, definietur ea ex determinatrice priori, ita vt ſit

$$y=\tfrac{1}{2}\Phi(x-mt)+\tfrac{1}{2}\Phi(x+mt):$$

ſin autem poſt idem tempus t, diſtantia puncti Λ ab axe AB deſideretur, eaque vocetur $=z$, poſita abſciſſa BΠ$=u$, erit per alteram curuam determinatricem

$$z=\tfrac{1}{2}\Phi(u-nt)+\tfrac{1}{2}\Phi(u+nt).$$

52.

52. Si tempus t tantum aſſumatur, vt ſit $mt = a$ ſeu $nt = b$, ob $\Phi(x-a) = -\Phi(a-x) = -\Phi(x+a)$ et $\phi(u-b) = -\phi(b+u) = -\phi(b+u)$, vtraque diſtantia euaneſcit, peruenientque poſt hoc tempus ſingula cordae elementa in ſitum rectum AB, quod eſt tempus dimidiae vibrationis. Sin autem ſumatur $mt = 2a$, ſeu $nt = 2b$, fiet

$$\Phi(x-2a) = -\Phi(a+(a-x)) = -\phi(a-(a-x)) = -\phi x$$
$$\phi(x+2a) = \phi(a+(a+x)) = \phi(a-(a+x)) = -\phi x$$

ideoque $y = -\phi x$, ſicque corda ad alteram axis partem in maxima excurſione verſabitur, ibique figuram, ipſi initiali omnino aequalem, habebit; vnde poſt elapſum aequale tempus iterum in figuram initialem revertetur; atque hoc ſimili modo locum habet pro altera cordae parte BAD. Motus igitur omnino erit ſimilis motui cordae vniformiter craſſae, ac vibrationes peraget iſochronas, quarum cuiusque tempus eſt $= \frac{2a}{m} = \frac{2b}{n}$.

53. Cum igitur ſit $mm = \frac{2Fag}{M}$, et $nn = \frac{2Fbg}{N}$, erit vniuscuiusque vibrationis tempus $= 2a\sqrt{\frac{M}{2Fag}}$ $= \sqrt{\frac{2Ma}{Fg}}$ min. ſec. ſin autem cordae huius compoſitae pars AC $= a$, cuius pondus $= M$, praeter A in C figeretur, eaque ab eadem vi $= F$ tenderetur, eſſet tempus vnius vibrationis $= a\sqrt{\frac{M}{2Fag}}$; ideoque ſuperioris dimidium. Vnde, manente tenſione F, eadem tota corda compoſita ACB duplo lentius vibrabit, quam vtraque pars AC, vel BC, ſeorſim, ſi in ambobus terminis eſſet fixa, ideoque ſonum vna octaua grauiorem

edet. Definiri etiam poteſt corda vniformis craſſitiei et longitudinis $AB = a + b$, quae ab eadem vi tenſa eundem eſſet editura ſonum; ponatur enim pondus huius cordae $= P$, ac tempus vnius vibrationis erit $= (a + b)\sqrt{\frac{P}{2Fg(a+b)}}$, quod tempori pro noſtra corda compoſita inuento $\sqrt{\frac{2Ma}{Fg}}$ aequale poſitum praebet $P = \frac{4Ma}{a+b} = \frac{4MN}{M+N}$; eiusque diametrum craſſitiei $= \frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}$.

Exemplum motus irregularis in cordis, ex duabus partibus diuerſae craſſitiei compoſitis.

54. Cum indoles motuum irregularium, quos ſupra in genere determinaui, luculentius ex exemplo determinato percipi queat, ponamus ambas cordae partes longitudine aequales, ſeu $b = a$, deinde ſit diameter craſſitiei partis AC duplo maior, quam partis BC, ſeu $\alpha = 2\beta$, erit illius partis pondus M huius N quadruplum, vnde fit $m : n = 1 : 2$, ſeu $n = 2m = 2\sqrt{\frac{2Fag}{M}}$,

Fig. 4. exiſtente F pondere, quo corda haec tenditur. Tribuatur autem huic cordae figura initialis ſimpliciſſima ADB, ſcilicet ſtylo iuncturae C admoto corda in ſitum ADB detrudatur, vt vtraque pars AD et BD lineam rectam referat, ac triangulum iſoſceles ADB exhibeat. Huius igitur cordae, ſi ſubito dimittatur, motus determinetur, ſeu regula inueſtigetur, cuius ope ſitus et figura cordae ad quodcunque tempus aſſignari queat.

55. Conſtrui ergo oportet ambas lineas determinatrices fig. 13 et 14, quarum partes principales ACD et BCD ex ipſa figura cordae initiali ſumuntur. Sit Φ character prioris, ϕ vero poſterioris, et cum poſita applicata CD $= 1$, habeamus ob $b = a$

$\Phi 0 = 0$; $\Phi a = 1$. item $\phi 0 = 0$ et $\phi a = 1$. lineis puncta A, D et B, D iungentibus exiſtentibus rectis, pro maioribus abſciſſis ob $m:n = 1:2$ conſequimur has formulas:

$$\phi(a+u) = \tfrac{2}{3}\phi(a-2u) + \tfrac{1}{3}\phi(a-u)$$
$$\phi(a+2u) = \tfrac{4}{3}\phi(a-u) - \tfrac{1}{3}\Phi(a-2u)$$

Statuamus pro u ſucceſſiue valores a, $2a$, $3a$, $4a$, etc. et, quia eſt $\phi(-c) = -\phi(c)$, et $\Phi(-c) = -\Phi(c)$, noſtrae formulae erunt:

$$\phi(a+u) = -\tfrac{2}{3}\phi(2u-a) - \tfrac{1}{3}\phi(u-a)$$
$$\phi(a+2u) = -\tfrac{4}{3}\phi(u-a) + \tfrac{1}{3}\Phi(2u-a),$$

ſicque ex praecedentibus vtriusque lineae applicatis ſequentes definientur, punctaque hoc modo inuenta lineis rectis iungenda eſſe manifeſtum eſt, vnde applicatis intermediis non erit opus.

56 Facili ergo negotio ſequentes applicatae computabuntur:

Pro linea fig. 13	Pro linea fig. 14
$\phi 0 = 0$	$\phi 0 = 0$
$\phi a = 1$	$\phi a = 1$
$\phi 2a = -\frac{2}{3}\phi a - \frac{1}{3}\phi 0 = -\frac{2}{3}$	$\phi 3a = -\frac{4}{3}\phi 0 + \frac{1}{3}\phi a = +\frac{8}{3}$
$\phi 3a = -\frac{2}{3}\phi 3a - \frac{1}{3}\phi a = -\frac{5}{9}$	$\phi 5a = -\frac{4}{3}\phi a + \frac{1}{3}\phi 3a = -\frac{11}{9}$
$\phi 4a = -\frac{2}{3}\phi 5a - \frac{1}{3}\phi 2a = +\frac{28}{27}$	$\phi 7a = -\frac{4}{3}\phi 2a + \frac{1}{3}\Phi 5a = -\frac{25}{27}$
$\phi 5a = -\frac{2}{3}\Phi 7a - \frac{1}{3}\phi 3a = -\frac{11}{81}$	$\phi 9a = -\frac{4}{3}\phi 3a + \frac{1}{3}\Phi 7a = -\frac{73}{81}$
$\phi 6a = -\frac{2}{3}\Phi 9a - \frac{1}{3}\phi 4a = -\frac{230}{243}$	$\phi 11a = -\frac{4}{3}\Phi 4a + \frac{1}{3}\Phi 9a = -\frac{263}{243}$
etc.	etc.

Sumtis ergo in vtroque axe interuallis aequalibus ipſi interuallo $AC = BC = a$, applicatae ita ſe habebunt:

CD. 2. II 3. III 4. IV 5. V 6. VI 7. VII

Fig. 13. $0,\ 1,\ -\frac{2}{3};\ -\frac{5}{9};\ +\frac{28}{27};\ -\frac{11}{81};\ -\frac{230}{243};\ +\frac{559}{729}$ etc.

Fig 14. $0,\ 1,\ +\frac{2}{3};\ +\frac{1}{3};\ -\frac{4}{9};\ -\frac{11}{9};\ -\frac{10}{27};\ +\frac{13}{27}$

e quibus valoribus ambae figurae deſcriptae conſpiciuntur.

57. Ex his figuris porro ad quoduis tempus t min. ſec. locus ſingulorum cordae punctorum L et Λ per regulas ſupra datas aſſignari poterit: Sit enim $AP = x$, et puncti L poſt tempus t ab axe AB diſtantia $= y$, tum $B\Pi = v$ et puncti Λ ab axe diſtantia $= z$ erit:

$$y = \tfrac{1}{2}\Phi(x+mt) + \tfrac{1}{2}\Phi(x-mt) = \tfrac{1}{2}\Phi(x+mt) - \tfrac{1}{2}\Phi(mt-x)$$

$$z = \tfrac{1}{2}\Phi(v+2mt) + \tfrac{1}{2}\Phi(v-2mt) = \tfrac{1}{2}\Phi(v+2mt) - \tfrac{1}{2}\Phi(2mt-v).$$

Hinc, poſito $v = a$, puncti cordae medii D tempore t ab axe diſtantia erit $= \frac{1}{2}\Phi(a+2mt) - \frac{1}{2}\Phi(2mt-a)$: vnde ſequentem tabulam conſtruxi:

Poſt tempus	Diſtantia puncti D ab axe:
$t = \frac{a}{2m}$	$\frac{1}{2}\Phi 2a - \frac{1}{2}\Phi 0 = +\frac{1}{3}$
$t = \frac{2a}{2m}$	$\frac{1}{2}\Phi 3a - \frac{1}{2}\Phi a = -\frac{1}{3}$
$t = \frac{3a}{2m}$	$\frac{1}{2}\Phi 4a - \frac{1}{2}\Phi 2a = -\frac{5}{9}$.
$t = \frac{4a}{2m}$	$\frac{1}{2}\Phi 5a - \frac{1}{2}\Phi 3a = -\frac{7}{9}$
$t = \frac{5a}{2m}$	$\frac{1}{2}\Phi 6a - \frac{1}{2}\Phi 4a = +\frac{1}{27}$
$t = \frac{6a}{2m}$	$\frac{1}{2}\Phi 7a - \frac{1}{2}\Phi 5a = +\frac{25}{27}$.
$t = \frac{7a}{2m}$	$\frac{1}{2}\Phi 8a - \frac{1}{2}\Phi 6a = +\frac{45}{81}$
$t = \frac{8a}{2m}$	$\frac{1}{2}\Phi 9a - \frac{1}{2}\Phi 7a = +\frac{17}{81}$
$t = \frac{9a}{2m}$	$\frac{1}{2}\Phi 10a - \frac{1}{2}\Phi 8a = -\frac{95}{243}$
$t = \frac{10a}{2m}$	$\frac{1}{2}\Phi 11a - \frac{1}{2}\Phi 9a = -\frac{241}{243}$
$t = \frac{11a}{2m}$	$\frac{1}{2}\Phi 12a - \frac{1}{2}\Phi 10a = -\frac{197}{729}$
$t = \frac{12a}{2m}$	$\frac{1}{2}\Phi 13a - \frac{1}{2}\Phi 11a = +\frac{329}{729}$.

Iſta

Iſta puncti D agitatio circa punctum quietis C in figura 15 repraeſentatur, vbi puncta numeris 1, 2, 3, 4, 5 etc. loca deſignant, vti id poſt tempus $\frac{a}{2m}$ min. ſec. ſemel, bis, ter, quater, quinquies etc. elapſum ſit futurum. Hinc patet, primam vibrationem tali tempore circiter quadruplo, ſecundam duplo, tertiam quadruplo, quartam fere triplo etc. abſolui, ita vt vibrationes alternatim prodeant lentiores et citiores, neque tamen legem regularem conſtituant, ex quo ſonus erit rudis neque ad harmoniam aptus.

De caſu vibrationum iſochronarum in cordis, ex duabus partibus diuerſae craſſitiei compoſitis.

58. Vti in omni motu vibratorio, ſi quidem eſt minimus, datur caſus, quo iſochroniſmus et ſynchroniſmus locum habet, et pro quo certus ſtatus initialis requiritur; ita etiam noſtro caſu, vtcunque longitudines $AC = a$ et $BC = b$ ratione craſſitiei, cuius diametros poſuimus α et β, fuerint comparatae, ſemper caſus maxime ſpecialis pro iſochroniſmo aſſignari poteſt, qui euenit, ſi acceleratio cuiusuis elementi diſtantiae eius a ſitu naturali fuerit proportionalis. Hinc autem pro motu elementorum vtriusque partis, ſi poſt tempus t min ſec. puncta L et Λ in loca M et M perueniſſe ponamus, vocemusque: Tab. II. Fig 6.

$$AP = x;\ PM = y;\ \text{et}\ B\Pi = v;\ \Pi M = z$$

ad huiusmodi formulas perueniemus:

$$y = \alpha \sin \mu x \operatorname{coſ.} \lambda t \quad \text{et} \quad z = \beta \sin . \nu v \operatorname{coſ.} \lambda t$$

 vbi

vbi litterae incognitae ita ſunt definiendae, vt his formulis differentio differentialibus ſatisfiat:

$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = mm\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) \text{ et } \left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = nn\left(\frac{ddz}{dv^2}\right).$$

59 Primo ergo eſſe debet $\alpha\lambda\lambda = \alpha\mu\mu mm$, ideoque $\mu = \frac{\lambda}{m}$, tum vero $\beta\lambda\lambda = \beta\nu\nu nn$, ideoque $\nu = \frac{\lambda}{n}$. Deinde quia, poſito $x = a$ et $v = b$, fieri debet $y = z$, habebimus $\alpha \sin. \mu a = \beta \sin. \nu b$; ſtatuamus ergo $\alpha = \frac{e}{\sin \mu a} = \frac{e}{\sin \frac{\lambda a}{m}}$ et $\beta = \frac{e}{\sin. \nu b} = \frac{e}{\sin. \frac{\lambda b}{n}}$ eruntque noſtrae aequationes:

$$y \sin. \frac{\lambda a}{m} = e \sin. \frac{\lambda x}{m} \cos. \lambda t \text{ et } z \sin. \frac{\lambda b}{n} = e \sin. \frac{\lambda v}{n} \cos \lambda t.$$

Poſtremo ambas curuas in puncto iuncturae E ſemper communem tangentem habere oportet, ſeu eſſe debet $\left(\frac{dy}{dx}\right) + \left(\frac{dz}{dv}\right) = 0$, poſito $x = a$ et $v = b$: vnde fit $\frac{\lambda e}{m} \cot. \frac{\lambda a}{m} + \frac{\lambda e}{n} \cot. \frac{\lambda b}{n} = 0$ ſiue $m \,\text{tang.} \frac{\lambda a}{m} + n \,\text{tang.} \frac{\lambda b}{n} = 0$. Quaeri ergo debet huiusmodi numerus λ, vt huic conditioni ſatisfiat, id quod infinitis modis fieri poteſt, ſicque innumerabiles obtinebuntur vibrationum iſochronarum caſus, qui, deinde inuicem combinati, infinitas ſuppeditabunt vibrationum compoſitarum ſpecies.

60. Cum autem ſit $m = \sqrt{\frac{2Fag}{M}}$ et $n = \sqrt{\frac{2Fbg}{N}}$, denotante M pondus partis AC, et N pondus partis BC, huic formulae erit ſatisfaciendum: $\sqrt{\frac{a}{M}}.\text{tang}\, \lambda \sqrt{\frac{Ma}{2Fg}} + \sqrt{\frac{b}{N}} \text{ tang}\, \lambda \sqrt{\frac{Nb}{2Fg}} = 0$, quod quidem in genere praeſtare non licet, quouis autem caſu determinato valores idonei pro λ non difficulter eliciuntur. Inuento autem

tem quocunque valore ipſius λ, motus cordae vibratorius ita ſe habebit, vt ſingulae vibrationes abſoluantur tempore t, exiſtente $\lambda t = \pi$, denotante π ſemiperipheriam circuli radii $= 1$, ſeu tempus vnius vibrationis erit $= \frac{\pi}{\lambda}$ min. ſec. Quod autem ad diuerſos valores ipſius λ attinet, niſi ſint inter ſe commenſurabiles, vibrationes, quae ex illarum combinatione oriuntur, nunquam fient regulares, quod ex aequationibus eſt manifeſtum:

$$y = \frac{e \,\text{ſin}\, \frac{\lambda x}{m} \,\text{coſ.}\, \lambda t}{\text{ſin}\, \frac{\lambda a}{m}} + \frac{e' \,\text{ſin.}\, \frac{\lambda' x}{m} \,\text{coſ.}\, \lambda' t}{\text{ſin.}\, \frac{\lambda' a}{m}} + \frac{e'' \,\text{ſin.}\, \frac{\lambda'' x}{m} \,\text{coſ.}\, \lambda'' t}{\text{ſin.}\, \frac{\lambda'' a}{m}} \text{ etc.}$$

$$z = \frac{e \,\text{ſin.}\, \frac{\lambda v}{n} \,\text{coſ.}\, \lambda t}{\text{ſin.}\, \frac{\lambda b}{n}} + \frac{e' \,\text{ſin.}\, \frac{\lambda' v}{n} \,\text{coſ.}\, \lambda' t}{\text{ſin.}\, \frac{\lambda' b}{n}} + \frac{e'' \,\text{ſin.}\, \frac{\lambda'' v}{n} \,\text{coſ.}\, \lambda'' t}{\text{ſin.}\, \frac{\lambda'' b}{n}} \text{ etc.}$$

Euolutio exempli ſpecialis.

61. Ponamus eſſe, vti in exemplo ſuperiori, $b = a$, et $N = \frac{1}{4} M$; vnde fit $m = \frac{2 Fag}{M}$ et $n = 2m$: debet ergo reſolui haec aequatio:

$$\text{tang.}\, \lambda \sqrt{\frac{Ma}{2Fg}} + 2 \,\text{tang.}\, \tfrac{1}{2}\lambda \sqrt{\frac{Ma}{2Fg}} = 0$$

Ponatur breuitatis gratia angulus $\frac{1}{2}\lambda \sqrt{\frac{Ma}{2Fg}} = \omega$, vt ſit $\lambda = 2\omega \sqrt{\frac{2Fg}{Ma}}$; quaerique oportet angulum ω, ita vt ſit

$$\text{tang.}\, 2\omega + 2 \,\text{tang.}\, \omega = 0, \text{ ſeu } \text{tang.}\, 2\omega = -2 \,\text{tang.}\, \omega,$$

cui aequationi primum ſatisfit his valoribus:

$$\omega = 0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ 4\pi,\ 5\pi \text{ etc.}$$

Deinde ob $\text{tang}\, 2\omega = \frac{2 \,\text{tang.}\, \omega}{1 - \text{tang}\, \omega^2}$, prodit $\text{tang}\, \omega = \pm \sqrt{2}$; ſi ergo ſit θ minimus angulus tangentem habens $= \sqrt{2}$, qui

qui eſt $54^\circ, 44', 8'', 12'''$ praeterea quoque hi anguli ſatisfacient:

$$\omega = \theta;\ \pi \pm \theta;\ 2\pi \pm \theta;\ 3\pi \pm \theta;\ 4\pi \pm \theta;\ 5\pi \pm \theta \text{ etc.}$$

62. Sumto ergo horum angulorum pro ω inuentorum quocunque, ob $\lambda = 2\omega\sqrt{\frac{2Fg}{Ma}}$, tempus vnius vibrationis cordae erit $= \frac{\pi}{2\omega}\sqrt{\frac{Ma}{2Fg}}$ min. ſec. ac pro motu cordae eiusque partis vtriusque habebuntur hae aequationes:

$$y = \frac{e}{\text{ſin.}\, 2\omega}\,\text{ſin.}\frac{2\omega x}{a}\,\text{coſ.}\, 2\omega t\sqrt{\frac{2Fg}{Ma}}$$
$$z = \frac{e}{\text{ſin.}\,\omega}\,\text{ſin.}\frac{\omega v}{a}\,\text{coſ}\, 2\omega t\sqrt{\frac{2Fg}{Ma}}$$

vbi euidens, valores prioris ordinis pro ω inuentos, punctum cordae medium D ſemper in C immotum praebere. Cum enim ſit ſin. $\omega = 0$, et ſin. $2\omega = 0$, neceſſario capi debet $e = 0$. Quod incommodum quo euitetur, ponamus $e = 2d$ ſin. ω, vt habeatur:

$$y = \frac{d}{\text{coſ.}\,\omega}\,\text{ſin.}\frac{2\omega x}{a}\,\text{coſ.}\, 2\omega t\sqrt{\frac{2Fg}{Ma}}$$
$$z = 2d\,\text{ſin.}\frac{\omega v}{a}\,\text{coſ}\, 2\omega t\sqrt{\frac{2Fg}{Ma}}.$$

63 Hic autem patet, quod quidem ſtatim ſuſpicari licuerat, valores prioris ordinis plane eſſe inutiles, neque ad noſtrum inſtitutum accommodatos; cum enim, poſito $x = v = a$, fieri debeat $\left(\frac{dy}{dx}\right) + \left(\frac{dz}{dv}\right) = 0$, hinc nanciſcimur:

$$\frac{\text{coſ.}\, 2\omega}{\text{coſ.}\,\omega} + 2\,\text{coſ.}\,\omega = 0 \text{ ſeu coſ}\,\omega = \pm\sqrt{\tfrac{1}{3}}$$

vbi factor ſuperior inutilis tang ω eſt excluſus. Denotante ergo θ angulum $54^\circ, 44', 8'', 12'''$, valores idonei pro ω ſubſtituendi ſunt

$$\omega = \pm\theta;\ \pi \pm \theta;\ 2\pi \pm \theta;\ 3\pi \pm \theta;\ \text{etc.}$$

et

et in genere $\omega = i\pi \pm \theta$, denotante i numerum integrum quemcunque. Quocirca tempus vnius vibrationis erit $= \frac{\pi}{2i\pi \pm 2\theta} \sqrt{\frac{Ma}{2Fg}}$ min. ſec. et poſito $t = 0$, pro figura initiali hae obtinentur aequationes:

$$y = \frac{e}{\mathit{ſin.} 2(i\pi \pm \theta)} \text{ ſin. } \frac{2(i\pi \pm \theta)x}{a} \text{ et } z = \frac{e}{\mathit{ſin.}(i\pi \pm \theta)} \text{ ſin. } \frac{(i\pi \pm \theta)v}{a}.$$

64. Haec ergo corda infinitis modis ad vibratorium motum iſochronum excitari poteſt; vnde innumerabiles ſonos edet. Cum autem ſoni ſe habeant reciproce vt tempus vnius vibrationis, ob $\frac{\theta}{\pi} = 0,3040868$, hi ſoni, ad quos edendos eadem corda eſt apta, erunt vt numeri:

0,3040868; 0,6959132; 1,3040868; 1,6959132; 2,3040868 etc.

qui cum inter ſe ſint incommenſurabiles, ſoni erunt maxime diſſoni, ſicque eadem corda ſimul plures ſonos inter ſe diſſonos edere poterit. Dum autem corda illos ſonos ſimplices edit, primo excepto, vnum pluresue nodos inter vibrandum formabit, ſeu vnum pluraue puncta eius in recta AB immota manebunt; eaque erunt vel in parte AC, vbi ſumta $x < a$ fuerit ſin $\frac{2\omega x}{a} = 0$; vel in parte BC, vbi, ſumta $v < 0$, fuerit ſin $\frac{\omega v}{a} = 0$. Sic pro ſono ſecundo in parte AC dabitur vnus nodus circa locum fere $x = \frac{5}{7}$, in parte BC nullus: pro ſono tertio dabuntur in parte AC duo nodi $x = \frac{5}{13}$ et $x = \frac{10}{13}$, in parte BC vnus $v = \frac{10}{13}$; pro ſono quarto dabuntur in parte AC tres nodi $x = \frac{5}{17}$, $x = \frac{10}{17}$, $x = \frac{15}{17}$, et in parte BC vnus $v = \frac{10}{17}$, et ita porro.

Aliud Exemplum ſpeciale.

65. In praecedente exemplo ſoni ſimplices, quorum eadem corda eſt capax, etſi diſſonantes, tamen alternatim progreſſionem arithmeticam conſtituebant; qui ordo inde veniebat, quod tam quantitates m et n, quam anguli $\frac{\lambda a}{m}$ et $\frac{\lambda b}{n}$, rationem tenebant rationalem. Quando autem hoc non euenit, ne iſte quidem ordo amplius locum habebit, quod exemplo oſtendiſſe iuuabit. Ponamus igitur, eſſe quidem $b = a$, ſed $N = \frac{1}{2}M$, eritque $n = m\sqrt{2}$, exiſtente $m = \sqrt{\frac{2Fag}{m}}$: quaeri ergo oportet numerum λ vt ſit tang $\frac{\lambda a}{m} + \sqrt{2}$. tang $\frac{\lambda a}{m\sqrt{2}} = 0$. Ad quam aequationem reſoluendam ponamus $\frac{\lambda a}{m\sqrt{2}} = \omega$, vt ſit $\lambda = 2\omega\sqrt{\frac{Fg}{Ma}}$; fierique debet $\frac{\text{tang.}\,\omega\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \text{tang}\,\omega = 0$; quae aequatio quidem iterum infinitos praebet valores pro angulo ω, qui autem non ita ſunt comparati, vt vno cognito reliqui aſſignari queant.

66. Videamus ergo, quomodo aequatio $\frac{1}{\sqrt{2}}\text{tang}\,\omega\sqrt{2} + \text{tang.}\,\omega = 0$ commodiſſime reſolui poſſit, ac tentaminibus quibusdam inſtitutis minimus angulus ω intra limites $72°, 25'$ et $72°, 35'$ cadere reperitur: hos ergo valores pro ω ſubſtituamus, calculumque ſequenti modo inſtituamus:

Hypoth.

	Hypoth. I	Hypoth. II
	$\omega = 72^\circ, 25'$	$72^\circ, 35'$
ſeu	$\omega = 260700''$	$261300''$
hinc	$l\omega = 5,4161410$	$5,4171394$
adde	$l\sqrt{2} = 0,1505150$	$0,1505150$
	$l\omega\sqrt{2}'' = 5,5666560$	$5,5676544$
	$\omega\sqrt{2} = 1\ 368685\tfrac{1}{2}''$	$369534''$
ſeu	$\omega\sqrt{2} = 02^\circ, 24', 45\tfrac{1}{2}''$	$102^\circ, 38', 54''$
	$\pi - \omega\sqrt{2} = 77, 35, 14\tfrac{1}{2}$	$77, 21, 6$
	$l\text{tang}(\pi - \omega\sqrt{2}) = 10,6573889$	$10,6489532$
adde	$l\sqrt{\tfrac{1}{2}} = 9,8494850$	$9,8494850$
	$10,5068739$	$10,4984382$
at	$l\text{tang}\,\omega = 10,4990797$	$10,5034848$
Error	$+ 77942$	$- 50466$
	50466	
	$128408 : 10' = 77942 : 6', 4''$	

vnde concluditur verus angulus $\omega = 72^\circ, 31', 4''$.

67. Inuento hoc angulo ω, erit $\lambda = 2\omega\sqrt{\frac{Fg}{Ma}}$, et tempus vnius vibrationis cordae $= \frac{\pi}{2\omega}\sqrt{\frac{Ma}{Fg}}$ min. ſec. motus autem cordae ex ſequentibus aequationibus innoteſcet; ob $\frac{\lambda}{m} = \frac{\omega\sqrt{2}}{a}$ et $\frac{\lambda}{n} = \frac{\omega}{a}$:

$$y = \frac{e}{\text{ſin.}\,\omega\sqrt{2}}\ \text{ſin.}\ \frac{\omega x\sqrt{2}}{a}\ \text{coſ.}\ 2\omega t\sqrt{\frac{Fg}{Ma}}$$

$$z = \frac{e}{\text{ſin.}\,\omega}\ \text{ſin.}\ \frac{\omega v}{a}.\ \text{coſ.}\ 2\omega t\sqrt{\frac{Fg}{Ma}}.$$

Verum pro angulo ω infinitos inſuper alios valores idoneos inueſtigari licet, quo in negotio methodo ante adhibita vti conueniet, vt primum per tentamina

 limites,

limites, intra quos verus quiſpiam valor continetur, colligantur, iique deinceps arctius conſtringantur, donec valor verus ex iis ſatis accurate concludi queat. Cum autem iſti valores nullo certo ordine inter ſe cohaereant, labor vtique non parum erit moleſtus ſuſcipiendus, ſi quis plures eruere voluerit.

Inueſtigatio vibrationum regularium in cordis craſſitiei vtcunque variabilis

68. Reuertamur iam tandem ad problema generale, quo cordae craſſities vtcunque variabilis eſt aſſumta, ac ſupra (10) inuenimus omnium motuum, quos quidem corda recipere valeat, inueſtigationem ad ſolutionem huius aequationis differentio-differentialis reuocari: $(\frac{ddy}{dt^2}) = \frac{2Fbbbg}{Mzz}(\frac{ddy}{dx^2})$, vbi z eſt diameter craſſitiei cordae abſciſſae x reſpondens, ideoque functio cognita ipſius x. Ponamus ergo ad abbreuiandum $\frac{2Fbbbg}{Mzz} = uu$, vt habeamus $(\frac{ddy}{dt^2}) = uu(\frac{ddy}{dx^2})$, in qua nunc u erit functio cognita ipſius x: quaeriturque, qualis functio ipſarum x et t, pro y ſubſtituta, iſti aequationi ſatisfaciat, atque inſuper his conditionibus ſit conſentanea, vt, ſiue ſtatuatur $x = 0$, ſiue $x = a$, prodeat $y = 0$, tum vero vt, poſito $t = 0$, fiat $(\frac{dy}{dt}) = 0$. Quartam conditionem, vt, poſito $t = 0$, pro y prodeat data functio ipſius x, datae figurae initiali cordae conueniens, hic ſeponamus, quandoquidem problema iſto latiſſimo ſenſu reſolui nequit.

69. Euoluamus igitur primum caſum illum maxime notabilem, quo corda vibrationes omnes ſynchronas

nas et iſochronas producit, pro quo vis acceleratrix, vti conſtat, ipſi applicatae y eſſe debet proportionalis. Statuatur ergo ea $= nny$, et obtinebimus iſtas binas aequationes reſoluendas:

$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -nny \text{ et } uu\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) = -nny$$

in quarum illa abſciſſa x, in hac vero tempus t eſt conſtans aſſumtum. At ex priori aequatione oritur $y = p \cos. nt$, vt fiat $\left(\frac{dy}{dt}\right) = 0$, poſito $t = 0$, vbi p denotat functionem quamcunque ipſius x, quae ex altera aequatione debet definiri. Obtinetur autem: $uuddp + nnpdx^2 = 0$, vnde valor ipſius p ita debet determinari, vt fiat $p = 0$ ſiue ponatur $x = 0$, ſiue $x = a$. Verum alterutra conditio inſeruit numero n determinando, ex quo deinceps tempus cuiusque vibrationis innoteſcet $= \frac{\pi}{n}$ min. ſec.

70. Verum haec aequatio, in genere conſiderata, $uuddp + nnpdx^2 = 0$ iisdem difficultatibus ſubiecta deprehenditur, quae in formula illa famoſa *Riccatiana* occurrunt; poſito enim $p = e^{\int q dx}$ ſeu $\frac{dp}{pdx} = q$, illa aequatio ad hanc formam reducitur: $uudq + uuqqdx + nndx = 0$, cuius integratio ita eſt inſtituenda, vt, poſito $x = 0$, fiat $\int qdx = -\infty$. Cum igitur habeatur

$$dq + qqdx + \frac{nndx}{uu} = 0$$

ex caſibus integrabilitatis formulae *Riccatianae* patet, hanc aequationem ad conſtructionem perduci poſſe, ſi valor ipſius u ſit huiusmodi poteſtas:

$$\frac{(k+mx)^2}{a}; \; (k+x)^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{a}; \; \frac{(k+mx)^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a}}; \; (k+mx)^{\frac{4}{5}}\sqrt[5]{a} \text{ etc.}$$

 quorum

quorum caſuum primum ſupra iam in genere expedivimus, quem ſpeciminis loco euoluamus, ita vt haec aequatio reſoluenda ſit:

$$dq + qq\,dx + \frac{nnaadx}{(k+mx)^4} = 0.$$

71. Huic autem aequationi primum ſequens valor imaginarius ſatisfacere deprehenditur:

$$q = \frac{na\sqrt{-1} + mk + mmx}{(k+mx)^2}$$

vnde fit $\int q\,dx = \frac{-na\sqrt{-1}}{m(k+mx)} + l(k+mx)$ et $p = \alpha(k+mx)e^{\frac{-na\sqrt{-1}}{m(k+mx)}}$. Simili vero modo quoque ſatisfacit $p = \beta(k+mx)e^{\frac{+na\sqrt{-1}}{m(k+mx)}}$, quibus valoribus combinandis per formulas reales obtinetur:

$p = A(k+mx)\,\text{ſin.}\frac{na}{m(k+mx)} + B(k+mx)\,\text{coſ.}\frac{na}{m(k+mx)}$ qui vt euaneſcat, poſito $x=0$, fiet

$$p = A(k+mx)\,\text{ſin.}\frac{nax}{k(k+mx)},$$

et proinde $y = A(k+mx)\,\text{ſin.}\frac{nax}{k(k+mx)}\,\text{coſ.}\,nt$. Cum autem hic ſit $uu = \frac{(k+mx)^4}{aa}$, erit $zz = \frac{2Faabbbg}{M(k+mx)^4}$ et tempus vnius vibrationis erit $= \frac{\pi}{n}$ min. ſec. Verum numerus n ita debet eſſe comparatus, vt poſito $x=a$ ſit $\text{ſin.}\frac{naa}{k(k+ma)} = 0$, ſeu $n = \frac{\lambda\pi k(k+ma)}{aa}$, ideoque tempus vibrationis $= \frac{aa}{\lambda k(k+ma)}$ min. ſec.

72. Ponamus ergo ſecundo $u = (k+mx)^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{a}$, vt habeamus

$$dq + qq\,dx + \frac{nn\,dx}{(k+mx)^{\frac{4}{3}}\sqrt[3]{aa}}$$

cui

cui aequationi particulariter ſatisfacit

$$q = \frac{1}{\frac{(k+mx)^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{a}}{n\sqrt{-1}} + \frac{m(k+mx)^{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{aa}}{3nn}}$$

Sit $k+mx = s^3$, vt fiat $dx = \frac{3ssds}{m}$, eritque

$$qdx = \frac{3sds}{\frac{ms\sqrt[3]{a}}{n\sqrt{-1}} + \frac{mm\sqrt[3]{aa}}{3nn}} = \frac{3nds\sqrt{-1}}{m\sqrt[3]{a}} + \frac{ds}{s - \frac{m\sqrt[3]{a}}{3n\sqrt{-1}}}$$

et $\int qdx = \frac{3ns\sqrt{-1}}{m\sqrt[3]{a}} + l\left(s - \frac{m\sqrt[3]{a}}{3n\sqrt{-1}}\right)$ hincque

$$p = A\left(s - \frac{m\sqrt[3]{a}}{3n\sqrt{-1}}\right)e^{\frac{3ns\sqrt{-1}}{m\sqrt[3]{a}}} + B\left(s + \frac{m\sqrt[3]{a}}{3n\sqrt{-1}}\right)e^{\frac{-3ns\sqrt{-1}}{m\sqrt[3]{a}}}$$

quae expreſſio, ad valores reales reuocata, praebet:

$$p = \alpha s\,\text{coſ.}\,\frac{3ns}{m\sqrt[3]{a}} + \beta s\,\text{ſin.}\,\frac{3ns}{m\sqrt[3]{a}} - \frac{\alpha m\sqrt[3]{a}}{3n}\,\text{ſin.}\,\frac{3ns}{m\sqrt[3]{a}} + \frac{\beta m\sqrt[3]{a}}{3n}\,\text{coſ.}\,\frac{3ns}{m\sqrt[3]{a}}$$

vel $p = As\,\text{ſin.}\left(\frac{3ns+\delta}{m\sqrt[3]{a}}\right) + \frac{Am\sqrt[3]{a}}{3n}\,\text{coſ.}\left(\frac{3ns+\delta}{m\sqrt[3]{a}}\right)$.

73. Ponatur iam $x=0$, quo caſu fieri debet $p=0$, et ob $s=\sqrt[3]{k}$ erit:

$\sqrt[3]{k}$

$$\sqrt[3]{k}.\text{ſin}.\frac{3n\sqrt[3]{k}+\delta}{m\sqrt[3]{a}}+\frac{m\sqrt[3]{a}}{3n}\text{coſ}.\frac{3n\sqrt[3]{k}+\delta}{m\sqrt[3]{a}}=0$$

ſeu $\text{tang}.(\frac{3u\sqrt[3]{k}+\delta}{m\sqrt[3]{a}})=\frac{-m\sqrt[3]{a}}{3n\sqrt[3]{k}}$; ideoque

$$\text{ſin}.\frac{3n\sqrt[3]{k}+\delta}{m\sqrt[3]{a}}=\frac{-m\sqrt[3]{a}}{\sqrt{(mm\sqrt[3]{aa}+9nn\sqrt[3]{kk})}}$$

Deinde ponatur $x=a$, et ob $s=\sqrt[3]{(k+ma)}$ fiet quoque

$$\text{tang}.(\frac{3n\sqrt[3]{(k+ma)}+\delta}{m\sqrt[3]{a}})=-\frac{m\sqrt[3]{a}}{3n\sqrt[3]{(k+ma)}},$$

vnde eliminando angulo δ elicitur

$$\text{tang}.\frac{3n\sqrt[3]{(k+ma)}-3n\sqrt[3]{k}}{m\sqrt[3]{a}}=\frac{3mn\sqrt[3]{a}(\sqrt[3]{(k+ma)}-\sqrt[3]{k})}{mm\sqrt[3]{aa}+9nn\sqrt[3]{k(k+ma)}}$$

ex qua aequatione valor numeri n erui debet, quod quidem infinitis modis fieri poſſe per ſe patet. Si enim ponatur $\frac{3n}{m\sqrt[3]{a}}=\frac{\omega}{\sqrt[3]{(k+ma)}-\sqrt[3]{k}}$ quaeri debet angulus ω, vt ſit

$$\text{tang}.\omega=\frac{\omega(\sqrt[3]{(k+ma)}-\sqrt[3]{k})}{(\sqrt[3]{(k+ma)}-\sqrt[3]{k})^2+\omega\omega\sqrt[3]{k(k+ma)}}$$

vel $\omega=\text{A tang}.\frac{\omega\sqrt[3]{(k+ma)}}{\sqrt[3]{(k+ma)}-\sqrt[3]{k}}-\text{A tang}.\frac{\omega\sqrt[3]{k}}{\sqrt[3]{(k+ma)}-\sqrt[3]{k}}$

Tum

Tum inuento angulo ω, quaeratur angulus θ, vt ſit tang. $\theta = \frac{\sqrt[3]{(k+ma)} - \sqrt[3]{k}}{\omega \sqrt[3]{(k+ma)}}$, prodibitque altera conſtans

$$\frac{\delta}{m\sqrt[3]{a}} = \theta + \frac{\omega \sqrt[3]{k}}{\sqrt[3]{(k+ma)} - \sqrt[3]{k}}.$$

74. Attentionem quoque meretur caſus quaſi infiniteſimus, quo $u = k + mx$, ſeu $z = \frac{b}{k+mx} \sqrt{\frac{2Fbg}{M}}$: ſtatim enim liquet aequationi $(k + mx)^2 ddp + nnpdx^2 = 0$ ſatisfacere poteſtatem quandam $p = (k + mx)^\alpha$, facta enim ſubſtitutione fit $\alpha(\alpha - 1) mm + nn = 0$, huncque $\alpha = \frac{1}{2} \pm \sqrt{(\frac{1}{4} - \frac{nn}{mm})}$. Sit breuitatis gratia $\sqrt{(\frac{nn}{mm} - \frac{1}{4})} = \lambda$, habebiturque $p = (A(k+mx)^{\lambda\sqrt{-1}} + B(k+mx)^{-\lambda\sqrt{-1}}) \sqrt{(k+mp)}$, quae ad realitatem reuocata praebet

$$p = (C \sin. \lambda l(1 + \frac{mx}{k}) + D \cos. \lambda l(1 + \frac{mx}{k})) \sqrt{(k+mx)}$$

Iam quia, poſito $x = 0$, fieri debet $p = 0$, oportet eſſe $D = 0$, et facto $x = a$, neceſſe eſt ſit $\lambda l(1 + \frac{ma}{k}) = i\pi$ denotante i numerum integrum quemcunque. Inuento igitur $\lambda = \frac{i\pi}{l(1 + \frac{ma}{k})}$, erit $n = m\sqrt{(\frac{1}{4} + \lambda\lambda)}$, vnde tempus vnius vibrationis erit $= \frac{\pi}{n}$, et motus definietur per hanc aequationem:

$$y = A(k+mx)^{\frac{1}{2}} \sin. i\pi \frac{l(1 + \frac{mx}{k})}{l(1 + \frac{ma}{k})} \cos. mt\sqrt{(\frac{1}{4} + \frac{ii\pi\pi}{(l(1+\frac{ma}{k}))^2})}.$$

75. Sumendis pro i diuerſis numeris, oriuntur diuerſae vibrationum iſochronarum ſpecies, quarum tem-

 pora

pora autem plane erunt inter ſe incommenſurabilia. Poterunt autem vibrationes ex pluribus huiusmodi ſimplicibus componi, in quibus nulla amplius regularitas perſpicietur. Si enim breuitatis gratia ponamus $\frac{\pi}{l(1+\frac{ma}{k})} = \mu$, ſequens aequatio in infinitum adeo continuata problemati ſatisfaciet:

$$y = (k+mx)^{\frac{1}{2}} \begin{cases} \alpha \,\text{ſin.}\, \mu\, l(1+\frac{mx}{k}).\,\text{coſ.}\, mt\sqrt{(\frac{1}{4}+\mu\mu)} \\ +\beta\,\text{ſin.}\, 2\mu\, l(1+\frac{mx}{k}).\,\text{coſ.}\, mt\sqrt{(\frac{1}{4}+4\mu\mu)} \\ +\gamma\,\text{ſin.}\, 3\mu\, l(1+\frac{mx}{k}).\,\text{coſ}\, mt\sqrt{(\frac{1}{4}+9\mu\mu)} \\ +\delta\,\text{ſin.}\, 4\mu\, l(1+\frac{mx}{k}).\,\text{coſ}\, mt\sqrt{(\frac{1}{4}+16\mu\mu)} \end{cases}$$

etc.

Neque tamen haec expreſſio, etſi in infinitum producta, eiusmodi ſolutionem generalem ſuppeditat, quae ſe ad omnes caſus, quibus cordae initio figura quaecunque fuerit inducta, extendat. Verum conſideratio huiusmodi ſolutionum particularium viam ad ſolutionem generalem parare debet.

Integratio generalis et completa aequationis differentio-differentialis $x^{2m+2}ddy + ccydx^2 = 0$.

76. Ad hanc aequationem peruenimus, quoties in noſtra aequatione ſuperiori $uuddp + nnpdx^2 = 0$, functio u fuerit poteſtas ipſius x, vel ipſius $\alpha + \beta x$, ſcilicet $u = (\alpha + \beta x)^{m+1}$, quibus igitur caſibus haec aequatio integrationem admittit, iisdem motus vibratorius cordae iſochronus determinari poterit. Manifeſtum autem

autem eſt, hanc aequationem a celebri illa *Riccatiana* non differre. Poſito enim $y = e^{\int z dx}$, vt ſit $z = \frac{dy}{y dx}$ prodit haec ipſa forma:

$$dz + zz dx + cc x^{-2m-2} dx = 0$$

quae quibusnam caſibus exponentis m integrabilis euadat, a celeberrimis Geometris olim eſt inueſtigatum. Verum integralia ab illis exhibita non ſolum ſunt particularia, ſed etiam hoc caſu, ob coefficientem $+cc$ neceſſario poſitiuum, fiunt imaginaria, ita vt nobis nullum vſum eſſent praeſtitura.

77. Non mediocriter ergo hoc opus circa vibrationes promouebitur, ſi huius aequationis integrale completum, quod a formulis imaginariis ſit liberum, exhibuero. Hunc in finem coefficientes neceſſarii ſequenti modo definiantur:

$$A = \frac{mm-1}{8mc};\ B = \frac{9mm-1}{16mc} A;\ C = \frac{25mm-1}{24mc} B;\ D = \frac{49mm-1}{32mc} C$$
$$E = \frac{81mm-1}{40mc} D;\ F = \frac{121mm-1}{48mc} E;\ G = \frac{169mm-1}{56mc} F \text{ etc.}$$

quibus inuentis erit integrale completum:

$$y = \begin{cases} +kx^{\frac{m+1}{2}}(1 - Bx^{2m} + Dx^{4m} - Fx^{6m} + \text{etc.})\,\text{ſin.}\left(\frac{c}{mx^m} + \theta\right) \\ -kx^{\frac{m+1}{2}}(Ax^m - Cx^{3m} + Ex^{5m} - Gx^{7m} + \text{etc})\,\text{coſ.}\left(\frac{c}{mx^m} + \theta\right) \end{cases}$$

vbi angulus θ cum quantitate k ſunt binae illae conſtantes arbitrariae, per duplicem integrationem introductae. Pro noſtro autem caſu vibrationum, cum angulus θ, tum conſtans c, ita definiri debent, vt, ſi abſciſſae x, quae iam non amplius a puncto A compu-

 tatur,

tatur, certi duo valores, veluti $x = d$ et $x = d + a$, tribuantur, applicata y vtroque caſu euaneſcat.

78. In genere quidem haec expreſſio in infinitum excurrit; ſed manifeſtum eſt, dari infinitos eiusmodi valores exponentis m, quibus ea fiat finita. Hoc ſcilicet euenit, ſi ſumta littera i ad numerum imparem quemcunque ſignificandum, fuerit $iimm - 1 = 0$ ſeu $m = \pm \frac{1}{i}$, quibus caſibus fit noſter exponens $2m + 2 = 2 \pm \frac{2}{i}$ Quare aequatio noſtra $x^{2m+2}ddy + ccydx^2 = 0$ ſequentibus caſibus integrationem abſolutam admittit, ſi ſcilicet exponens $2m + 2$ fuerit terminus alterutrius ſequentium duarum progreſſionum:

$$0;\ \tfrac{4}{3};\ \tfrac{8}{5};\ \tfrac{12}{7};\ \tfrac{16}{9};\ \tfrac{20}{11};\ \tfrac{24}{13};\ \text{etc.}$$

$$4;\ \tfrac{8}{3};\ \tfrac{12}{5};\ \tfrac{16}{7};\ \tfrac{20}{9};\ \tfrac{24}{11};\ \tfrac{28}{13};\ \text{etc.}$$

qui numeri negatiue ſumti dant notos illos integrabilitatis caſus aequationis $dz + zzdx + ccx^{-2m-2}dx = 0$, pro qua eſt generatim $z = \frac{dy}{ydx}$.

79. Quo haec integralia facilius aſſignare queamus, ponamus in genere $m = \frac{1}{i}$; eruntque noſtri coefficientes:

$$A = \frac{1 - ii}{8ic}$$

$$B = \frac{(1 - ii)(9 - ii)}{8.16\, iicc}$$

$$C = \frac{(1 - ii)(9 - ii)(25 - ii)}{8.16.24\, i^3 c^3}$$

$$D = \frac{(1 - ii)(9 - ii)(25 - ii)(49 - ii)}{8.16.24.32.\, i^4 c^4}$$

$$E = \frac{(1 - ii)(9 - ii)(25 - ii)(49 - ii)(81 - ii)}{8.16.24.32.40.\, i^5 c^5}$$

etc.

Pro

Pro quolibet ergo caſu aſſignato integrale completum vtriusque aequationis $x^{2m+2}ddy+ccydx^2=0$ et $dz+zzdx+ccx^{-4m-2}dx=0$ non difficulter colligetur.

Caſus I $(m=-1)$

$$ddy+ccydx^2=0 \text{ et } dz+zzdx+ccdx=0,$$

erit integrale completum:

$$y=k\,\text{ſin.}(\theta-cx) \text{ et } z=\frac{dy}{ydx}=\frac{-c\,\text{coſ.}(\theta-cx)}{\text{ſin.}(\theta-cx)}$$

Caſus II $(m=+1)$

$$x^4ddy+ccydx^2=0 \text{ et } dz+zzdx+ccx^{-4}dx=0,$$

erit integrale completum:

$$y=kx\,\text{ſin.}(\theta+\tfrac{c}{x}), \text{ et } z=\frac{dy}{ydx}=\frac{1}{x}-\frac{c}{xx}\cot(\theta+\tfrac{c}{x})$$

Caſus III $(m=-\frac{1}{3})$

$$x^{\frac{4}{3}}ddy+ccydx^2=0;\text{ et } dz+zzdx+ccx^{-\frac{4}{3}}dx=0,$$

erit integrale completum:

$$y=kx^{\frac{1}{3}}(\text{ſin.}(\theta-3cx^{\frac{1}{3}})-\tfrac{1}{3c}x^{-\frac{1}{3}}\text{coſ.}(\theta-3cx^{\frac{1}{3}}))$$

ſeu $y=k(x^{\frac{1}{3}}\text{ſin.}(\theta-3cx^{\frac{1}{3}})-\frac{1}{3c}\text{coſ.}(\theta-3cx^{\frac{1}{3}}))$

Caſus IV $(m=+\frac{1}{3})$

$$x^{\frac{8}{3}}ddy+ccydx^2=0 \text{ et } dz+zzdx+ccx^{-\frac{8}{3}}dx=0,$$

erit integrale completum:

$$y=kx^{\frac{2}{3}}(\text{ſin.}(\theta+3cx^{-\frac{1}{3}})+\tfrac{1}{3c}x^{\frac{1}{3}}\text{coſ.}(\theta+3cx^{-\frac{1}{3}}))$$

Caſus V $(m=-\frac{1}{5})$

$$x^{\frac{8}{5}}ddy+ccdx^2=0 \text{ et } dz+zzdx+ccx^{-\frac{8}{5}}dx=0,$$

erit integrale completum:

$$y=kx^{\frac{2}{5}}((1-\tfrac{3}{25cc}x^{-\frac{2}{5}})\text{ſin.}(\theta-5cx^{\frac{1}{5}})-\tfrac{3}{5c}x^{-\frac{1}{5}}\text{coſ.}(\theta-5cx^{\frac{1}{5}}))$$

Caſus VI ($m = +\frac{1}{5}$)

$$x^{\frac{12}{5}} ddy + ccy dx^2 = 0; \text{ et } dz + zzdx + ccx^{-\frac{12}{5}} dx = 0,$$

erit integrale completum

$$y = kx^{\frac{3}{5}}((1 + \frac{3}{25cc}x^{\frac{2}{5}}) \text{ſin.} (\theta + 5cx^{-\frac{1}{5}} + \frac{3}{5c}x^{\frac{1}{5}} \text{coſ.} (\theta + 5cx^{-\frac{1}{5}}))$$

Caſus VII ($m = -\frac{1}{7}$)

$$x^{\frac{12}{7}} ddy + ccy dx^2 = 0; \text{ et } dz + zzdx + ccx^{-\frac{12}{7}} dx = 0$$

erit integrale completum:

$$y = \begin{cases} + kx^{\frac{8}{7}}(1 - \frac{3 \cdot 5}{7^2 cc} x^{-\frac{2}{7}}) \text{ſin} (\theta - 7cx^{\frac{1}{7}}) \\ - kx^{\frac{3}{7}}(\frac{2 \cdot 8}{7c} x^{-\frac{1}{7}} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{7^3 c^3} x^{-\frac{3}{7}}) \text{coſ.} (\theta - 7cx^{\frac{1}{7}}) \end{cases}$$

Caſus VIII ($m = +\frac{1}{7}$)

$$x^{\frac{16}{7}} ddy + ccy dx^2 = 0; \text{ et } dz + zzdx + ccx^{-\frac{16}{7}} dx = 0,$$

erit integrale completum:

$$y = \begin{cases} + kx^{\frac{4}{7}}(1 - \frac{3 \cdot 5}{7^2 c^2} x^{\frac{2}{7}}) \text{ſin.} (\theta + 7cx^{-\frac{1}{7}}) \\ + kx^{\frac{4}{7}}(\frac{2 \cdot 3}{7c} x^{\frac{1}{7}} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{7^3 c^3} x^{\frac{3}{7}}) \text{coſ.} (\theta + 7cx^{-\frac{1}{7}}) \end{cases}$$

Caſus IX ($m = -\frac{1}{9}$)

$$x^{\frac{16}{9}} ddy + ccy dx^2 = 0 \text{ et } dz + zzdx + ccx^{-\frac{16}{9}} dx = 0,$$

erit integrale completum:

$$y = \begin{cases} + kx^{\frac{4}{9}}(1 - \frac{9 \cdot 5}{9^2 c^2} x^{-\frac{2}{9}} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{9^4 c^4} x^{-\frac{4}{9}}) \text{ſin.} (\theta - 9cx^{\frac{1}{9}}) \\ - kx^{\frac{4}{9}}(\frac{10}{9c} x^{-\frac{1}{9}} - \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{9^3 c^3} x^{-\frac{3}{9}}) \text{coſ.} (\theta - 9cx^{\frac{1}{9}}) \end{cases}$$

Caſus X ($m = +\frac{1}{9}$)

$$x^{\frac{20}{9}} ddy + ccy dx^2 = 0; \text{ et } dz + zzdx + ccx^{-\frac{20}{9}} dx = 0,$$

erit

erit integrale completum:

$$y = \begin{cases} +kx^{\frac{5}{9}}\left(1 - \frac{9\cdot5}{9^2c^2}x^{\frac{2}{9}} + \frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{9^4c^4}x^{\frac{4}{9}}\right)\text{ſin.}\left(\theta + 9cx^{-\frac{1}{9}}\right) \\ +kx^{\frac{5}{9}}\left(\frac{10}{9c}x^{\frac{1}{9}} - \frac{3\cdot5\cdot7}{9^3c^3}x^{\frac{3}{9}}\right)\text{coſ.}\left(\theta + 9cx^{-\frac{1}{9}}\right) \end{cases}$$

Caſus XI $(m = -\frac{1}{11})$

$$x^{\frac{20}{11}}ddy + ccydx^2 = 0; \text{ et } dz + zzdx + ccx^{-\frac{20}{11}}dx = 0,$$

erit integrale completum:

$$y = \begin{cases} +kx^{\frac{5}{11}}\left(1 - \frac{21\cdot5}{11^2c^2}x^{-\frac{2}{11}} + \frac{3\cdot5\cdot7\cdot9}{11^4c^4}x^{-\frac{4}{11}}\right)\text{ſin.}\left(\theta - 11cx^{\frac{1}{11}}\right) \\ -kx^{\frac{5}{11}}\left(\frac{15}{11c}x^{-\frac{1}{11}} - \frac{4\cdot3\cdot5\cdot7}{11^3c^3}x^{-\frac{3}{11}} + \frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9}{11^5c^4}x^{-\frac{5}{11}}\right)\text{coſ.}\left(\theta - 11cx^{\frac{1}{11}}\right) \end{cases}$$

Caſus XII $(m = +\frac{1}{11})$

$$x^{\frac{24}{11}}ddy + ccydx^2 = 0; \text{ et } dz + zzdx + ccx^{-\frac{24}{11}}dx = 0,$$

erit integrale completum:

$$y = \begin{cases} +kx^{\frac{6}{11}}\left(1 - \frac{21\cdot5}{11^2c^2}x^{\frac{2}{11}} + \frac{3\cdot5\cdot7\cdot9}{11^4c^4}x^{\frac{4}{11}}\right)\text{ſin.}\left(\theta - 11cx^{-\frac{21}{11}}\right) \\ +kx^{\frac{6}{11}}\left(\frac{15}{11c}x^{\frac{1}{11}} - \frac{4\cdot3\cdot5\cdot7}{11^3c^3}x^{\frac{3}{11}} + \frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9}{11^5c^5}x^{\frac{5}{11}}\right)\text{coſ.}\left(\theta + 11cx^{-\frac{1}{11}}\right) \end{cases}$$

Caſus XIII $(m = -\frac{1}{13})$

$$x^{\frac{24}{13}}ddy + ccydx^2 = 0; \text{ et } dz + zzdx + ccx^{-\frac{24}{13}}dx = 0,$$

erit integrale completum:

$$y = \begin{cases} +kx^{\frac{6}{13}}\left(1 - \frac{6\cdot5\cdot7}{13^2c^2}x^{-\frac{2}{13}} + \frac{5\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9}{13^4c^4}x^{-\frac{4}{13}} + \frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11}{13^5c^5}x^{-\frac{6}{13}}\right)\text{ſin}\left(\theta - 13cx^{\frac{1}{13}}\right) \\ -kx^{\frac{6}{13}}\left(\frac{3\cdot7}{13c}x^{-\frac{1}{13}} - \frac{4\cdot5\cdot7\cdot9}{13^3c^3}x^{-\frac{3}{13}} + \frac{3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11}{13^5c^5}x^{-\frac{5}{13}}\right)\text{coſ.}\left(\theta - 13cx^{\frac{1}{13}}\right) \end{cases}$$

Caſus XIV $(m = +\frac{1}{13})$

$$x^{\frac{28}{13}}ddy + ccydx^2 = 0; \text{ et } dz + zzdx + ccx^{-\frac{28}{13}}dx = 0,$$

erit integrale completum:

$$y = \begin{cases} +kx^{\frac{7}{13}}\left(1 - \frac{6\cdot5\cdot7}{13^2c^2}x^{\frac{2}{13}} + \frac{5\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9}{13^4c^4}x^{\frac{4}{13}} - \frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11}{13^5c^5}x^{\frac{6}{13}}\right)\text{ſin.}\left(\theta + 13cx^{-\frac{1}{13}}\right) \\ +kx^{\frac{7}{13}}\left(\frac{3\cdot7}{13c}x^{\frac{1}{13}} - \frac{4\cdot5\cdot7\cdot9}{13^3c^3}x^{\frac{3}{13}} + \frac{3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11}{13^5c^5}x^{\frac{5}{13}}\right)\text{coſ.}\left(\theta + 13cx^{-\frac{1}{13}}\right). \end{cases}$$

Ex

Ex his autem ſingulis valoribus ipſius y eruitur valor ipſius $z = \frac{dy}{y\,dx}$.

80. Quod ad ordinem coefficientium in his expreſſionibus attinet, is facillime perſpicitur, ſi numeri impares pro i ſubſtituendi diſtinguantur, prout ſint formae vel $4n+1$, vel $4n-1$:

I. Ita ſi ſit $m = \frac{1}{4n+1}$ ſeu $i = 4n+1$, erit

$$A = \frac{n}{1} \cdot \frac{(2n+1)}{ic}$$

$$B = \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{(2n-1)(2n+1)}{i^2 c^2}$$

$$C = \frac{(n-1)n(n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}{i^3 c^3}$$

$$D = \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{(2n-3)(2n-1)(2n+1)(2n+3)}{i^4 c^4}$$

$$E = \frac{(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \frac{(2n-3)(2n-1)(2n+1)(2n+3)(2n+5)}{i^5 c^5}$$

etc.

II. Si ſit $m = \frac{1}{4n-1}$, ſeu $i = 4n-1$, erit

$$A = \frac{n}{1} \cdot \frac{(2n-1)}{ic}$$

$$B = \frac{(n-1)n}{1 \cdot 2} \cdot \frac{(2n-1)(2n+1)}{i^2 c^2}$$

$$C = \frac{(n-1)n(n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{(2n-3)(2n-1)(2n+1)}{i^3 c^3}$$

$$D = \frac{(n-2)(n-1)n(n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{(2n-3)(2n-1)(2n+1)(2n+3)}{i^4 c^4}$$

$$E = \frac{(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \frac{(2n-5)(2n-3)(2n-1)(2n+1)(2n+3)}{i^5 c^5}$$

etc.

THERMO-

THERMOMETRI METALLICI DESCRIPTIO.

Auctore
I. E. ZEIHERO.

Exſtat in machinarum phyſicarum theſauro Illuſtriſſimi Comitis *de Loeſer*, Saxoniae Mareſchalli haereditarii, artium mechanicarum magni promotoris, thermometrum metallicum, quod ipſe quidem nunquam vidi, cuius autem egregia ſtructura ex amici cuiusdam deſcriptione mihi innotuit: praemittere hanc non incongruum fore iudicaui, priusquam ipſam inuenti mei deſcriptionem aggrediar, quum poſterius inſtrumentum in priori ſit fundatum.

Thermometrum autem Loeſerianum e quatuor parallelepipedis, ſeu prismatibus quadrangularibus, vel e ſtanno puro, vel plumbo mixto, confectis, AB, DE, GH, KL compoſitum eſt, quorum quodlibet longitudine pedem Pariſinum parum ſuperat, ſecundum latitudinem autem et craſſitiem quatuor lineas circiter adaequat. Prisma AB extremitate A fundo XY verticali ſitu eſt affixum, altera autem extremitate B cum extremitate ſuperiore D, alterius prismatis DE, ſitu verticali deſcendentis, vecte mediante aurichalceo BCD ita connectitur, vt motus circa puncta HIK fieri poſſit. Axis C receptaculi parieti eſt affixus. Alterius prismatis extremitas E cum tertii prismatis GH extremitate G, pari modo ope vectis EFG, cuius axis F alteri parieti eſt affixus, con- Tab. IV. Fig. 1.

 iun-

iungitur, aeque ac extremitates HK cum vecte HIK conne- ctuntur Quarti prismatis KL extremitas L mediante clauo rotundo Z, in furcae ML rimam ſeſe inſinuante, rotam vrget dentatam NOP, quae aliam minorem Q, cui applicita eſt, circummouet; quo fit, vt index poſteriori affixus, diuiſiones in limbo STV factas denotet. E ſtructura huius inſtrumenti elucet, ſenſibilitatem eius a brachiorum vectium inaequalitatis ratione maxime pendere. Ponamus enim, prisma primum a calore vel frigore quantitate q mutari, et rationem inter vectis crura eſſe vt 1 ad 3, tunc cruris maioris extremitas cum prismate ſecundo connexa, ſpatium percurret $= 3q$, per conſequens prisma ſecundum protrudetur $3q$, quod, quoniam pari modo a calore vel frigore mutabitur quantitate q, vectem ſecundum, qui ſecundum et tertium prisma coniungit, vrgebit $4q$; hic autem tertium prisma $4q \cdot \frac{3}{1} = 12q$; tertium porro prisma tertium vectem $13q\,\frac{3}{1} = 39q$: conſequenter ſpatium ab extremitate L prismatis quarti percurſum, erit $39q + q = 40q$. Vt autem formulam generaliorem eruamus, rationem inter vtraque crura ſupponere licet, vti m ad n, vbi m cruris maioris, n vero minoris longitudinem denotat: obtinebimus tunc

pro prism. 1. q

2. $q + \frac{qm}{n} = q\left(\frac{n+m}{n}\right)$

3. $q + \frac{m}{n}\left(\frac{qn+qm}{n}\right) = q\left(\frac{n^2+mn+m^2}{n^2}\right)$

4. $q + \frac{m}{n}\left(\frac{q+qn^2+qmn+qm^2}{n^2}\right) = q\left(\frac{n^3+mn^2+m^2n+m^3}{n^3}\right)$

5. $q\left(\frac{n^4+mn^3+m^2n^2+m^3n+m^4}{n^4}\right)$

6. $q\left(\frac{n^5+mn^4+m^2n^3+m^3n^2+m^4n+m^5}{n^5}\right)$.

Quum

Quum inuentum hoc aptiſſimum mihi viſum ſit ad inſtituenda experimenta, qualia thermometrorum huc vsque vſitatorum auxilio inſtitui plane nequeunt: non dubito, fore vtile, ſi peculiarem et nouam eiusmodi inſtrumenti deſcribam conſtructionem a me excogitatam, cuius imperfectiones, quibus adhuc forſan laborat, reiterata experimenta, cum hoc ipſo inſtituta, in totum tollent. Thermometrum vero hoc metallicum eum in finem componere conatus ſum, vt partim puncta duo conſtantia in eodem determinare, partim caloris gradus, mercurii ebullientis gradum longe ſuperantes, nec non frigus illud, quo fluidum iſtud metallicum ipſum coit, metiri queamus: cui fini ſequens conſtructio ſatisfaciet.

Tab. IV. Fig. 2.

Conficiatur lamina ferrea ABCD, ac prismata quadrangularia E, F, G, H, I, K, ex argento, quorum primum E ad L bis incuruatum, mediante cochlea *a*, firmetur ad laminam modo nominatam ABCD. Ad *xy* exſcindatur crena, cuius vſus inferius patebit; eidem cochlea *a* imponatur. Altera extremitas *b* cum vecte *bc* articuli ope connectatur, pari modo ac prismatum F, G, H, I, K, extremitates cum vectium extremitatibus *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, *i*, *k*, *l*, *m*. Vectium axes *o*, *o*, *o* . . . etc. laminae ferreae infigantur vna extremitate, altera autem vectibus inſerantur, ita quidem, vt circa illos commouere ſeſe queant. Vltimi vectis crus maius *on* indicis munere fungitur cuſpidis ope *n*, diuiſiones in limbo A B factas denotantis. Hunc limbum ex aurichalco comparare oportet, vt diuiſiones eo melius ac commodius in

eodem deſignari poſſint. Ad partem laminae ferreae inferiorem CDPQ operculum RS affigatur mediantibus cochleis, eo modo, vt ſpatium, in quo priſmata vna cum vectibus ſuis ſunt contenta, accurate claudatur, excepto loco PQ, qui apertus remaneat, vt index commoueri queat.

Si quis inſtrumentum in metallum quoddam liquefactum immergere velit, capſula CDPQ ad craſſitiem vnius circiter lineae vsque luto obducatur, non tantum ad metalli liquidi introitum impediendum, verum etiam ad omne, quod capſula alias pati poſſet, detrimentum auertendum. Lutum hoc, experimentis factis, pro lubitu iterum tollitur. Quodſi vero circa frigus artificiale experimenta ſint inſtituenda, thermometri capſula vernice calida, ex lini oleo et pice confecta, eſt obducenda, ne metallum ab acida mixtione, in quam immergitur, corrodatur.

Thermometrum Loeſerianum priſmatibus conſtat e ſtanno confectis; quod metallum ad obſeruationes meteorologicas inſtituendas aptiſſimum eſt, quia mutationem prae reliquis omnium patitur maximam. Quia vero idem ſub leui caloris gradu liqueſcit, et per conſequens experimentis pyrometricis inſtituendis non convenit, argentum elegi, quod et difficillime liqueſcit, et ratione mutationis, quam a calore vel frigore patitur, ad ſtannum ſeu plumbum proxime accedit; vti ex Cel. *Bougueri* experimentis, Quitoae factis (*), notum

(*) Vid. Memoires de l'Acad. de Sc. ad an. 1743. p. 230. etc. Cum ſtanno ipſo quidem Cel. Vir experimenta non fecit; interim quum Cel. *Muſchenbroek* (*vid Tent. Acad del Cimento* P. II. p. 22.) nullum notabile diſcrimen inter plumbum et ſtannum deprehenderit, vnum pro altero ſubſtituere nullus dubito.

tum eſt. Experimenta enim haec multoties repetita Cel. Virum docuere, hexapedam Pariſinam a niuis frigore ſeu congelatione, ad ebullitionem vſque, in ferro ad $\frac{47}{100}$, in auro $\frac{63}{100}$, in argento $\frac{81}{100}$, in plumbo $\frac{90}{100}$ lin. pedis Pariſ. increſcere.

Quodſi igitur aſſumamus, longitudinem prismatis inter vtrumque articulum eſſe 18 lin. id a congelatione ad ebullitionem vſque ad $\frac{81}{4800}$ lin. extendetur; ponamus porro, rationem inter vectis crura eſſe vti 1 ad 3, habebimus pro ſpatio a vectis *o l* crure percurſo, ſubſtitutis in formula generali $\left(\frac{mn^4+m^2n^3+m^3n^2+m^4n+m^5}{n^5}\right)q$ valoribus in caſu hoc ſpeciali aſſumtis $\frac{(3+9+27+81+243)}{4800}\times 81 = \frac{29403}{4800}$, ſeu diuiſione peracta, $6\frac{1}{8}$ fere lineas. Spatium hoc quinti vectis *o l* extremitas *l* percurrere deberet, niſi lamina ferrea, cui axes vectium ſunt infixi, ipſa volumine ſuo increſceret. Quum vero hoc incrementum in ferri fruſtulo $1\frac{1}{2}$ poll. longo $\frac{47}{4800}$ lin. efficiat, incrementum relatiuum $\frac{81-47}{4800}=\frac{34}{4800}$ lin. inuenitur; quod pro *q* ſubſtitui debet, ſi ſpatium extremitate *l* vere percurſum quaeramus: calculo autem vti ſupra peracto, $2\frac{1}{2}$ lin. attinget. Ad vltimi prismatis incrementum quod attinet, quum $\frac{1}{288}$ lineae non excedat, negligi poteſt. Denique ſi rationem inter indicis crura ſupponamus vti 12 ad 1, extremitas *n* ſpatium percurret $2\frac{1}{2}$ poll. a congelationis puncto ad gradum vſque ebullitionis aquae: id quod in explorandis inſignibus caloris vel frigoris gradibus abunde ſufficiet; immo in caſibus quibusdam *e.g.* vbi gradus menſurandi, ſpatium,

ebullitionis et congelationis punctis incluſum, aliquoties excurrunt, $2\frac{1}{2}$ poll. nimium erunt.

Suppoſuimus in formula incrementorum ſuperius inuenta, priſmata ſemper vrgeri a vectibus ſecundum directionem eandem, ac inter ſe manere parallela; id quod in eo tantum caſu locum habet, in quo vectes ſatis ſunt magni, ac per conſequens arcus ab iisdem deſcriptus ratione radii deſcribentis valde exiguus, vti id ipſum in inſtrumento ad obſeruationes meteorologicas adaptato re vera obtinet. Quum autem in inſtrumento, gradibus permagnis caloris vel frigoris explorandis inſeruituro, vectes neceſſario ſatis parui euadant, ac vectis vltimi extremitas arcum octauam circuli partem ſuperantem nonnunquam percurrere cogatur, inaequalitates ab hinc ortas fore valde ſenſibiles, hincque non
Tab. IV. Fig. 3. negligendas eſſe per ſe patet. Sit enim AD vectis vltimi crus maius, AK priſma cum indicis crure minori IL coniunctum, ſintque, ne res nimis complicetur, AD, AK, KL, inter ſe aequales; moueatur porro A ad B, et punctum K transferatur ad H, elucebit tunc, arcum AB maiorem eſſe arcu KH. Cum enim ſinus $IH = EG - FG$, EG autem $= CB$, ſinus $IH <$ erit ſin. CB; quo ſimul conſpicitur, differentias ſinuum CB et IH eo magis creſcere, quo magis creſcit arcus AB. Quodſi itaque ſpatium, quod punctis congelationis atque ebullitionis aquae includitur, a crure AD percurſum, non ſit arcus ratione radii AD valde exiguus e. g. circuli pars vigeſima, ſpatia aequalia intermedia, puncto A deſcripta, tanquam partes aequales

les in ſcala aſſumi haud poſſunt; ſed ſecundum legem, qua decreſcunt, in eadem deſignanda ſunt: id quod methodo ſequenti mechanica optime fieri poſſe arbitror.

Supinetur in niuem, ſeu glaciem contuſam, thermometrum, huicque permaneat immerſum, donec ad congelationis punctum circiter refrixerit; quo facto, mediante cochlea a, per rimam *x y* inſerta, tam priſmata quam vectes collocentur in ſitum, in figura repraeſentatum; affigatur dein operculum laminae C D P Q, omniaque bene claudantur; punctum denique accuratius quaeratur methodo vulgari, nec non punctum aquae ebullientis. Ducantur in charta lineae AD, AK, KL, et quidem ita, vt L K, quae crus indicis repraeſentat minus, aequalis ſit cruri indicis maiori *mn*, reliquae autem ſint proportionatae eidem quod repraeſentant; nempe L K crus indicis minus *mo*, AK priſma *lm*, et AD vectis crus maius *o l*. Tunc deſcribatur radio LK arcus K H, et arcus K M aequalis fiat arcui *n p*, qui ſpatium inter congelationem et ebullitionem denotat; porro AK transferatur ad MN, ſic AN erit circuli pars, quam A D eodem tempore, quo *n* mouebatur ad *p*, deſcripſit. Arcus AN diuidatur in tot partes aequales, quot cuilibet ſcalae congruunt; ſcilicet in 15, ſi Delisliana iſta ſit: non enim opus eſt, vt mediante hac methodo ſingulatim denotentur gradus; quippe qui poſtea interponi commode queunt. Diuiſione ad A N facta, ſingulis punctis circini crus imponatur, et altero, ſpatio AK a priori diſtante, diſſecetur arcus K M in tot partes, quot diuiſiones ad A N factae Fig. 3.

ſactae ſunt, haeque in ſcalae arcum transponantur. Arcus autem A N in N B transferatur, ex D reſecetur H, ac operatio modo deſcripta repetatur, et ſpatium a Zero ad gradum vsque 150 *Delislianum* ſupra punctum ebullitionis diuiſum obtinebitur: ſic denuo repeti poteſt operatio infra et ſupra puncta conſueta, prouti res illud poſtulant.

Supereſt, vt diſquiramus, an contractionis vel extenſionis inaequalitas, quam vtrumque indicis crus pati poteſt, ſi thermometri capſula immergitur vsque ad P Q, quum e contrario pars A B P Q relinquitur libera, ſit negligenda, nec ne? Ponamus itaque, crus *mo* eſſe 1 poll. hexapedam vero pariſinam ferream a niuis frigore ad aquae ebullitionem vsque $\frac{47}{100}$ lin. increſcere, vt ex praecedentibus patet; per conſequens pollicis vnius incrementum aequale erit $\frac{47}{7200}$ lin. quod $\frac{1}{1838}$ longitudinis cruris integri *m o* non excedit; differentia itaque exorietur in ſpatio 150 graduum *Delislianorum* $\frac{1}{1838}$, poſito effectu caloris vel frigoris ad *o* penitus euaneſcente. Quia autem ſenſu ſtrictiori hoc locum non habet, quoniam effectus in ratione diſtantiarum duplicata tantum euaneſcit, variatio inde exoriunda inſuper etiam minor erit, et conſequenter plane negligi poterit.

Quum taedioſum ſit, immo interdum impoſſibile, in obſeruandis caloris gradibus permagnis, indicis apicem oculis perſequi, ſummumque denotare gradum, ad *n* clauus exacutus, ac elatere *q* inſtructus, cochlearum *ſ*, *ſ*, ope affigatur, limbusque fuligine obducatur; ſic ille, indice ſeſe mouente, ſemitam deſcribet, cuius punctum

punctum extremum gradum indicabit ſummum. Hoc commodo etiam vti poſſumus abſentes, in obſeruandis ſummis atmoſphaerae noſtrae gradibus, tam caloris, quam frigoris, ſi loco claui chalybei ſtylum e ceruſſa confectum infigamus, limbumque papyro obducamus; qua praerogatiua thermometra vulgaria plane carent: quamuis enim in hunc finem conſtructiones eorum variae ſint excogitatae, idem tamen longe facilius thermometro metallico obtinebitur.

THERMOMETRORVM, PVNCTIS CONSTANTIBVS GAVDENTIVM, EMENDATIO.

Auctore
I. E. ZEIHERO.

Quum taedioſum valde ſit, tantos labores et ſumtus ad perficiendas ſcalas metallicas, bulbo vitreo fracto, fruſtra impendiſſe: non incongruum fore iudicaui, artificium proponere, malo huic auertendo idoneum, ſequens:

Elaboretur bulbus ferreus AB, fundo B cochlea caua inſtructus, et ad collum A perforatus. Cochleae cauae B adaptetur cochlea ſolida F, bulbo AB non modo claudendo, ſed bulbi ſpatio DE etiam augendo, vel diminuendo, inſeruiens. Colli foramini imponatur tubulus vitreus DC, ac lithocolla firmetur, ita, vt prae fornice D non promineat, ſed extremitate ſua inferiore ſuperficiem fornicis iuſto attingat.

Tab IV. Fig. 4.

E deſcriptione huius bulbi, ſeu cylindri, euidenter elucet, eum ita comparatum eſſe, vt eiusdem ope ſpatium inter punctum ebullitionis et congelationis, determinatae magnitudinis ſemper obtineri poſſit. Ponamus enim, ſpatium inter duos terminos conſtantes maius eſſe ſpatio dato, ſtatim hoc diminui poterit diminuendo bulbi ſpatium DE; ſi nimirum cochlea F fornicem D verſus protrudatur, et vice verſa.

Quodſi nunc caſu fortuito diffractum fuerit thermometrum, cylindro modo deſcripto ferreo, vel etiam bulbo

bulbo vitreo communi, inſtructum, ac deſideretur pro ſcala relicta, elegantiſſime elaborata, nouum thermometrum, cuius ratio bulbi ad tubulum eadem ſit, ac in priori, cuiusque puncta fixa cum ſcalae punctis coincidant: eligatur tubulus, cuius diameter diametro prioris circiter aequalis ſit; infigatur lithocollae ope in bulbi ferrei collum A, tuncque cylindrus AB ac aliqua tubuli pars repleatur mercurio, et claudatur mediante cochlea F. Notandum autem hic eſt, ſpatium *a* duplicem ob finem annulis chartaceis repleri debere; partim vt, cochlea F fortiſſime conſtricta, penitus mercurio praecludatur exitus; partim vt, annulorum numero pro lubitu aucto, vel diminuto, ſpatium DE vel augeri, vel diminui poſſit.

Thermometro iam repleto, determinetur vtrumque punctum, ebullitionis nempe ac congelationis, et comparetur thermometri noui ſpatium cum ſpatio in ſcala relicta deſignato. Si prius e. g. maius inuenitur poſteriore, cochlea F ſoluta, vnus, vel duo, tresue annuli chartacei demantur; quo facto, cochlea F iterum immittatur, firmiter contorqueatur, denuoque ſcala comparetur, donec vnum cum altero ſpatio coincidat. Si autem ſpatium nouum minus ſit ſpatio in ſcala deſignato, annuli addantur, et ſic porro.

Spatio modo deſcripto priori facto aequali, nihil aliud ſupereſt, quam curare, vt tubulus iuſta mercurii quantitate repleatur, ne puncta fixa, aut nimis altum, aut nimis profundum, in ſcala obtineant ſitum: id quod, vnam vel alteram mercurii guttulam, vel demendo, vel addendo, facillime perficitur.

EMENDATIO
MICROSCOPII SOLARIS.

Auctore

F. V. T. AEPINO.

Qui de microſcopio ſolari, atque laterna magica, repraeſentationi obiectorum non diaphanorum ſeu opacorum apta, cogitauit, primus ſine dubio eſt Ill. *Eulerus*, cuius Diſſertatio, ſub titulo: *Emendatio Laternae magicae et Microſcopii ſolaris*, inſerta *nouorum Commentariorum Academiae noſtrae Tomo III*, incommoda et vitia vtriusque inſtrumenti recenſet, atque commonſtrat, pleraque exinde oriri, quod obiecta, non in ea parte, quae lenti refringenti eſt obuerſa, ſed in altera parte, auerſa nempe, illuminantur, vnde hic praecipue oritur defectus, quod vulgari more conſtructa microſcopia ſolaria, aut laternae magicae, exhibendis obiectis non pellucidis, omnino ſint inepta

Vir ad Opticam excolendam natus, Celeberrimus *Lieberkühn*, ſuam non deſiderari paſſus eſt diligentiam, in perficiendo inſtrumento, cuius inuentor eſt. Poſtquam nempe *Eulerus* laternam magicam, opacis obiectis depingendis idoneam, felici cum ſucceſſu conſtrui fecerat, *Lieberkühnius* etiam microſcopium ſolare imaginatus eſt, atque confecit, quod obiecta non pellucida repraeſentaret. Teſtis ſum huius rei fide dignus, qui non ſolum ex Viri integerrimi ore hoc accepi, ſed ipſum quoque inſtrumentum manibus contrectaui. Mirabun-

gabuntur forte Lectores, meam aut hebetudinem, aut negligentiam, quod nihilominus, ignorare me penitus, qualis fuerit inſtrumenti conſtructio, fatear, nilque amplius aſſerere valeam, niſi, quantum ex adſpectu nudo iudicari potuit, non habuiſſe ipſum aliquid, cum conſueti microſcopii ſolaris ſtructura, commune. Aſt ſciant hi, vidiſſe me inſtrumentum paucis ante Viri deſideratiſſimi praematuram mortem ſeptimanis, ingruente nocte, ipſo eo momento, quo relinquens *Lieberkühnium*, domum reuerti volebam, atque diſtuliſſe me, conſulente Ipſo Celeberrimo Viro, et effectuum, et ſtructurae inſtrumenti examen, in aliam diem. Quo minus vero humaniſſimae *Lieberkühnii* inuitationi morem gerere, meamque ſatiare potuerim auiditatem, impediuit, in quem protinus incidebat Vir Celeberrimus, morbus, qui fatalis ipſi fuit. Supereſt proinde ſine dubio, in eo, quem reliquit inſtrumentorum opticorum theſauro, *Lieberkühnius*, et hocce, cuius, cum nulla, quod ſciam, deſcriptio publice hactenus exſtet, a Viro autem Celeberrimo, qui nil moliebatur inepte, non niſi egregia ſperanda ſint, rogandi omnino ſunt ipſius haeredes, vt erudito orbi deſcriptionem microſcopii huius impertiri velint.

Cum proinde in microſcopium ſolare, obiectis opacis aptum, aequum ius habeant Celeberrimi Viri *Eulerus* et *Lieberkühnius*, ac pro inuentoribus procul dubio habendi ſint, quam hic propono, microſcopii ſolaris emendationem, (etſi et haec, ad repraeſentanda obiecta pelluciditate carentia, aptum reddat hoc inſtrumentum) non ea mente trado,

 quaſi

quaſi microſcopii ſolaris, obiecta opaca depingentis, primam mihi adſcribere ideam, velim.

Sunt plures, qui poſſident microſcopia ſolaria, vulgari more conſtructa, hisque gratiſſimum erit ſine dubio, ſi viam ipſis commonſtrem, quomodo ſeruato toto huius inſtrumenti apparatu, ita adaptare iſtud facile queant, vt obiectis opacis depingendis idoneum euadat, iungendo ſolummodo ipſi machinulam, hic a me deſcribendam, paucos exigentem ſumtus, ac ita ſimplicem, vt a rudiori quouis, inſtrumentis mathematicis parandis modice adſueto opifice, conſtrui facile queat.

Cum non niſi, quae recenſui, praeſtare animus ſit, neque *Eulerum*, neque *Lieberkühnium*, neque tandem (quod, ne iniurius ſim in Clariſſ. Collegam, reticere nequeo) Celeb. *Zeiherum*, laedere mihi videor. Etſi nempe quoque poſtremus hic, iam ex aliquo tempore, de conſtruendo microſcopio ſolari, obiecta opaca depingente, cogitauerit, atque duplicem eiusmodi inſtrumenti conſtructionem imaginatus ſit, non tamen neque *Ipſe*, neque *Lieberkühnius* id ſibi propoſitum habuerunt, quod ego, vt vulgare microſcopium ſolare ad finem huncce adaptarent.

Antequam ipſam inſtrumenti mei deſcriptionem aggrediar, generales quasdam, microſcopium ſolare, opaca obiecta depingens, ſpectantes annotationes afferre mihi liceat. Notabile primum accidit, quod picturae, a microſcopio tali formatae, tanta gaudeant venuſtate, quae verbis exprimi difficulter queat. Obſtupui fere ad primum adſpectum; non enim picturam, non imaginem

ginem, ſed rem ipſam conſpicere mihi videbar, incantationis quaſi ope in prodigioſam molem adauctam.

Quae perfectionis huius cauſa ſit, non ita difficulter concipitur, ac a duabus potiſſimum circumſtantiis pendere videtur, quarum altera ab Ill. *Eulero* annotata, altera vero neglecta eſt. Eſt poſterior haec, quod microſcopium ſolare, obiecta opaca depingens, depreſſiones ac eleuationes obiecti partium (*bas relief* vocare ſolent *Galli*) exprimat, quod quidem microſcopium, non niſi obiectis diaphanis aptum, praeſtare nunquam poſſe, in oculos facile incurrit. Deinde picturarum pulchritudo, prouti annotauit *Eulerus*, magnam quoque partem pendet exinde, quod a microſcopio obiecta opaca depingente productae imagines, non prouti iſtae, quas efformat vulgari modo conſtructum microſcopium, priſmaticis coloribus inquinatae ſint, quod quidem in poſteriori hocce, nullo artificio euitari poſſe, exinde facile patet, quoniam radii ſolis, obiectum tranſparens depingendum permeantes, neceſſario in colores reſoluuntur.

Quamuis autem microſcopium, opacis obiectis depingendis idoneum, imagines multo elegantiores ac vulgare producat, cedit tamen huic, quoad augmentationem, quam imaginibus conciliat. Liquet nempe ſine negotio, in microſcopio, transparentibus obiectis apto, omne fere lumen, quo illuſtratur obiectum, ad lentem obiectiuam pertingere; aſt in microſcopio, opaca obiecta depingente, incidens in obiectum lumen quaqua verſus diſpergitur, neque, niſi minima ipſius pars, in lenticulam incidit. Si ergo ponas, obiectum in

in vtroque microſcopio aequaliter illuminari, et imaginem ad aequalem vtrinque gradum amplificari, neceſſario, quae a poſteriori microſcopio efformatur imago, multo obſcurior erit, quam quae a priori producitur. Si itaque ſatis claras, ope microſcopii poſterioris, picturas obtinere voluerimus, neceſſe erit, vt amplificatione multo minori, quam quidem per vulgare microſcopium obtineri poteſt, contenti ſimus.

Videtur quidem facile huic defectui remedium inueniri poſſe; nulla enim alia re opus eſſe videtur, niſi vt maior lucis copia in obiectum coniiciatur, quam in vulgari microſcopio fieri ſolet, quod quidem, ope aut ſpeculorum, aut lentium, efficere, in poteſtate noſtra ſitum eſt: Aſt vereor nihilo minus, ne irriti ſint conatus iſti; vix enim fieri poſſe puto, vt multo maiori luce obiectum colluſtretur, ac in vulgari microſcopio fieri ſolet. Deſumuntur namque obiecta pro microſcopiis pleraque, aut ex vegetabili, aut ex animali regno, eiusmodi vero corpora calorem vehementiorem perpeti nequeunt, absque eo, vt aut comburantur, aut corrumpantur. Liquet autem, ſolis radios, pro intendenda lucis vi, in arctius ſpatium cogi non poſſe, absque eo, vt calor in eadem ratione augeatur, ac lucis energia. Dantur itaque certi limites, a natura praeſcripti, quos, ſi attingere, nunquam tamen tranſcendere, nobis licet.

Ipſum inſtrumentum a me inuentum, cuius ope microſcopium vulgare, depingendis obiectis opacis aptum reddo, ex binis laminis orichalceis circularibus, brachio prae-

praeditis, ac articulatione inter ſe iunctis, conſtat. Exhibet ipſarum primam, Fig. 1. et 2, alteram Fig. 3. et 4. Figura autem 6 ipſas ſiſtit, et inter ſe, et microſcopio debita ratione iunctas.

Partium iſtarum prior AB, Fig 1. et 2, ex anteriori parte afferruminatum gerit cylindrum cauum orichalceum *ab*, lineam circiter altum, cui exterius inciſa eſt cochlea mas, quae quidem cochlea inſeruit, iungendo inſtrumento meo, microſcopio, loco conſuetae lenticulae obiectiuae. Area circularis, ab hoc cylindro comprehenſa, duplici foramine pertuſa eſt; inferius, ſemicirculari *c*, cuius radius, radio areae aequalis; ſuperius, circulari *d*, cuius diameter diametri areae dimidia eſt (*). Poſteriori huic foramini inſeritur lens obiectiua *d*, quae in inſtrumento, quod nuper parari feci, focum habet, 5 aut 6 circiter linearum. Inferius annectitur huic parti articulatio A, cuius ope alteri parti, mox deſcribendae, iungitur, ſuperius vero brachium CB annexum gerit, verſus *e* perforatum, per quod foramen cochlea *fe*, Fig 6 tranſmittitur.

Secunda inſtrumenti pars, AB, Fig. 3. et 4, itidem circularis eſt, ſimilemque, ac prior, articulationem et brachium annexum habet. Anteriori ipſius ſuperficiei afferruminatum eſt ſpeculum planum *ab*, aut metallicum, aut vitreum, nihil enim refert, quale hoc

(*) Pro arcendis radiis, lentem iuſto obliquius permeantibus, conducit, vt a parte poſtica afferruminetur huic foramini tubulus orichalceus, eiusdem diametri cum foramine, $\frac{1}{2}$ aut $\frac{3}{4}$ poll. circiter longus.

hoc ſit. Speculum hoc in ſemicircularem elaboratum eſt figuram, ac tantae eſt magnitudinis, vt foramen ſemicirculare partis prioris, *c*, Fig. 1. et 2. exacte repleat Eo vero in ſitu iunctum eſt ſpeculum *ab*, laminae AC, vt ſpeculi atque laminae ſuperficies ſuperius conuergant parumper, atque inferius diuergant, angulo 15 circiter aut 20 graduum. Supra ſpeculum hoc, foramine elliptico *c*, quantum fieri poteſt magno, pertunditur lamina AC, cuius ellipſeos axis maior verticalis, coniugatus, horizontalis eſt.

Iunguntur hae partes, Fig. 6, AB, AC, ope articuli A, ita vt forcipis inſtar brachia aut iungi, aut ſeparari a ſe inuicem queant. Per foramina nempe *f* et i, tranſit cochlea mas *fe*, parumper incurua, cui aptata eſt cochlea foemina *hg*, alis inſtructa, inter brachia vero DB, EC, interſeritur elater *mn*, vnde, prouti cochlea *hg* aut adducitur, aut relaxatur, pars AB, aut ad alteram AC accedit, aut ab ipſa recedit, ſimul vero inclinatio ſpeculi, parti AB iuncti, pro lubitu variatur.

Qua ratione hoc inſtrumentum microſcopio iungatur, euidenter ſatis ex Fig. 6. intuitu patet. Eo enim loco, cui inſeri ſolet in microſcopio vulgari lenticula obiectiua, iungitur, cochleae *ab*, Fig. 1. 2. ope, ita vt brachia verticaliter ſint erecta. Quo vero, qua ratione in ipſo inſtrumenti vſu procedendum ſit, luculenter pateat, Fig. 7 contemplemur. Diriguntur nempe radii ſolis, a lente collectiua, anteriori microſcopii ſolaris parti inſerta, in conum collecti, ita, vt conus radiorum ſolarium *cdba* incidat in medium ſpe-

culi

culi *mn*. Laxando tum, aut adducendo, cochleam *gh*, ea concilietur ſpeculo *mn* inclinatio, vt repercuſſi ab ipſo radii, incidant in obiectum, ad *ef* ſitum, atque ita diſponatur microſcopium, vt, quantum fieri poteſt, diſtincta ſolis imago formetur ad *ef*. Ab illuminato hac ratione obiecto redeuntes radii, ac incidentes in lenticulam obiectiuam *k*, tranſeuntes per foramen ellipticum *rs*, in aliquot pedum diſtantia, ſuper tabula alba nitidiſſimam formant obiecti picturam.

Binae ad manus eſſe debent laminae, tales, qualem exhibet Fig. 5. ABCD, quibus affigi poſſunt obiecta, altera nigra, ex ebeno, altera alba, ex ebore conſtans, pro diuerſitate coloris obiecti depingendi. Glutine iungere ſoleo his laminis obiecta, docuit enim me experientia, picturae elegantiam valde turbari, ſi aut lamina vitrea, aut tenui Talci folio, prouti alias fieri ſolet, contegatur; multoque nitidiores haberi imagines, ſi nudum exponatur radiis ſolaribus obiectum. Lamina iſta ABCD ita introducitur inter laminas *pr*, *qs*, Fig. 6. *pqrs* Fig. 5, vt inferius foraminis circularis *abcd* dimidium *abc* apertum relinquatur, radiique ſolares *ab*, *cd*, Fig. 7, libere ad ſpeculum *mn* pertingere queant. Superius vero foraminis *abcd* dimidium *adb*, a lamina ABCD, Fig 5. contegitur, laminaque affixum gerit obiectum ad *m*.

Etſi hoc meo additamento inſignem me elegantiſſimo inſtrumento conciliaſſe perfectionem, aſſerere audeam, omnino tamen mereri videtur, vt pro ipſius perfectione vlterius adhuc ſtrenue laboretur. Ex aliquo tempore eapropter in mentem induxi,

 vniuer-

vniuerſam ipſius theoriam ad Optices principia data opera expendere, quod, an a quoquam hactenus factum ſit, ignoro. Differre autem iam cogor hoc negotium, vsque dum alii quidam, quos prae manibus habeo, labores abſoluti ſint, quod cum factum fuerit, non ſolum theoriae microſcopii ſolaris elaborationem, ſed et artificii cuiusdam, quod, prouti auguror, inſigniter adhuc perficere poteſt inſtrumentum, exactiorem deſcriptionem Academiae polliceor.

Breuem nihilo minus artificii huius expoſitionem adiungere ſtatim placet, quo in anteceſſum, quid, ex Clariſſ. Collegarum iudicio, de ipſo ſperandum ſit, explorem. Adhibemus hactenus microſcopio ſolari, lenticulam vnicam obiectiuam, aſt nonne nouas aliquas huic inſtrumento conciliare poſſumus perfectiones, ſi ad formandam imaginem plures adhibeamus lentes? Aliquam talem ex veſtigio indicare valeo. Notum eſt, lentis vnius ſolitariae campum repraeſentationis nullibi terminari, nullisque limitibus definitis eſſe circumſcriptum. Euenit hinc, vt, quamdiu in microſcopio ſolari non niſi vnicam adhibemus lenticulam, praeter aream, obiectum comprehendentem, ac a ſolaribus radiis illuſtratam, quae directe oppoſita eſt lenticulae obiectiuae, etiam reliqua puncta, quaquauerſus a latere extra aream illuminatam ſita, ſimul depingantur. Sic autem non ſolum multum lucis inutilis in cameram obſcuram intromittitur, ſed etiam inelegans, oculosque ſpectatoris valde offendens, oritur ſpectaculum; puncta enim a latere ſita partim obſcure, cum non ſint ſatis illuminata, partim, ob valde obliquam radiorum

diorum incidentiam, admodum confuſe depinguntur. Si autem duabus vtamur lentibus, tuboque ipſas includenti inſeramus, vbi vtriusque lentis foci concurrunt, annulum circularem debitae magnitudinis, alia longe res eſt, tum enim campus admodum acute terminatur, nullique, niſi qui ad imaginem pingendam requiruntur, radii, cameram intrant. Inſigniter hac ratione iuuari poſſe picturarum, quae a microſcopio ſolari formantur, elegantiam, auguror; hanc enim ſolam ob rationem laternae magicae, duplici lente obiectiua praeditae, longe praeſtantiores inueniuntur iis, in quibus non niſi vnica lens ſola adhibetur. Certus itaque ſum, imaginum a microſcopio ſolari productarum elegantiam augeri inſigniter poſſe, ſi pluribus vtamur lentibus obiectiuis; an vero, quoad diſtinctionem quoque, aliquis exinde ſperari queat fructus, altioris aliquantum eſt indaginis, atque nec aſſerere, nec negare, ſtatim audeo, niſi poſtquam inſtrumenti theoriam penitus explorauero, quod alio loco ac tempore praeſtiturus ſum.

DISSERTATIO
DE EXPERIMENTO QVODAM MAGNETICO CELEBERR. DOMINI *DU FAY*, DESCRIPTO IN COMMENTARIIS ACAD. SCIENT. PARIS. A. MDCCXXX.

Auctore

F. V. T. AEPINO.

Tab, VI. *In recta interminata* DE, *Fig.* I. *capiantur duo puncta* A, B, *quorum diſtantia* $AB = a$. *Fingantur haec puncta agere ſecundum rationem diſtantiarum inuerſam in punctum mobile* C *vtcunque aſſumtum, ea lege, vt punctum* A *repellat*, B *vero attrahat punctum* C; *ſintque intenſitates virium punctorum* A *et* B *aequales. Quaeritur vis, qua ſollicitatur punctum* C, *in directione rectae* DE *parallela, a* C *verſus dextram, aut verſus* E.

Demiſſa perpendiculari CH ex puncto C in rectam DE, dictaque $HC = y$, $AH = x$, erit ex ſtatica virium reſolutione, vis, quam punctum A directe in punctum C exercet, ad vim, qua punctum C ſollicitatur, in directione, rectae DE parallela, vti AC ad AH. Si ergo actio puncti A in punctum C, exhibeatur per $\frac{b}{AC}$, erit vis, qua pellitur punctum C verſus $E = \frac{bx}{AC^2} = \frac{bx}{x^2 + y^2}$. Simili ratione inuenitur vis, qua punctum B ſollicitat punctum C, in directione $DE = \frac{b(a-x)}{BC^2} = \frac{b(a-x)}{(a-x)^2 + y^2}$. Binae itaque vires, pun-

punctum C, in directione DE parallela, verſus E vrgentes, ſimul ſumtae, erunt $= \frac{bx}{x^2 + y^2} + \frac{b(a-x)}{(a-x)^2 + y^2} = \frac{a^2bx - abx^2 + aby^2}{(x^2+y^2)((a-x)^2 + y^2)}$.

Vt loca inueniantur, in quibus haec vis euaneſcit, ponendum eſt $a^2bx - abx^2 + aby^2 = 0$, vnde obtinetur $y^2 = x^2 - ax$. Deſcripta itaque hyperbola aequilatera, habente axin transuerſum, rectam AB, atque vertices, puncta A et B, erit vterque huius hyperbolae ramus, AM, BN, ea proprietate praeditus, vt, ſi punctum C ponatur verſari vbicunque in ipſius perimetro, ducaturque per punctum C recta FG, DE parallela, punctum C in directione rectae FG non magis in vnam, quam in alteram vrgeatur partem.

Euidens porro eſt, quamdiu punctum C in ſpatio interminato MABN, a recta AB ramisque hyperbolicis AM, BN comprehenſo, reperitur, ſollicitari iſtud perpetuo verſus E, quam directionem ſupra tanquam poſitiuam aſſumſimus; quam primum autem punctum C in ſpatiorum interminatorum DAM, EBN, alterutrum intrat, vim, qua vrgetur, in negatiuam tranſire, hincque verſus D directam eſſe.

Cogitetur, punctum C percurrere rectam interminatam FG, rectae DE parallelam, atque liquet, interea dum punctum C tranſit per rectae FG partem QP, inter binos hyperbolae ramos interceptam, vim, qua vrgetur punctum ſaepius dictum verſus E, a *o* increſcere, tum vero denuo vsque ad *o* decreſcere debere, vnde conſequens eſt, cadere inter puncta P et Q vnum aut plura puncta,

in

in quibus vis corpuſculum C ſollicitans ſit maximum aut minimum quoddam.

Si porro punctum C a puncto P abeat verſus G in infinitum, liquet, dum infinite diſtat a punctis A et B, actionem horum punctorum in punctum C euadere nullam. Vis itaque, qua punctum C ſollicitatur verſus F, interea dum a P in infinitum abit, a o increſcit, et decreſcendo denuo ad o reuertitur, vnde rurſum in rectam indefinitam PG cadere debet vnum aut plura puncta, vbi vis, corpuſculum C ſollicitans, eſt maximum, aut minimum. Omnino ſimile ratiocinium valet pro recta QF.

Vt loca iſtorum maximorum, aut minimorum, inveniantur, conſideretur y tanquam conſtans, et conſueta methodus adhibeatur. Obtinetur ſic differentiale vis punctum C vrgentis capiendo, atque iſtud ponendo $= o$:

$$\begin{aligned} x^5 - \tfrac{5}{2} a x^4 - 2 y^2 x^3 + 3 a y^2 x^2 - 2 a^2 y^2 x + \tfrac{1}{2} a^3 y^2 &= 0. \\ + 2 a^2 x^3 - \tfrac{1}{2} a^3 x^2 - 3 y^4 x + \tfrac{3}{2} a y^4 & \end{aligned}$$

ex qua aequatione reſoluta dantur x, quae pro quovis y dato, vi maximae, aut minimae, reſpondent.

Si in aequatione iſta y ſumatur variabilis, definit ipſa lineam ea proprietate praeditam, vt, ſi in diſtantia quacunque $CH = y$ agatur recta indefinita FG, rectae AB parallela, recta haec FG ſecet lineam iſtam, iis in punctis, in quibus ſi verſetur punctum C, maximam, aut minimam, ab actione punctorum

ctorum A et B, patiatur ſollicitationem, in directione, rectae AB parallela.

Vt naturam huius lineae perſpiciamus, annotamus primum, aequationem pro ipſa inuentam admittere diuiſorem rationalem $x-\frac{a}{2}=0$. Linea itaque, quam conſideramus, complexa eſt, ac praeter curuam quandam quarti ordinis, rectam IK, ex puncto medio rectae AB perpendiculariter erectam, comprehendit, quapropter dum punctum C in hac linea IK deprehenditur, perpetuo aut maximam aut minimam patitur ſollicitationem, quod quidem etiam ex ſolo problematis intuitu, abſque calculo, perſpici poteſt.

Diuiſa aequatione ſupra ſuppeditata per factorem $x-\frac{1}{2}a=0$, prodit aequatio quarti ordinis

$$\begin{aligned} x^4+2ax^3+2y^2x^2-2ay^2x+a^2y^2&=0.\\ -a^2x^2\qquad\qquad\quad +3y^4& \end{aligned}$$

quae definit curuam quarti ordinis, vna cum recta IK problemati noſtro ſatisfacientem.

Cum ex intuitu problematis pateat, partem huius curuae a recta IK verſus ſiniſtram ſitam, ſimilem et aequalem eſſe debere parti, quae cadit verſus dextram, facilis et expedita eſt huius aequationis reſolutio. Sequitur nempe hinc, ſi n et m ſint radices huius aequationis, reliquas duas fore $a-n$ et $a-m$. Vnde obtinentur hae quatuor aequationis noſtrae radices:

$$\tfrac{a}{2}+\sqrt{\tfrac{4y^2+a^2}{4}+y\sqrt{4y^2+a^2}}=x^{\circ}$$
$$\tfrac{a}{2}-\sqrt{\tfrac{4y^2+a^2}{4}+y\sqrt{4y^2+a^2}}=x'$$
$$\tfrac{a}{2}+\sqrt{\tfrac{4y^2+a^2}{4}-y\sqrt{4y^2+a^2}}=x''$$
$$\tfrac{a}{2}-\sqrt{\tfrac{4y^2+a^2}{4}-y\sqrt{4y^2+a^2}}=x'''$$

quarum aequationum quaeuis aliquem curuae ramum definit, quatuor vero iſti rami vniuerſam curuam conſtituunt.

Liquet porro, aequationes pro x° et x', et ſimiliter aequationes pro x'' et x''', ſuppeditare ramos perfecte ſimiles et aequales, poſitione ſolummodo differentes, vnde opus non eſt, niſi vt conſideremus aequationes pro x' et x''', quae quippe ſuppeditant dimidium curuae, a recta I K verſus ſiniſtram cadens.

Ramus in aequatione pro x' comprehenſus, ad x negatiua pertinet, et ex puncto A exeundo, ſemperque magis magisque ab axe recedendo, in infinitum abit. Ponendo nempe $y=0$, fit $x'=\frac{a}{2}-\frac{a}{2}=0$, ac praeterea quantitas $\sqrt{\frac{4y^2+a^2}{4}+y\sqrt{4y^2+a^2}}$ quantitate $\frac{a}{2}$ ſemper maior eſt, creſcenteque y continuo ſimul increſcit.

Alter ramus, ex aequatione pro x''' oriundus, itidem exit ex puncto A, aſt verſus x poſitiua inflectitur, et recedendo ab axe, pertingit ad rectam I K, in qua terminatur in puncto L, tali, vt ſit I L $=\frac{a}{2\sqrt{3}}$. Ponendo nempe primum $y=0$, fit $x'''=\frac{a}{2}-\frac{a}{2}=0$. Deinde vero ponendo $y=\frac{a}{2\sqrt{3}}$, erit $x'''=\frac{a}{2}$, augendo

augendo autem y vltra limitem $\frac{a}{2\sqrt{3}}$, fit x''' imaginarium, vnde ramus hic in puncto L terminatur.

Curua itaque quaeſita ductum habet RBLAS, ſimilisque eius pars, qualis deorſum, etiam ſupra axin ſurſum cadit, quod monuiſſe ſufficit, cum ſub conſiderationem noſtram haec pars non cadat.

Ducta iam recta indefinita FG, axi AC parallela, duplex accidere poteſt caſus: vel enim y, rectae FG reſpondens, minus eſt $\frac{a}{2\sqrt{3}}$, vel hac quantitate maius. Primo caſu quinque dantur puncta, in quibus fg curuam RBLAS et rectam IK ſecat, puncta nempe t, s, v, r, w, vnde ſi punctum C percurrere ponatur rectam fg a dextra verſus ſiniſtram, ad t erit vis, qua ſollicitatur verſus f, maxima, ad p nulla, ad s maxima verſus g, ad v minima, ad r rurſum maxima, ad q denuo nulla, tandemque ad w rurſus maxima, aſt iterum verſus f directa.

Si iam vlterius creſcere ponatur y, ſiue ſi recta fg motu ſibi parallelo ab axe remoueatur, puncta interſectionum s, v, r, continuo ad ſe inuicem magis magisque accedunt, factoque $y = \frac{a}{2\sqrt{3}}$, ſiue tranſeunte recta fg per punctum L, inter ſe et cum puncto L confunduntur. Augendo vero y adhuc vltra limitem $\frac{a}{2\sqrt{3}}$, puncta interſectionum, r et s, rectae fg, cum parte curuae BLA, fiunt imaginaria. A termino itaque $y = \frac{a}{2\sqrt{3}}$, vsque in infinitum, non cadit in ſpatium NBAM, niſi vnicum maximum, interſectione rectae FG cum recta IK, in puncto V, determinatum.

Tt 2 Valo-

Valores maximorum et minimorum, de quibus hactenus locuti ſumus, ſine difficultate reperiuntur; non enim opus eſt, niſi vt valores ipſius x, maximis aut minimis reſpondentes, introducantur in formulam ſupra repertam,

$$\frac{a^2 b x^2 - a b x^2 + a b y^2}{(x^2 + y^2)((a - x)^2 + y^2)}$$

vim, qua punctum C ſollicitatur, exprimentem. Reperitur hac ratione

I. Si $y < \frac{a}{2\sqrt{3}}$

minimum cadens ad $v = + \frac{ab}{\frac{a^2}{4} + y^2}$

maximum cadens ad $r = + \frac{ab}{2y(\sqrt{4y^2 + a^2} - 2y)}$,

maximum cadens ad $w = - \frac{ab}{2y(\sqrt{4y^2 + a^2} + 2y)}$

II. Si y vel $=$, vel $> \frac{a}{2\sqrt{3}}$.

maximum cadens ad $V = + \frac{ab}{\frac{a^2}{4} + y^2}$

maximum cadens ad $W = - \frac{ab}{2y(\sqrt{4y^2 + a^2} + 2y)}$

Ex harum formularum intuitu ſine negotio patet, maximum poſitiuum, maximo negatiuo ipſi reſpondente, ſemper maius eſſe. Si enim primum conſideremus caſum, vbi $y < \frac{a}{2\sqrt{3}}$, maximum poſitiuum cadens ad r ſuperat maximum negatiuum cadens ad w, quantitate $\frac{2b}{a}$. Deinde vero, ſi fuerit $y > \frac{a}{2\sqrt{3}}$, dico maxi-

maximum poſitiuum cadens ad V, fore itidem ſemper maius, maximo negatiuo cadente ad W. Facili nempe calculo demonſtratur, quantitatem $\frac{ab}{4y^2 + a^2}$ quantitate $\frac{ab}{2y(\sqrt{4y^2 + a^2} + 2y)}$ maiorem eſſe, modo ſit $y^2 > \frac{a^2(\sqrt{1943} - 44)}{28}$, vnde a fortiori, prior quantitas poſteriorem certe ſuperat, ſi fuerit $y^2 > \frac{a^2}{12}$.

Corpuſculum C incluſum fingatur tubo $\alpha\beta$, cuius medium punctum occupet, ſitque punctum C, mobile quidem in tubo $\alpha\beta$, ſed non ſine difficultate quadam, fingaturque haec difficultas ſimilis eſſe frictioni, ita, vt, ſi ponatur difficultas haec $= \alpha$, vis particulam C vrgens effectum ſortiri queat nullum, niſi ipſa maior ſit α. Concipiatur denique, percurrere tubum $\alpha\beta$, cum corpuſculo ſibi incluſo, rectam FG, ea ſeruata lege, vt tubus $\alpha\beta$ perpetuo in ſitu rectae AB parallelo detineatur.

Dico iam 1) duci ſemper poſſe rectam aliquam GF vel gf, rectae DE parallelam, ea proprietate praeditam, vt ſi tubus $\alpha\beta$ vltra hanc rectam remoueatur a DE, actio punctorum A et B in punctum C impar ſit reſiſtentiae α ſuperandae, hincque effectum ſortiatur nullum.

Ponatur nempe maximum poſitiuum cadens ad V, ſiue $\frac{ab}{\frac{a^2}{4} + y^2} = \alpha$, atque erit $y = \sqrt{\frac{ab}{\alpha} - \frac{a^2}{4}}$, vbi α ita aſſumtum fingimus, vt reddat quantitatem y ſiue $\sqrt{\frac{ab}{\alpha} - \frac{a^2}{4}} > \frac{a}{2\sqrt{3}}$. Fiat $IV = \sqrt{\frac{ab}{\alpha} - \frac{a^2}{4}}$, ac ducta per

punctum V recta F G, rectae D E parallela, per ſe patet, ſi tubus $\alpha\,\beta$ percurrat rectam quandam, vltra F G a D E diſtantem, effectum oriri poſſe nullum, ſed corpuſculum C, tubo $\alpha\,\beta$ incluſum, ex loco ſuo non dimoueri. Si vero tubus ſaepius dictus percurrat aliquam rectarum, rectae D E propinquiorum, ac F G, dari punctorum A et B in corpuſculum C aliquam actionem, itidem per ſe manifeſtum eſt.

Si vero calculus commonſtret, α eiusmodi habere valorem, vt reddat formulam $\sqrt{\frac{ab}{\alpha} - \frac{a^2}{4}} \lessgtr \frac{a}{4\sqrt{3}}$, ponatur maximum cadens ad r, aut s, ſiue $\frac{ab}{2y(\sqrt{4y^2 + a^2} - 2y)} = \alpha$, quae aequatio ſuppeditat $y = \sqrt{\frac{ab^2}{4\alpha^2 a - 8ab}}$, ſumtaque $Iv = \sqrt{\frac{ab^2}{4\alpha^2 a - 8ab}}$, ductaque recta fg per punctum v, rectae D E parallela, pro recta fg iam eadem valebunt, quae in caſu praecedente pro recta F G locum habebant.

Sit iam 2.) in Fig. 2. recta F G ea, quae ſpatium, vbi actio in punctum C nullum habet effectum, ſeparat a ſpatio, vbi aliquem producere debet effectum, (quae an cis, an vltra, punctum L, Fig. 1. cadat, iam perinde eſt,) et euidens quidem eſt, effectum ſollicitationis, qua vrgetur corpuſculum C, interea dum tubus $\alpha\,\beta$ percurrit cuiusdam rectarum, quae cadunt inter F G et D E, partem, inter binos hyperbolae ramos A P M, B Q N interceptam, in eo conſiſtere, vt corpuſculum C protrudatur verſus tubi extremitatem β; in ſpatio enim iſto ſollicitatio poſitiua eſt, et verſus G

dire-

directa. Si vero tubus vlterius promoueatur, et tranſeat in ſpatium interminatum DAPF, vbi ſollicitatio ſit negatiua, manifeſtum eſt, duplicem accidere poſſe caſum. Si nempe maximum negatiuum, in quod in ſpatio DAPF incidit corpuſculum C, maius ſit α, prior effectus deſtruitur, et corpuſculum C verſus tubi extremum oppoſitum α retrahitur; contrarium vero accidit, ſi maximum hoc negatiuum fuerit minus α.

Ponamus ea propter maximum negatiuum, in quod incidit corpuſculum C, ſiue $\frac{ab}{2y(\sqrt{4y^2+a^2}+2y)}=\alpha$, ac erit ex hac formula $y=\frac{b\sqrt{a}}{\sqrt{4\alpha^2 a+8\alpha b}}$. Fiat $Iv\,\frac{b\sqrt{a}}{\sqrt{4\alpha^2 a+8\alpha b}}$, quae quantitas ſemper minor eſt IV, ductaque recta fg, rectae DE parallela, per rectas fg, FG, vniverſum ſpatium diſtributum erit in tres partes interminatas DEfg, fgFG, et FGMN, ea lege, vt, ſi tubus $\alpha\beta$ percurrat rectam aliquam, rectae DE parallelam, in quouis modo dictorum ſpatiorum diuerſus producatur effectus. Namque

1) Si tubus $\alpha\beta$ pertranſeat ſpatium DEfg,
 - α) in ſpatio EBqg corpuſculum C propellitur verſus extremitatem α,
 - β) in ſpatio BqpA retrahitur verſus β; denique vero
 - γ) in ſpatio DApf rurſum verſus α retrorſum propellitur.

2) Si tubus $\alpha\beta$ percurrat ſpatium gfFG,
 - α) quamdiu reperitur in ſpatio gqQG corpuſculum C, ex loco ſuo non dimouetur,

β)

β) in ſpatio qpPQ propellitur verſus β,

γ) in ſpatio fpPF actio in punctum C nullum habet effectum, atque corpuſculum C a puncto β, verſus quod in ſpatio qpPQ propulſum erat, non dimouetur.

3) Si tubus tranſeat per ſpatium FGMN, actio punctorum A et B in corpuſculum C nullum habet effectum, vnde tubi medium perpetuo occupat.

Ex conſiderationibus hactenus proſatis, pure analyticis, combinatis cum principiis, ad quae theoriam magneticam deduxi, in *Tentamine* meo *Theoriae Electricitatis et Magnetismi*, profluit ſponte quaſi, explicatio phaenomeni cuiusdam magnetici valde mirabilis, cuius inventor eſt Ill. naturae ſcrutator, Celeb. *du Fay*, quodque propriis ipſius verbis deſcribere mihi liceat. "*Je rapporterai à cette occaſion une Expérience, qui ne ſe trouve dans aucun des Auteurs, qui ſont venus à ma connoiſſance; c'eſt que, ſi l'on gliſſe une aiguille à la diſtance d'environ deux lignes des armures d'une Pierre, ſans toucher à la Pierre, il n'importe pour cet effet qu'on la gliſſe du Nord au Sud, ou du Sud au Nord, ou même qu'on la tienne immobile pendant un inſtant, à quelque diſtance des armures; elle acquiert dans ces trois cas une direction ſemblable à celle, qu'elle auroit, ſi on la poſoit ſimplement ſur les armures de la Pierre, et qu'on la retirât enſuite parallelement à l'axe, et tout oppoſee à celle, qu'elle auroit contractée, ſi on l'avoit gliſſée d'un bout a l'autre ſur les deux armures*

de

de la Pierre. „ Vid. Memoires de l'Academie Roïale des Sciences l'année 1730. pag. 219. Edit. Amſtelod.

Repetens hoc experimentum, non ſolum mirabundus phaenomeni veritatem deprehendi, ſed ſimul quoque obſeruaui circumſtantias aliquas, Ill *du Fay* equidem, vt credere fas eſt, non incognitas, non tamen diſtincte ab ipſo enunciatas, quas adducere operae praetium iudico.

Sit in Fig. 3. ABCD magnes armatus, cuius poli artificiales ſint A et B. Aſſumtis aliquot filis, ex ferro molli conſtantibus, craſſitie, qualis eſt calami anſerini, circiter gaudentibus, longitudinis 4 aut 5 pollicum, quale in figura exhibetur per $\alpha\beta$, bina ſequentia inſtituebam tentamina:

I.) Fili extremo α applicabam polum B, atque magnetem per totam fili longitudinem producebam, ita vt polus B praecederet, A vero ſequeretur, vsque dum polus A ad extremum β perueniſſet; remotoque tum magnete, videbam filum $\alpha\beta$ magneticum factum fuiſſe ea lege, vt extremum α polo A, extremum β polo B homogeneum acquiſiuerit magnetismum.

II. Repetebam idem experimentum, vnica hac intercedente differentia, quod magnetem ab immediato cum filo $\alpha\beta$ contactu, interpoſito parallelipipedo ligneo EF, Fig. 4, arcerem, tumque deprehendebam:

α) Si diſtantia inter magnetem atque filum admodum parua erat, eundem oriri effectum, ac in experimento praecedente, vbi magnes filum actu contingebat. Si vero

β) retentis reliquis experimenti circumſtantiis omnibus, magnetis a filo diſtantiam magis magisque adaugebam, perueniebatur tandem ad locum talem, vbi tentamen omnino contrarium ſortiebatur euentum. Fili nempe extremum α polo B, extremum β polo A homogeneum acquiſiuerat magnetismum.

Diſtantiae, in qua admiranda haec effectus experimenti commutatio contingebat, dimenſionem exactam eapropter non addo, quoniam pro circumſtantiarum varietate, magnis variationibus ipſam ſubiectam eſſe deprehendi.

Diſquiſitiones, antea a me prolatae, ad hocce tentamen ſine negotio adaptantur. Sint in Fig. 1. et 2, puncta A et B magnetis cuiusdam poli, et A quidem poſitiuus, B vero negatiuus ipſius polus. Tubi α β vices ſuſtineat filum ferreum magnetiſandum. C ſit fluidi magnetici quaedam particula, in filo ferreo α β reperiunda, quae dum ferri poros tranſit, difficultatem quandam experiatur, quae $=\alpha$, tandemque fingatur, actionem, qua poli A et B ſollicitant magnetici fluidi particulam C, exerceri ea lege, vt ſecundum inuerſam diſtantiarum rationem decreſcat, atque ſtatim patet, ſuperius tradita ratiocinia omnia huc trahi poſſe. Si itaque filum α β percurrat ſpatium DEgf, fluidum magneticum, poſt experimenti inſtitutionem verſus α condenſatum, verſus β rarefactum deprehendi debet. Si vero filum α β, vltra rectam fg, a magnete remoueatur, atque tranſeat per ſpatium fgGF, prorſus con-

contrarius oriri debet euentus, atque abſoluto experimento fili extremum β, vltra quantitatem naturalem magnetico fluido repletum, extremum vero α infra hanc quantitatem euacuatum, obſeruabitur.

Non offendere poterit lectores, rite rem conſiderantes, quod fictas hypotheſes hic adſumſerim, quales ſunt, quod polorum magnetis, qui tentamini adhibetur, vim in puncta A et B coactam ſuppoſuerim, quodque exerceri magneticam attractionem et repulſionem ſecundum diſtantiarum rationem inuerſam, admiſerim. Satis enim liquet, quomodocunque haec omnia immutentur, prodituras perpetuo concluſiones, iis, quas ex fictis hypotheſibus elicui, quoad principaliores circumſtantias, omnino ſimiles, quod pro ſcopo, quem hic intendimus, abunde ſufficit.

Nouum in hac diſſertatione accipiunt ſpecimen naturae ſcrutatores, quantum theoria mea magnetica, in *Tentamine Theoriae Electricitatis et Magnetiſmi*, expoſita, cum phaenomenis difficilioribus, naturae conſuetudini ad primum intuitum contrariis, atque valde paradoxis, conſentiat. An itaque vanitatis reus agendus ero, ſi fatear, de die in diem me magis magisque perſuaſum euadere, hypotheſin admodum probabilem phaenomenorum magneticorum me orbi erudito propoſuiſſe?

ADDITAMENTVM
AD DISSERTATIONEM DE EXPERIMENTO MAGNETICO, CELEB. DN. *DU FAY*, CONTINENS NOVA EXPERIMENTA MAGNETICA DETECTA ET EXPLICATA.

Auctore

F. V. T. AEPINO.

Hoc praecipue ſingulare habent vis electrica et magnetica, quod perſaepe, phaenomenorum ab ipſis pendentium apparente quadam inconſtantia, naturae ſcrutatorem confundant. Dantur nempe caſus plurimi, vbi idem experimentum, aliquoties repetitum, diuerſos, immo interdum omnino contrarios producit effectus, etſi vel perſpicaciſſimus nullam, in ratione tentamen inſtituendi, detegere valeat circumſtantiarum varietatem, quae tanta eſſet, vt producendae mirabili huic in ſucceſſu varietati, par videri poſſet.

Ex quo methodo *Newtoniana* binas ſupra nominatas vires examinare incepi, ſaepe mihi contigit, vt experimentorum, miranda eiusmodi inconſtantia Philoſophis crucem figentium, enodationem reperirem, circumſtantiasque euoluerem, quae variabilitatis effectuum cauſae exiſtunt; ſique fateri licet, quod ſentio, hoc inter praecipua theoriae meae praeſidia numero, quod plurimis eiusmodi phaenomenis paradoxis tam apte conſentiat, vt, ſi non pro ipſa naturae hypotheſi, pro

tali

tali tamen ſine dubio habenda ſit, quae naturae hypotheſi tuto ſubſtitui poteſt.

Praecedens diſſertatio, cuius haec additamentum eſt, tale exemplum ſiſtere potuit; aſt contigit mihi nuper, adhuc vlterius in disquiſitionibus iſtis progredi, atque theoriae meae magneticae innixa ſyntheſi, talia detegere phaenomena, quae, niſi cauſam ipſorum iam antea cognitam habuiſſem, in ſtuporem coniicere me debuiſſent.

Recordari poterunt lectores ex diſſertatione praecedenti phaenomenorum et ratiociniorum, quorum expoſitionem ipſa continet, vnde absque noua rei explicatione, filum ratiociniorum meorum denuo prehendere, et vlterius progredi licebit.

Sit vniuerſum ſpatium, cis rectam indefinitam ED (Fig. 2. Diſſert. praeced.) ſitum, per rectas fg, FG, ita diſtributum, vti in Diſſertatione praecedente expoſitum eſt, atque liquet, ſi punctorum A et B diſtantia imminuatur, reliquis circumſtantiis omnibus non mutatis, conſequens inde eſſe debere, quod recta fg propius propiusque in indefinitum accedat ad rectam DE, tranſeuntem per puncta A et B. Cum nempe rectae fg diſtantia Iv ab AB ſit $= \frac{b\sqrt{a}}{\sqrt{4\alpha^2 a + 3\alpha b}}$, haec vero quantitas, modo reliquarum literarum valor non mutetur, decreſcat, decreſcente a, de propoſiti veritate facile conſtat. Tab. VII.

Quodſi haec ad magnetem adplicemus, obſeruandum eſt, puncta, in quae magneticorum polorum vis

vniuerſa coacta fingitur, non in ipſas polorum extremitates cadere, ſed ipſis ad aliquam profunditatem immerſa eſſe. Quodſi ergo detur magnes M, Fig. 1. cuius poli ſunt valde propinqui, fieri poteſt, vt recta *fg* rectae AB propinquior ſit, quam polorum extremitates *mn*, *pq*. Quodſi ergo filum ferreum $\alpha\beta$ polis vel maxime ad ipſum vsque contactum admoueatur, atque more *du Fayano* ſtringatur, nihilominus is eſſe debet experimenti euentus, vt extremum fili α polo B, extremum vero β polo A, euadat homogeneum, qui effectus *du Fayanis* experimentis omnino aduerſatur.

Anſam praebuere haec ratiocinia experimento ſequenti:

Exper. I.

„Magnetes artificiales, AC, DB, Fig. 2. aequalium circiter virium, tabulae impoſui, vt ad C, D, „ſe contingerent, verſus A et B vero aliquantum „diuaricarent, polique A et B eſſent heterogenei. Plura „poſtea fila $\alpha\beta$, eiusdem longitudinis, ſex circiter „pollicum, ex eodem filo ferreo, modice duro, craſſitiei, qualis eſt calami anſerini, abſcidi, tumque

1) „diuaricare feci extrema magnetum A, B, tres „circiter pollices, filoque $\alpha\beta$ ad polos admoto, „ſtrictoque more *du Fayano*, eundem ac Dn. *du* „*Fay*, reperi euentum; abſoluta nempe operatione „erat extremum α polo A, β vero polo B homoge„neum.

2)

2) „Tum ſenſim ſenſimque parallelipipedorum di„varicationem imminuebam, et experimentum, qua„vis vice nouum adhibendo filum $\alpha\beta$, repetebam, „ſubque initium effectus idem inde reſultare pergebat, „vt antea. Aſt cum eatenus imminuta eſſet diſtantia, „vt poli A et B non niſi dimidium circiter pollicem „a ſe inuicem diſtarent, euentum omnino contrarium „ſortiebatur tentamen. Iam enim α polo B, β vero „polo A, homogeneum monſtrabat magnetismum.

Quanta, quaeſo, admiratione percelli debuiſſet naturae ſcrutator, qui, per innumera tentamina, de experimenti *du Fayani* veritate conuictus, fortuito in magnetem incidiſſet, qui omnino contrarium dediſſet, euentum?

Pergamus vlterius. Pendet rectae *fg* ab AB diſtantia (Fig. 2. Diſſert. praeced.) itidem ab α; ſic vt reliquis valoribus non mutatis, cum α decreſcente, diſtantia haec adaugeatur. Cum nempe ſit ipſa $= \mathrm{I}v = \frac{b\sqrt{a}}{\sqrt{4\alpha^2 a + 8\alpha b}}$, ex ipſo formulae intuitu de propoſiti veritate conſtat. Quodſi itaque duo diuerſa fila ferrea, alterum mollius, alterum durius adhibeantur, ſic, vt poſteriori maius reſpondeat α, ac priori, fieri poterit, vt pro duriori filo recta *fg* vltra polorum extremitates *mn*, *pq*, Fig. 1. pro molliori vero citra ipſas cadat, tumque mollius filum, polis admotum et more *du Fayano* ſtrictum, euentum *du Fayanum*, durius vero, omnino contrarium monſtrabit, ſic vt idem magnes, ſub iisdem apparenter circumſtantiis, mox hunc,

huuc, mox oppoſitum praeſtet effectum. Etiam haec ratiocinia per experientiam comprobata ſunt.

Exper. II.

„Aliqua filorum $\alpha\beta$, qualia in experimento „praecedente adhibueram, ignitionis ope, admodum „mollia reddebam. Admotis tum virgarum AC, BD, „extremis AB, Fig. 2. ita propinque ad ſe inuicem, „vt in filo duriori, prouti in exper. I. accidebat, „effectum *du Fayano* contrarium producerent, ſeruata „hac diſtantia, filum molle tentamini adhibebam, „tumque euentus, experimento *du Fayano* penitus „conſentiens, deprehendebatur.

Simile quid, quale in hoc experimento contingit, alia quoque ratione obtineri poteſt, vt nempe idem magnes in bina ferramenta diuerſa prorſus contrarium edat effectum. Commonſtrat hoc, ſequens experimentum:

Exper. III.

„Filum ferreum molle $\alpha\beta$ (Fig. 2. Diſſert. „praeced.) ſtringatur magnete, more *du Fayano*, eligatur vero talis rectae, quam percurrit $\alpha\beta$, ab AB „diſtantia, vt haec recta ſita quidem ſit in ſpatio „gfDE, aſt rectae fg ſit ſatis propinqua, et filum „$\alpha\beta$ iam ea ratione magnetificabitur, vt extremum α „polo A, extremum β polo B euadat homogeneum. „Tum filum, ex duriori conſtans ferro, prioris loco „adhibeatur, et percurrat eandem rectam, ac filum

„mol-

„ mollius, et modo rite electa ſit diſtantia, quod vno „alteroque vago tentamine facile obtinetur, euentus „erit omnino contrarius, extremum nempe α durio„ris huius fili erit polo B, et ipſius extremum β „polo A homogeneum.

Cauſa huius phaenomeni per ſe in oculos incurrit, ac in eo ſita eſt, quod antea monſtraui, rectam fg pro α minori magis, pro α maiori minus, diſtare ab AB.

Erat tandem in experimento *du Fayano* perinde, ſiue filum $\alpha\,\beta$ a dextra verſus ſiniſtram, ſiue a ſiniſtra verſus dextram ducebatur. Incidi autem, per exactius theoriae examen, in methodum, qua effici poteſt, vt contrarius exoriatur euentus, ſi filum contrariis promoveatur directionibus. Vniuerſum myſterium huc redit, vt magnetem nobis paremus, cuius alter polus inſigniter fortior ſit, quam alter, quod magnetum artificialium ope efficere facillimum eſt.

Pro diſtinctiore rei comprehenſione aliqua indigemus analyſi. Supponamus puncta A et B, Fig. 3. prius repellere, poſterius attrahere punctum C, viribus, quae ſunt vti diſtantiae AB, BC, inuerſe, aſt intenſitates virium, quas vtrumque punctum exſerit, ſint diuerſae, ita vt prior habeat indicem intenſitatis b, poſterior c. Sit $DA = DB = a$, $Dm = x$, $Cm = m$. Si iam quaeratur vis, qua punctum C vrgetur in directione rectae AB parallela verſus E, ſimili ratiocinio, quo in Diſſertatione praecedente vſus ſum, peruenitur ad formulam

$$\frac{(c-b)\,x^3-(c+b)\,a\,x^2-(c-b)\,(a^2-m^2)\,x+(c+b)(a^3+a\,m^2)}{x^4+2\,(m^2-a^2)\,x^2+(m^4+a^4)}.$$

Percurrente puncto C rectam GF, AB parallelam, cum x variato ſimul variatur haec ſollicitatio, et interdum nulla euadit. Vt puncta, vbi hoc contingit, determinentur, fractionis numerator euaneſcere ponendus eſt, vnde obtinetur, poſito breuitatis cauſa $\frac{c+b}{c-b}=\mu$, haec aequatio trium dimenſionum:

$$x^3-\mu a x^2-(a^2-m^2)x+\mu(a^3+am^2)$$

quod indicio eſt, tria dari poſſe puncta rectae FG, vbi ſi conſtituitur corpuſculum D, ſollicitatio in directione rectae AB parallela verſus E fit nulla.

Vlterius haec aequatio, ex noto Theoremate *Harrioti*, ſeu *Carteſii*, quamdiu μ eſt poſitiuum, i. e. quamdiu c eſt maius b, binas habet radices poſitiuas, vnamque negatiuam; ſin vero μ ſit negatiuum, quod accidit ſi c fuerit minus b, inuerſo ordine binas poſſidet radices negatiuas, atque vnicam poſitiuam.

Quicunque horum caſuum a nobis examini ſubiiciatur, perinde eſt; nam ratiocinia omnia vtrinque penitus ſimilia ſunt, quapropter eum enodaſſe caſum, vbi μ eſt poſitiuum, ſufficit.

Dico iam, cum aequatio, quam conſideramus, neceſſario aliquam habeat radicem realem, eſſe hanc negatiuam ipſius radicem, quam quippe aſſero, modo μ ſit poſitiuum, quoscunque de caetero acquirant valores μ, a, et m, nunquam fieri poſſe imaginariam. Euaneſcat nempe x, vt punctum C conſiſtat ad Q, atque ſollicitatio, quam patitur, erit $=\frac{(c+b)(a^3+am^2)}{m^4+a^4}$, hinc

hinc poſitiua; fiat vero $x = -\infty$, atque erit ſollicitatio $= \frac{(c-b)}{-\infty}$, hinc negatiua. Interea itaque, dum x ab o in $-\infty$ variatur, ſollicitatio ex poſitiuo in negatiuum tranſit, vnde ad x negatiua neceſſario aliquando fit o, cum, prouti ex problematis intuitu facile patet, tranſitus ex poſitiuo in negatiuum per infinitum, locum hic habeat nullum.

Quod ad binas reliquas radices poſitiuas, pro varia literarum μ, a, et m determinatione, mox reales ſunt, mox vero imaginariae euadunt. Cum nempe pro $x = +\infty$, ſollicitatio fiat $= \frac{(c-b)}{+\infty}$, hinc poſitiua, nihil inde concludere licet, niſi quod interea, dum x a o ad $+\infty$ variatur, ſollicitationem aut plane non, aut 2 vicibus euaneſcere, vnde disiunctiue ſolum aſſerere licet, binas radices poſitiuas, aut vtramque eſſe realem, aut vtramque imaginariam.

Tres itaque hic diſtinguendi ſunt caſus. Sunt nempe hae radices poſitiuae,

1) aut imaginariae,

2) aut reales et aequales,

3) aut reales et inaequales.

In caſu priori liquet, etſi ſollicitatio, quam patitur punctum C, verſus x negatiua, fiat aliquando negatiua, ita vt dirigatur verſus F, non tamen idem contingere verſus x poſitiua, ſed ex hac parte ipſam perpetuo in infinitum perſiſtere poſitiuam. Quodſi itaque A et B ſint magnetis cuiusdam poli, atque filum ferreum, per quod fluidum magneticum mouetur difficul-

tate $=\alpha$, percurrat rectam GF, a ſiniſtra verſus x negatiua, ſitque R punctum iſtud vbi ſollicitatio euaneſcit, et in negatiuum tranſit; euidens eſt, quamdiu filum reperitur in parte interminata rectae GF, verſus ſiniſtram puncti R ſita, perpetuo tendere polos magneticos ad magnetiſandum filum ea ratione, vt extremum α polo B, extremum β polo A, fiat homogeneum. Quam primum vero punctum C intrauit in partem interminatam rectae GF, ad dextram puncti R ſitam, penitus contrarium accidit; tendunt nempe tunc poli ad eum producendum ſtatum, vt extremum α polo A, extremum β polo B, fiat homogeneum. Modo itaque difficultas α vtraque ſollicitatione maxima, poſitiua nempe et negatiua, minor ſit, is inde reſultare debet effectus, vt, poſtquam ductum eſt filum a ſiniſtra verſus dextram, ea ratione magnetificetur, vt extremum α polo A, extremum β polo B, fiat homogeneum. Quodſi vero filum contraria directione, a dextra nempe verſus ſiniſtram, incedat per rectam GF, oppoſitum oriri debere effectum, aeque facile patet; tum enim extremum α polo B, extremum β polo A, euadere debet homogeneum.

Prorſus ſimilis eſt ratio caſus ſecundi, vbi binae aequationis radices poſitiuae ſunt reales quidem, aſt aequales. Si nempe ad R cadat radix negatiua, ad S vero binae poſitiuae, etſi ſollicitatio ad S fiat nulla, non tamen in negatiuum tranſit, ſed ſtatim in poſitiuum reuertitur. Cum itaque ad ſiniſtram puncti R in infinitum, ſollicitatio perpetuo ſit poſitiua, (aut vt ex-

exactius loquamur, nunquam ſit negatiua) ad dextram vero puncti R perpetuo ſit negatiua, pro hocce caſu intermedio penitus eadem valent, ac pro caſu antecedente.

Tertius denique caſus, vbi binae aequationis radices poſitiuae ſunt reales et inaequales, peculiarem diſquiſitionem requirit. Sint puncta, ad quae cadunt radices, negatiua ad R, binae vero poſitiuae ad S et T. Iam ergo ſollicitatio ad ſiniſtram puncti R non perpetuo eſt poſitiua, ſed aliquando inter S et T negatiua euadit, vltra punctum T vero in poſitiuum revertitur.

Hoc iam caſu, dico

1) ſi capiatur x poſitiuum $= Q\gamma$, Fig. 3. cui reſpondet ſollicitatio negatiua, atque tum capiatur ex altera parte x negatiuum, $Q\delta$, poſitiuo $Q\gamma$ aequale, fore ſollicitationem, quae puncto δ reſpondet, et negatiuam, et maiorem ſollicitatione, quae ad punctum γ pertinet.

Fingatur nempe primum intenſitas virium punctorum A et B aequalis eſſe, ſic vt tam puncto A quam B reſpondeat idem intenſitatis index b, atque ſub hac hypotheſi, erit

ſollicitatio

in puncto $\gamma = \frac{b \times Bn}{B\gamma^2} - \frac{b \times An}{A\gamma^2} = M'$

in puncto $\delta = \frac{b \times Ap}{A\delta^2} - \frac{b \times Bp}{B\delta^2}$ ſiue

$$\frac{b \times Bn}{B\gamma^2} - \frac{b \times An}{A\gamma^2} = N'.$$

Quapropter, ſi intenſitatis index vtrobique ſit idem, erunt M' et N' vtrumque negatiuum, et $M' = N'$.

 Si

Si vero iam ipſius B index intenſitatis creſcat, et fiat $= c = b + \mu$, erit

ſollicitatio

in puncto $\gamma = \frac{b \times Bn}{B\gamma^2} + \frac{\mu \times Bn}{B\gamma^2} - \frac{b \times An}{A\gamma^2} = M''$.

in puncto $\delta = \frac{b \times Ap}{A\delta^2} - \frac{b \times Bp}{B\delta_2} - \frac{\mu \times Bp}{B\delta^2} = N''$

ex quarum formularum comparatione patet, eſſe M'' minus M', aſt N'' maius N', vnde de aſſerti mei veritate facile conſtat.

Concludo autem hinc,

2) maximam ſollicitationem negatiuam, cadentem ad x poſitiua, neceſſario minorem eſſe, maxima ſollicitatione negatiua, quae cadit ad x negatiua.

Cadat nempe prius maximum ad γ, et facto $Q\delta = Q\gamma$, erit ſollicitatio ad δ maior, maxima ſollicitatione negatiua, quae cadit ad x poſitiua. Vnde id quod demonſtrandum ſumſeram, ſi ad δ cadat maximum, immediate, ſi non ad hoc punctum cadat, a fortiori concluditur.

Sit maximum negatiuum cadens ad $\gamma = P$, id vero, quod cadit ad δ, $= Q$; et cum ſit $P < Q$, rurſus manifeſtum eſt, fieri poſſe, vt α, quod exprimit difficultatem, quacum fluidum magneticum mouetur per filum magnetificandum, cadat inter P et Q, ſitque priori maius, et poſteriori minus. Tum itaque, ſi filum percurrat rectam GF, circa Q quidem ita magnetificabitur, vt extremum α polo B, extremum β polo A, fiat homogeneum; aſt effectus hic deſtruetur, ſi filum incedat a ſiniſtra verſus dextram, et abſoluta operatione erit extremum fili α polo A, prouti extre-

extremum β polo B, homogeneum. Deſtructio vero eiusmodi, ſi filum percurrat rectam GF a dextra verſus ſiniſtram, locum nullatenus habebit. Subnatum eſt ex hiſce ratiociniis experimentum ſequens, quo veritas ipſorum abunde comprobatur.

Exper. IV.

„Tres magnetes artificiales AB, CD, EH, in „tabula ita diſpoſui, vti monſtrat Fig. 4. ea nempe „ratione, vt virgae CD, EH ſe contingerent per to„tam ſuam longitudinem polis ſuis homologis, tertia „vero virga in contrario ſitu diſpoſita eſſet, ita vt „polus B, polis H et D, eſſet heterogeneus. Diuari„cabant hae virgae ita vt diſtantia polorum B et HD „aliquot eſſet pollicum. Poſtquam per aliquot vaga „tentamina omnes circumſtantias rite adaptaueram, „ducto filo αβ a ſiniſtra verſus dextram, extremum „α polo B, extremum β polo HD, homogeneum „reddebatur. Contraria vero aſſumta directione, con„trarius oriebatur effectus, et extremum α polo HD, „extremum β polo B, homologum nanciſcebatur ma„gnetiſmum.

COGI-

COGITATIONES
DE AGGERIBVS CONSTRVENDIS.

Auctore

L. EVLERO.

1.

De hoc argumento, quod ampliſſimam rerum maritimarum notitiam poſtulat, commentari nunquam mihi in mentem veniſſet, niſi nuper mihi quaeſtio eo ſpectans cum controuerſia coniuncta eſſet propoſita, vt ſententiam meam aperirem, quandoquidem totum negotium ad Geometriam et Analyſin reuoluebatur. Res autem ita ſe habebat: In prouincia maritima extra aggerem, quo littora ſunt munita, fluctibus tantum terrae erat aggeſtum, vt nouo aggere includendum videretur. Vetus agger ſecundum lineam
Tab. VIII. Fig. 1. AGKE erat ductus, et terra extrinſecus adiecta vsque ad lineam ABCDE patebat, ſecundum quam etiam nouus agger longitudine 1128 perticarum erat extructus: quo pacto totum ſpatium inter veterem nouumque aggerem interiectum in lucrum ceſſit. Conſtitit hoc opus 120000 Thal. et ſingularum linearum menſurae in perticis in figura ſunt adſcriptae.

2. Iam iis, qui hunc aggerem extrui curauerant, obiectum eſt, cum hic agger ſecundum lineam inflexam ABCDE eſſet ductus, a puncto A ad E, eum

eum potius ſecundum arcum circularem, qui aequale ſpatium concluderet, duci oportuiſſe, ſubductoque calculo compertum eſt, hunc aggerem 76 perticis breuiorem futurum fuiſſe, ita vt idem commodum minoribus impenſis, quot ſcilicet extructio aggeris 76 perticas longi requirit, obtineri potuiſſe. Cuius obiectionis ratio huic fundamento inniti videbatur, quod linea circularis inter omnes alias tantumdem ſpatii includentes ſit breuiſſima, ac damnum quidem, ex neglectu huius principii natum, ad 9600 Thal. aeſtimabatur. Controuerſia igitur in hoc verſabatur, num ab Architecto, vel iis, qui hunc aggerem extrui curauerunt, reſtitutio huius damni iure exigi queat? Atque hic quiden videndum eſt, vtrum Architectus ob ignorantiam iſtius principii geometrici peccauerit, an ob alias cauſas ab eo recedere ſit coactus?

3. Principium autem hoc Geometricum non ſolum nunc quidem eſt notiſſimum, ſed etiam naturae noſtrae quaſi ingenitum, vt mihi nullo modo perſuadere queam, eius ignorationem in cauſa fuiſſe, cur Architectus aggerem ſecundum lineam inflexam ABCDE duxerit. Si haec circuli proprietas ipſi incognita fuiſſet, cur aggerem non potius iuxta rectam AE duxit? vel ſi maius ſpatium complecti voluit, cur non latera polygoni cuiusdam regularis eſt ſecutus? Mihi quidem extra omne dubium poſitum videtur, ſi in aggere ducendo quicquam Architecti arbitrio eſſet relictum, illum certe neutiquam hunc ductum ſinuoſum ABCDE electurum fuiſſe. Ei quidem, poſtquam ab

A ad B peruenit, non in mentem incidere non potuit, aggerem recta ab B ad E potius, quam per partes intus vergentes BC, CD, DE continuare; quippe quo modo breuiori aggere adeo maius ſpatium incluſiſſet. Quin hoc nouerit Architectus, quantumuis caeterum fuiſſet Geometriae rudis, dubitari nullo modo poteſt.

4. Cauſa igitur ſubeſſe debet, cur potius tractum hunc infractum ABCDE, quam alium quemcunque, in extruendo aggere ſit ſecutus; atque, etſi omnes rationes Architecturae maritimae mihi non ſunt perſpectae, haec tamen cauſa manifeſto in figura terrae fortuito aggeſtae ſita videtur: agger enim conſtitui nequit, niſi vbi terra ſupra fundum maris iam ſatis fuerit eleuata et confirmata. Loca igitur B, C, D ita videntur comparata, vt regio exterior, ob defectum fundi ſufficientis, aggerem recipere non potuerit. Quodſi ergo rectas lineas AB, BC, CD, DE vt limites ſpectemus, vltra quos aggerem remouere non liceat, cauſa manifeſta eſt, ob quam Architectus aggerem iuxta has ipſas lineas conſtituerit; ſimulque perſpicuum eſt, arcum illum circularem, qui aequale ſpatium includeret, hic adhiberi non potuiſſe, propterea quod alicubi vltra hos limites extendi debuiſſet.

5. Si enim vſpiam hos limites transgredi licuiſſet, equidem non in hoc Architectum reprehenderem, quod aggerem non ſecundum arcum circularem, qui aequale ſpatium includeret, duxerit, ſed potius ideo, quod non eiusmodi arcum ſuper corda AE conſtituerit,

rit, qui etiam maius ſpatium eſſet complexus. Etſi enim hoc modo agger maiorem longitudinem eſſet nactus, tamen ſumtuum incrementum maiori terrae ſpatio in vſum conuertendo fortaſſe fuiſſet compenſatum: ad hoc ſcilicet diiudicandum ſumtus in ſingulas perticas, quibus agger longior redditur, impendendi vna cum ſorte pecuniae ad conſeruationem requiſitae cum pretio ſingularum perticarum quadratarum, quibus terra vſui futura augetur, comparari debent, vt pateat, vtrum augmentum impenſae ſuperet lucri augmentum nec ne? Haec disquiſitio ibi erit neceſſaria, vbi ſatis terrae firmae fuerit aggeſtum, vt quousque libuerit aggerem extendere liceat, qui caſus, etſi a propoſito abhorrere videatur, eum tamen accuratius euoluere haud erit incongruum.

Problema I.

Si extra aggerem APQB tantum terrae a fluctibus maris ſit cumulatum, vt a terminis A et B nouum aggerem ADB quousque libuerit, protendere liceat, definire eum aggerem, qui maximum lucrum ſit allaturus. Fig. 2.

Solutio.

6. Primum obſeruo, huic aggeri nouo ab A ad B ducendo figuram arcus circularis tribui oportere: quamcunque enim aliam figuram haberet, ſemper arcus circularis dari poſſet aequale ſpatium includens, qui, cum ſit breuior, minoresque propterea ſumtus poſtulet, illi omnino erit anteferendus. Sit igitur ADB huiusmodi arcus circularis centrum habens in O, ponaturque

que cordae ſemiſſis $AC = BC = c$, et anguli ad O ſemiſſis $AOD = BOD = \omega$; tum vero ſit ſpatium inter aggerem veterem APQB et rectam AB incluſum $= bb$, quod partem conſtituit ſpatii extructione noui aggeris acquirendi. Hinc ergo fit radius circuli $OA = \frac{c}{\sin.\omega}$ et $OC = \frac{c\cos.\omega}{\sin.\omega}$; ideoque arcus $ADB = \frac{2c\omega}{\sin.\omega}$, qui dat longitudinem aggeris. Porro erit ſector $AOB = \frac{cc\omega}{\sin.\omega^2}$, indeque auferendo triangulum $AOB = \frac{cc\cos.\omega}{\sin.\omega}$, relinquitur area ſegmenti $ADBA = \frac{cc(\omega - \sin.\omega\cos.\omega)}{\sin.\omega^2}$, ita vt ſpatium terrae aggere ADB acquiſitum ſit $= \frac{cc(\omega - \sin.\omega\cos.\omega)}{\sin.\omega^2} + bb$.

7. Ponamus, has menſuras in perticis dari, ſintque ſumtus ad vnam perticam aggeris exſtruendam $= m$ Thal. comprehenſis ſimul impenſis ad conſeruationem, quos caſu expoſito vidimus exſurgere ad 100. Thal. Pretium autem vnius perticae quadratae terrae ſtatuatur $= n$ Thal. quod vtique ab indole terrae et fructibus inde percipiendis pendet. Hinc lucrum deductis impenſis erit

$$\frac{ncc(\omega - \sin.\omega\cos.\omega)}{\sin.\omega^2} + nbb - \frac{2mc\omega}{\sin.\omega},$$

quod, niſi valorem obtineat poſitiuum, praeſtabit res in priſtino ſtatu relinquere, neque exſtructionem noui aggeris ſuſcipere, quoniam ſumtus ſuperarent fructus inde ſperandos.

8. Incipiamus a caſu, quo agger recta ab A ad B ducitur; et quia terrae ſpatium fit $= bb$, et longitudo aggeris $= 2c$, erit lucrum $= nbb - 2mc$. Niſi ergo ſit $bb > \frac{2m}{n}c$, ſeu $c < \frac{nbb}{2m}$, hic nouus agger

dam-

damnum afferret: ex quo duo caſus euoluendi occurrunt; alter, quo $bb < \frac{2m}{n}c$, alter vero quo $bb > \frac{2m}{n}c$; illo caſu non ſine damno agger rectus iuxta cordam AB duceretur, hoc vero lucrum quidem praeberet, ſed videndum eſt, num aggerem ſecundum arcum circularem incuruando non maius lucrum obtineri queat. Priori vero caſu, quo agger rectus cum manifeſto damno eſt coniunctus, inquiri conuenit, an aggeris curuatura damnum non minuatur, ac tandem in lucrum conuerti queat?

9. Sit igitur $bb < \frac{2m}{n}c$, et videamus, ſi angulus $AOB = 2\omega$ minimus capiatur, vtrum detrimentum minuatur nec ne? Ponamus, ſi $\omega = z$, et ob $\omega = z + \frac{1}{6}z^3$ et $\cos. \omega = 1 - \frac{1}{2}zz$, erit $\sin. \omega \cos. \omega = z - \frac{1}{2}z^3$, vnde aeſtimatio lucri oritur:

$$\tfrac{2}{3}nccz + nbb - 2mc(1 + \tfrac{1}{6}zz)$$

quae ergo maior eſt praecedente $nbb - 2mc$, quoniam $\frac{2}{3}nccz > \frac{2}{6}mczz$ ob z minimum. Certum ergo eſt, incuruatione aggeris damnum diminui; an autem continuo minuatur? differentiatio noſtrae formulae oſtendet, quae praebet:

$$\frac{2nccd\omega(\sin.\omega - \omega\cos.\omega)}{\sin.\omega^3} - \frac{2mcd\omega(\sin.\omega - \omega\cos.\omega)}{\sin.\omega^2} - \text{ſeu}$$

$$\frac{2cd\omega(\sin.\omega - \omega\cos.\omega)}{\sin.\omega^3}(nc - m\sin.\omega)$$

Cum igitur ſit $\sin.\omega > \omega\cos.\omega$, aeſtimatio lucri aggerem magis incuruando continuo creſcit, quamdiu eſt $nc > m\sin\omega$.

10. Si eſſet $nc < m$, ſeu $c < \frac{m}{n}$, lucrum eousque tantum creſceret, quoad fieret ſin. $\omega = \frac{nc}{m}$, tum vero, vltra augendo angulum ω, iterum decreſceret, neque vero perpetuo. Nam cum anguli ω, poſtquam vltra rectum, quo caſu arcus ADB fit ſemicirculus, fuerit acutus, ſinus iterum decreſcat, quando infra valorem $\frac{nc}{m}$ decreuerit, lucri aeſtimatio iterum creſcere incipit, idque deinceps continuo ac tantopere, vt tandem in infinitum augeatur. Quare lucrum dato quouis maius obtineri poteſt, dummodo angulus ω maxime obtuſus capiatur, et arcus ADB ſegmentum maius maximi circuli conſtituat. Atque hoc in genere valet, ſiue fuerit $bb > \frac{2m}{n}c$, ſiue $bb < \frac{2m}{n}c$, ita vt neutro caſu verum maximum locum habeat, ſed lucrum continuo maius conſequi liceat.

11. Sin autem aliae circumſtantiae prohibeant, quo minus ſegmentum ADB vltra ſemicirculum augeri poſſit, tum ſemper, dummodo fuerit $c > \frac{m}{n}$, aggerem in figuram ſemicirculi duci conueniet, vt maximum lucrum, vel certe minimum damnum, obtineatur. Tum autem poſito π pro ſemicircumferentia circuli, cuius radius eſt $= 1$, vt $\frac{1}{2}\pi$ angulum rectum denotet, ob $\omega = \frac{1}{2}\pi$, fiet lucri aeſtimatio:

$$\tfrac{1}{2}\pi ncc + nbb - \pi mc$$

quae expreſſio, niſi ſit negatiua, aggerem maxime lucroſum indicat, contra autem praeſtabit, nullum plane aggerem extruere. At ſi fuerit $c < \frac{m}{n}$, ſtatuatur $c = \frac{m}{n}$ſin.ζ, ac tum ſegmentum ADB minus eſſe oportet ſemicirculo,

culo, ſumendo angulum $AOD = \zeta$; vt lucrum maximum vel damnum minimum euadat. Poſito autem $\omega = \zeta$ et $c = \frac{m}{n}\,\text{ſin.}\,\zeta$ fit lucri aeſtimatio:

$$\frac{ncc(\zeta - \text{ſin.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\zeta)}{\text{ſin.}\,\zeta^2} + nbb - \frac{2mc\zeta}{\text{ſin.}\,\zeta} = nbb - \frac{mc}{\text{ſin.}\,\zeta}(\zeta + \text{ſin.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\zeta)$$

ſeu $= nbb - \frac{mm}{n}(\zeta + \text{ſin.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\zeta)$.

Niſi ergo ſit $bb > \frac{mm}{nn}(\zeta + \text{ſin.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\zeta)$ nequidem aggerem ſine damno extruere licet: niſi arcus ſemicirculo maiores admittantur.

12. Haec igitur ſunt fere obſeruanda, quando terra aggeſta nullos limites ponit, vltra quos aggerem extendere non liceat, qui caſus, cum nunquam locum habere poſſit, quandoquidem nunquam aggerem quaſi in infinitum extendere conceditur, reuertor ad ipſam quaeſtionem propoſitam, vbi ratio terrae extra veterem aggerem adiectae non permittit, vt agger vsquam vltra limites per lineas AB, BC, CD, DE deſignatos producatur. Atque hoc quidem caſu manifeſtum Tab.VIII.
eſt, nouo aggere maiorem terrae quantitatem cingi Fig. 1.
non poſſe, quam quae figura eſt repraeſentata; hocque ſpatium aliter in vſum conuerti non poſſe, niſi agger ſecundam ipſos illos limites extruatur; vtcunque enim ab iis recedatur, quoniam non extra eos vagari licet, ſemper minor terrae portio includetur. Quare ſi Architecto propoſitum fuerit, tantum terrae includere, quantum fieri licet, neceſſario aggerem iuxta ipſos limites extruere coactus fuit, neque quicquam in hoc opere ipſi vitio verti poteſt.

13. Hic

13. Hic autem alia quaeſtio meo quidem iudicio grauiſſima oritur, an non vtilius fuiſſet, aliquid de campo includendo remittere, et aggerem intra limites praeſcriptos ita ducere, vt deductis impenſis aggeris a pretio terrae acquiſitae lucrum idque maximum obtineretur. Quaeritur ſcilicet eiusmodi aggeris conſtructio, qui ſi breuior ſit, quam linea limitum ABCDE, p perticis, ſpatium autem includat minus quam id, quod intra limites illos contineretur, qq perticis quadratis, vt lucrum ex diminutione aggeris natum, quod valet mp Thal. maxime ſuperet damnum ob diminutionem terrae ortum, quod aeſtimatur nqq Thal. ſeu vt $mp-nqq$ fiat maximum. Quem in finem, vt res generaliter ac dilucide pertractetur, ſequentia problemata euoluam.

Problema 2.

Fig. 3. Si limites, vltra quos aggerem protendi non liceat, ſint rectae AB et BC, in B datum angulum conſtituentes, determinare rectam PQ, ita vt, ſi agger iuxta rectas AP, PQ, QC ducatur, quo pacto quidem terrae ſpatium PBQ perit, maximum tamen lucrum obtineatur.

Solutio.

14. Quodſi loco aggeris ABC aggere APQC vtamur, in eius longitudine tot perticas lucramur, quot exceſſus laterum BP+BQ iunctim ſumtorum ſupra latus PQ exhibet, quod ergo in expenſis lucrum praebet $=m(BP+BQ-PQ)$ Thal. Contra vero in campo

campo includendo amittimus tot perticas quadratas, quot continet area trianguli PBQ, cuius pretium ad $n.\Delta PBQ$ Thal. eſt conſtituendum. Lineam rectam ergo PQ ita duci oportet, vt haec quantitas $m(BP+BQ-PQ)-n.\Delta PBQ$ maximum valorem adipiſcatur.

15. Ponamus angulum $ABC=\beta$, qui datur, ſintque lineae quaeſitae $BP=x$, et $BQ=y$, erit $PQ=\sqrt{(xx-2xy\,\text{coſ}.\,\beta+yy)}$ quae breuitatis gratia dicatur $=z$, et area trianguli PBQ fit $=\frac{1}{2}xy\,\text{ſin}.\,\beta$; vnde his longitudinibus x et y in perticis expreſſis, habetur lucrum ad pecuniam reductum $=m(x+y-z)-\frac{1}{2}nxy\,\text{ſin}.\,\beta$ Thal. quod maximum eſt reddendum. Vnde, cum ſit

$$dz=\frac{x\,dx-y\,dx\,\text{coſ}.\,\beta-x\,dy\,\text{coſ}.\,\beta+y\,dy}{z},$$

prout vel x vel y vt variabilis tractatur, hae duae aequationes eliciuntur:

$$m\left(1-\frac{x+y\,\text{coſ}.\,\beta}{z}\right)-\frac{1}{2}ny\,\text{ſin}.\,\beta=0$$

$$m\left(1+\frac{x\,\text{coſ}.\,\beta-y}{z}\right)-\frac{1}{2}nx\,\text{ſin}.\,\beta=0.$$

16. Quodſi illa per x, haec vero per y, multiplicetur, differentia ad hanc perducit aequationem:

$$m\left(x-y-\frac{xx+yy}{z}\right)=0=m(x-y)\left(1-\frac{x-y}{z}\right).$$

Cum igitur fieri nequeat $1=\frac{x+y}{z}$, ſeu $z=x+y$, neceſſe eſt, ſit $x=y$, ſeu $BP=BQ$, quam quidem conditionem ipſa quaeſtionis natura ſtatim ſuppeditare potuiſſet, cum nulla ſit ratio, cur linea BP et BQ inaequales capi deberent. Sit ergo $y=x$, et quia tum

ſit $z = \sqrt{(2xx - 2xx \text{coſ.}\,\beta)} = 2x\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\beta$, alterutra illarum aequationum abit in hanc formam:

$$m\left(1 + \frac{\text{coſ.}\,\beta - 1}{2\,\text{ſin.}\,\frac{1}{2}\beta}\right) - \tfrac{1}{2}nx\,\text{ſin.}\,\beta = 0,$$

ſeu $m(1 - \text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\beta) = \tfrac{1}{2}nx\,\text{ſin.}\,\beta$,

vnde ſit $x = \dfrac{2m(1 - \text{ſin.}\,\frac{1}{2}\beta)}{n\,\text{ſin.}\,\beta} = \dfrac{m(1 - \text{ſin.}\,\frac{1}{2}\beta)}{n\,\text{ſin.}\,\frac{1}{2}\beta\,\text{coſ.}\,\frac{1}{2}\beta}$,

ſiue $x = \dfrac{m}{n\,\text{ſin.}\,\frac{1}{2}\beta}\sqrt{\dfrac{1 - \text{ſin.}\,\frac{1}{2}\beta}{1 + \text{ſin.}\,\frac{1}{2}\beta}} = \dfrac{m\,\text{tang.}\,(45^\circ - \frac{1}{4}\beta)}{n\,\text{ſin.}\,\frac{1}{2}\beta}$

17. Problemati ergo ita ſatisfit, vt capiatur:

$$BP = BQ = \frac{2m(1 - \text{ſin.}\,\frac{1}{2}\beta)}{n\,\text{ſin.}\,\beta},$$

ſiquidem lineae BA et BC fuerint maiores, ſin autem hae lineae ſint minores, tum euidens eſt, rectarum BP et BQ alteram breuiori aequalem capi oportere, vnde altera per eandem methodum definietur. Atque hoc modo, ſi limites habeant plures angulos, ſinguli reſecari poterunt, ſiquidem extus ſint verſi, qui anguli enim intus vergunt, vt C et D in fig. 1, ii hanc operationem non admittunt, quin etiam deinceps nouos angulos ad P et Q ortos ſimili modo ſubtendere licebit, quae operatio ſi continuetur, tandem agger figuram quaſi curuilineam conſequetur, quae omnium maximam vtilitatem apportabit. Eam autem circuli arcum fore manifeſtum eſt, quem ſtatim ſequenti modo determinare poterimus.

Pro-

Problema 3.

18. Si limites, vltra quos aggerem protendi non licet, ſint rectae AB et BC, in B datum angulum facientes, determinare eam aggeris figuram APSQC, qua maximum lucrum obtineatur. Tab. VIII. Fig. 4.

Solutio.

Primo patet, vt ante, partes a limitibus reſciſſas BP et BQ aequales eſſe debere, dummodo ipſae lineae BA et BC ſatis ſint longae, vt huiusmodi partes mox definiendas contineant, quod quidem hic aſſumo; ſi enim altera, vel vtraque, breuior fuerit, hic caſus peculiarem euolutionem poſtulat. Tum vero etiam patet, lineam curuam PSQ fore circularem, quam totam intra limites contineri neceſſe eſt; eius ergo centrum erit in recta BO, angulum B biſecante.

Ponamus itaque angulum ABC $= 2\beta$, vt ſit ſemiſſis ABO $=$ CBO $= \beta$; tum vero ſtatuatur BP $=$ BQ $= x$, erit PR $=$ QR $= x\,\text{ſin.}\,\beta$ et BR $= x\,\text{coſ}\,\beta$, vnde conficitur area trianguli PBQ $= xx\,\text{ſin.}\,\beta\,\text{coſ.}\,\beta$. Ponatur porro anguli POQ ſemiſſis BOP $=$ BOQ $= \omega$, erit radius circuli PO $=$ QO $= \frac{x\,\text{ſin.}\,\beta}{\text{ſin.}\,\omega}$, et OR $= \frac{x\,\text{ſin.}\,\beta\,\text{coſ.}\,\omega}{\text{ſin.}\,\omega}$; hincque ipſe arcus PSQ $= \frac{2x\omega\,\text{ſin.}\,\beta}{\text{ſin.}\,\omega}$, et ſector PSQO $= \frac{xx\omega\,\text{ſin.}\,\beta^2}{\text{ſin.}\,\omega^2}$, vnde, cum ſit triangulum POQ $= \frac{xx\,\text{ſin.}\,\beta^2\,\text{coſ.}\,\omega}{\text{ſin.}\,\omega}$, fit area ſegmenti PSQP $= \frac{xx\,\text{ſin.}\,\beta^3}{\text{ſin.}\,\omega^2}(\omega - \text{ſin.}\,\omega\,\text{coſ.}\,\omega)$ et trilinei BPSQB $= xx\,\text{ſin.}\,\beta\,\text{coſ.}\,\beta - \frac{xx\,\text{ſin.}\,\beta^2}{\text{ſin.}\,\omega^2}(\omega - \text{ſin.}\,\omega\,\text{coſ}\,\omega)$.

Quod ſi iam agger non iuxta ipſos limites ABC, ſed lineam mixtam APSQC ducatur, in longitudine

aggeris lucramur $PB + QB - PSQ = 2x - \frac{2x\omega\, ſin.\beta}{ſin.\omega}$, quod lucrum valet $2mx\left(1 - \frac{\omega\, ſin.\beta}{ſin.\omega}\right)$ at in campo perdimus trilineum BPSQB, quod damnum valet $nxx\left(ſin.\beta\, coſ.\beta - \frac{ſin.\beta^2}{ſin.\omega^2}(\omega - ſin.\omega\, coſ.\omega)\right)$. Nunc igitur exceſſus lucri ſupra damnum maximus reddi debet, vnde ob binas variabiles x et ω binas ſequentes nanciſcimur aequationes:

$$\text{I. } m\left(1 - \frac{\omega\, ſin\, \beta}{ſin.\omega}\right) - nx\left(ſin.\beta\, coſ\, \beta - \frac{ſin.\beta^2}{ſin.\omega^2}(\omega - ſin.\omega\, coſ.\omega)\right) = 0$$

$$\text{II. } -\frac{2mx\, ſin.\beta}{ſin.\omega^2}(ſin.\omega - \omega\, coſ.\omega) - \frac{2nxx\, ſin.\beta^2}{ſin.\omega^3}(\omega\, coſ.\omega - ſin.\omega) = 0$$

ſeu $\text{II. } -\frac{2x\, ſin.\beta}{ſin.\omega^3}(ſin.\omega - \omega\, coſ.\omega)(m\, ſin.\omega - nx\, ſin.\beta) = 0.$ Ex hac poſteriori, quia fieri nequit $ſin.\omega - \omega\, coſ.\omega = 0$, fit $m\, ſin.\omega = nx\, ſin.\beta$, ſeu $x = \frac{m\, ſin.\omega}{n\, ſin.\beta}$, qui valor, in priori ſubſtitutus, praebet

$$m\left(1 - \frac{\omega\, ſin.\beta}{ſin.\omega}\right) - m\left(coſ.\beta\, ſin.\omega - \frac{ſin.\beta}{ſin.\omega}(\omega - ſin.\omega\, coſ.\omega)\right) = 0,$$

ſeu $ſin.\omega - \omega\, ſin.\beta - coſ.\beta\, ſin.\omega^2 + \omega\, ſin.\beta - ſin.\beta\, ſin.\omega\, coſ.\omega = 0$, quae, per $ſin.\omega$ diuiſa, dat:

$$1 - coſ.\beta\, ſin.\omega - ſin.\beta\, coſ.\omega = 0, \text{ ſeu } 1\ ſin.(\beta + \omega)$$

vnde concludimus, fore $\beta + \omega = 90°$, ſeu $\omega = 90° - \beta$, ita vt angulus BPO ſit rectus, ideoque arcus PSQ a limitibus AB et BC tangatur: ex quo totus arcus PSQ intra limites cadit, quemadmodum natura rei poſtulat.

Cum igitur ſit $\omega = 90° - \beta$, erit $BP = BQ = x = \frac{m\, coſ.\beta}{n\, ſin.\beta} = \frac{m}{n\, tang.\beta}$, ſeu $x\, tang.\beta = PO = \frac{m}{n}$, ita vt $\frac{m}{n}$ perticae ſemper dent radium circuli PSQ, iuxta quem aggerem duci oportet, qui arcus cum limites tangere debeat,

beat, tota conſtructio eſt facilis. In recta enim BO, angulum ABC biſecante, id punctum O capi debet, e quo perpendiculum in alterum limitem demiſſum OP fiat $=\frac{m}{n}$, eritque O centrum circuli, et OP eius radius.

Tum autem ſumtis $BP=BQ=\frac{m\, cof.\, \beta}{n\, cof.\, \beta}$, erit arcus $PSQ=\frac{m}{n}(\pi-2\beta)$ denotante π ſemicircumferentiam et 2β arcum circuli, angulum ABC metientis, ſinu toto exiſtente $=1$, vnde, lucrum ex aggeris diminutione ortum, eſt $=\frac{mm}{n}(2\cot.\beta-\pi+2\beta)$ Thal. Damnum autem, ob diminutionem ſpatii incluſi natum, eſt $=\frac{mm}{n}(\cot.\beta-\frac{1}{2}\pi+\beta)$, quod lucri ſemiſſi aequatur, ita vt totum lucrum ſit $=\frac{mm}{n}(\beta+\cot.\beta-\frac{1}{2}\pi)$ Thal.

Coroll. 1.

19. Quo maior ergo eſt angulus $ABC=2\beta$, eo minores fiunt partes reſcindendae $BP=BQ$, et plane euaneſcunt, ſi ille angulus ad duos rectos excreſcat. Hinc quo obtuſior fuerit angulus ABC, eo minus hac correctione eſt opus.

Coroll. 2.

20. At ſi angulus ABC fuerit acutus, ideoque β ſemirecto minor, partes reſcindendae $BP=BQ$ maiores fiunt, quam $\frac{m}{n}$, hocque caſu imprimis neceſſe erit, aggerem intra limites contrahi; quia alias ingentes ſumtus fruſtra impenderentur.

Coroll. 3.

21. Quo facilius pro quouis angulo ABC conſtructio aggeris maxime conueniens perſpiciatur, hanc tabellam ſubiungo:

Angulus ABC	Partes reſcindendae $BP = BQ$	Diminutio aggeris	Diminutio terrae incluſae	Lucrum in pecunia
10°	11,430052 $\frac{m}{n}$	19,89304 $\frac{m}{n}$	9,94652 $\frac{m^2}{n^2}$	9,94652 $\frac{mm}{n}$
20	5,671282 $\frac{m}{n}$	8,55004 $\frac{m}{n}$	4,27502 $\frac{mm}{nn}$	4,27502 $\frac{mm}{n}$
30	3,732051 $\frac{m}{n}$	4,84611 $\frac{m}{n}$	2,42305 $\frac{mm}{nn}$	2,42305 $\frac{mm}{n}$
40	2,747477 $\frac{m}{n}$	3,05149 $\frac{m}{n}$	1,52575 $\frac{mm}{nn}$	1,52575 $\frac{mm}{n}$
50	2,144507 $\frac{m}{n}$	2,02008 $\frac{m}{n}$	1,01004 $\frac{mm}{nn}$	1,01004 $\frac{mm}{n}$
60	1,732051 $\frac{m}{n}$	1,36970 $\frac{m}{n}$	0,68485 $\frac{mm}{nn}$	0,68485 $\frac{mm}{n}$
70	1,428148 $\frac{m}{n}$	0,93643 $\frac{m}{n}$	0,46821 $\frac{mm}{nn}$	0,46821 $\frac{mm}{n}$
80	1,191754 $\frac{m}{n}$	0,63817 $\frac{m}{n}$	0,31909 $\frac{mm}{nn}$	0,31909 $\frac{mm}{n}$
90	1,000000 $\frac{m}{n}$	0,42920 $\frac{m}{n}$	0,21460 $\frac{mm}{nn}$	0,21460 $\frac{mm}{n}$
100	0,839099 $\frac{m}{n}$	0,28193 $\frac{m}{n}$	0,14097 $\frac{mm}{nn}$	0,14097 $\frac{mm}{n}$
110	0,700207 $\frac{m}{n}$	0,17868 $\frac{m}{n}$	0,08934 $\frac{mm}{nn}$	0,08934 $\frac{mm}{n}$
120	0,577350 $\frac{m}{n}$	0,10750 $\frac{m}{n}$	0,05375 $\frac{mm}{nn}$	0,05375 $\frac{mm}{n}$
130	0,466308 $\frac{m}{n}$	0,05995 $\frac{m}{n}$	0,02997 $\frac{mm}{nn}$	0,02997 $\frac{mm}{n}$
140	0,363970 $\frac{m}{n}$	0,02981 $\frac{m}{n}$	0,01490 $\frac{mm}{nn}$	0,01490 $\frac{mm}{n}$
150	0,267949 $\frac{m}{n}$	0,01230 $\frac{m}{n}$	0,00615 $\frac{mm}{nn}$	0,00615 $\frac{mm}{n}$
160	0,176327 $\frac{m}{n}$	0,00358 $\frac{m}{n}$	0,00179 $\frac{mm}{nn}$	0,00179 $\frac{mm}{n}$
170	0,087488 $\frac{m}{n}$	0,00044 $\frac{m}{n}$	0,00022 $\frac{mm}{nn}$	0,00022 $\frac{mm}{n}$
180	0,000000 $\frac{m}{n}$	0,00000 $\frac{m}{n}$	0,00000 $\frac{mm}{nn}$	0,00000 $\frac{mm}{n}$

Coroll. 4.

Coroll. 4.

22. Tota haec determinatio pendet a pretio aggeris, vnam perticam longi, quod m Thaleros poſuimus, et a pretio vnius perticae quadratae agri, quod n Thal. ſumſimus, quae duo pretia prouti variauerint, exſtructio aggeris maxime idonea inde determinationem conſequitur.

Scholion 1.

23. Caſu ergo propoſito, quo angulus B eſt fere angulus rectus, ductum aggeris ita intra hunc angulum ſtatui conueniet, vt reſciſſis rectis $BP = BQ = \frac{m}{n}$ pertic. a P ad Q arcus circuli ducatur, quem rectae B P et B Q tangunt: haecque conſtructio tanto vtilior erit, quam ſi agger ſecundum ipſos limites duceretur, vt lucrum futurum ſit $= \frac{2146}{10000} \cdot \frac{mm}{n}$ Thal. Cum igitur, vti vidimus, vna pertica aggeris conſtet 100 Thal. ſi perticam quadratam agri aeſtimemus ad 1 Thal. vt ſit $m = 100$ et $n = 1$, abſcindi oportet $BP = BQ = 100$ pert. aggerque a P ad Q per arcum circularem PSQ extruatur; ſicque lucrum obtinebitur $= 2146$ Thal. Haec ſcilicet conſtructio maxime praeferenda eſt ei, qua agger ſecundum ipſos limites P B et Q B ad ipſum angulum B vsque produceretur; minor quidem terrae portio hoc modo includitur, deficiens 2146 perticis quadratis, quarum pretium 2146 Thal aeſtimatur: at agger hoc modo breuior fit $42\frac{92}{100}$ perticis, quae ſumtum $= 4292$ Thal. requirent, vnde lucrum obtinetur 2146 Thal. Circa reliquos angulos C et D, quoniam intus vergunt, nulla emendatio locum habet, vtcunque enim agger a Q et E intra hos limites

mites conſtitueretur, non ſolum minor campus concluderetur, ſed etiam agger longior euaderet. Vnde Architectus ideo tantum eſt reprehendendus, quod aggerem vsque ad angulum extus vergentem B extenderit, ſicque ſumtus inutiles 2146 Thal. erogarit, quos euitare licuiſſet; verum haec ſolertia ab homine Geometriae ſublimioris experte non eſt exigenda.

Scholion 2.

24. Comparemus etiam caſum, quo agger ſecundum ipſam rectam AE duceretur, cum caſu, quo iuxta limites ABCDE eſt ductus, viſuri, vtrum lucrum, an damnum, inde fuiſſet expectandum. Hoc autem modo agger breuior prodiiſſet 86 perticis, vnde ſumtuum diminutio fuiſſet 8600 Thal. Periiſſet autem omnis terra, inter limites ABCDE et rectam AE contenta, quae cum ſit 44237 perticarum quadratarum, damnum totidem Thalerorum eſſet aeſtimandum, vnde agger iuxta limites ductus praeſtat aggere ſecundum rectam AE ducto, diſcrimine exiſtente 35637 Thal. Verum, vti iam vidimus, magis expedit arcus PSQ a limitibus recedere, quam ipſos limites ſequi, lucro exiſtente 2146 Thal. Hoc modo tota aggeris longitudo foret 1085 perticarum, cuius extructio, vti poſuimus, poſtulat 108500 Thal. ac nunc quidem videndum eſt, an agri ſic acquiſiti quantitas, quae eſt ſpatium inter veterem aggerem AGKE et nouum APSQCDE, ſuperet 108500 perticas quadratas nec ne? ſi enim minor eſſet, praeſtitiſſet omnino extructione noui aggeris ſuperſedere; eatenus enim tantum

hoc

hoc opus ſuſcipere operae pretium fuiſſet, quatenus quantitas terrae acquiſitae ſuperaſſet 108500 perticas quadratas, ſiquidem pretium vnius perticae quadratae ad vnum Thalerum conſtituatur. Praeterea vero etiam perpendendum eſt, extructo nouo aggere, veterem aggerem nullos amplius ſumtus ad conſeruationem requirere; cuius commodi ratio etiam in aeſtimatione lucri eſt habenda: impenſae ſcilicet noui aggeris tanto minores ſunt cenſendae. Cum igitur agger ſecundum ipſos limites ſit extructus, qui ad 1128 perticas porriguntur, dummodo maior terrae quantitas quam 112800 pert. quadratarum fuerit acquiſita, lucrum inde eſt comparatum, quod etſi non fuerit maximum, tamen Architecto vitio verti non poteſt, atque perpetuo extructio nouorum aggerum ſecundum haec principia diiudicanda videtur, poſtquam tam ſumtus in ſingulas aggeris perticas, quam pretium cuiusque perticae quadratae fuerit conſtitutum.

Scholion. 3.

25. Reuertamur ad noſtrum problema, quo limites duabus rectis AB et BC contineri aſſumſimus, ac perpendamus caſum, quo altera harum duarum rectarum, puta BC, minor eſt quam pars abſcindenda, quae ſupra eſt inuenta $= \frac{m}{n}\cot.\beta$, exiſtente altera $BA > BC$. Atque hic facile perſpicitur, arcum circuli per ipſum punctum C tranſire debere; ſecet is ergo alteram in P, ac pariter euidens eſt, rectam PB huius arcus tangentem eſſe debere; ſi enim non tangeret, a puncto quodam

 rectae

rectae BA a B remotiori duci poſſet ad C arcus rectam BA tangens, aequale ſpatium ab angulo reſcindens, quae cum aggerem breuiorem daret, vtique eſſet praeferenda. Manente ergo angulo $ABC = 2\beta$, ſit recta $BC = b$, et quaeſita $BP = x$: Ducta PO ad BP normali, ſit O centrum arcus PSC, vnde OR cordam CP biſecans ſimul angulum COP biſecabit, et ad CP erit normalis. Statuatur angulus $COR = POR = \omega$, erit $CPB = \omega$, et $PCB = 180^\circ - 2\beta - \omega$, vnde colligitur $BP = x = \frac{b\,\textit{ſin.}(2\beta+\omega)}{\textit{ſin.}\,\omega}$ et $CP = \frac{b\,\textit{ſin.}\,2\beta}{\textit{ſin.}\,\omega}$, vt ſit $PR = \frac{b\,\textit{ſin.}\,2\beta}{2\,\textit{ſin.}\,\omega}$, et $PO = \frac{b\,\textit{ſin.}\,2\beta}{2\,\textit{ſin.}\,\omega^2}$, atque $OR = \frac{b\,\textit{ſin.}\,2\beta\,\textit{coſ.}\,\omega}{2\,\textit{ſin.}\,\omega^2}$. Hinc prodit arcus $PSC = \frac{b\,\omega\,\textit{ſin.}\,2\beta}{\textit{ſin.}\,\omega^2}$, et ſector $OPSC = \frac{bb\,\omega\,\textit{ſin.}\,2\beta^2}{4\,\textit{ſin.}\,\omega^4}$, vnde, ablato triangulo $OCP = \frac{bb\,\textit{ſin.}\,2\beta^2\,\textit{coſ.}\,\omega}{4\,\textit{ſin.}\,\omega^3}$, relinquitur ſegmentum $CSPC = \frac{bb\,\textit{ſin.}\,2\beta^2}{4\,\textit{ſin.}\,\omega^4}(\omega - \text{ſin.}\,\omega\,\text{coſ.}\,\omega)$. Cum iam ſit $BC + BP = b\left(1 + \frac{\textit{ſin.}(2\beta+\omega)}{\textit{ſin.}\,\omega}\right)$, diminutio aggeris eſt $= b\left(1 + \frac{\textit{ſin.}(2\beta+\omega)}{\textit{ſin.}\,\omega} - \frac{\omega\,\textit{ſin.}\,2\beta}{\textit{ſin.}\,\omega^2}\right)$; et ob aream trianguli $CBP = \frac{1}{2} b x\,\text{ſin.}\,2\beta = \frac{bb\,\textit{ſin.}\,2\beta\,\textit{ſin.}(2\beta+\omega)}{2\,\textit{ſin.}\,\omega}$, diminutio campi includendi $= \frac{bb\,\textit{ſin.}\,2\beta}{4\,\textit{ſin.}\,\omega^4}(2\,\text{ſin}\,\omega^3\,\text{ſin.}(2\beta+\omega) - \text{ſin.}\,2\beta(\omega - \text{ſin.}\,\omega\,\text{coſ.}\,\omega))$. Quare lucrum erit:

$$mb\left(1 + \frac{\textit{ſin.}(2\beta+\omega)}{\textit{ſin.}\,\omega} - \frac{\omega\,\textit{ſin.}\,2\beta}{\textit{ſin.}\,\omega^2}\right) - \tfrac{1}{4} nbb\,\text{ſin}\,2\beta\left(\frac{2\,\textit{ſin.}(2\beta+\omega)}{\textit{ſin.}\,\omega} - \frac{\textit{ſin.}\,2\beta(\omega - \textit{ſin.}\,\omega\,\textit{coſ.}\,\omega)}{\textit{ſin.}\,\omega^4}\right),$$

cuius differentiale nihilo aequatum et per $\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi - \text{ſin}\,\Phi$ diuiſum praebet $nb\,\text{ſin.}\,2\beta = 2m\,\text{ſin.}\,\omega^2$, vnde fit $PO = \frac{m}{n}$ et

$$\text{ſin.}\,\omega = \sqrt{\frac{nb\,\textit{ſin.}\,2\beta}{2m}} = \sqrt{\frac{nb\,\textit{ſin.}\,\beta\,\textit{coſ.}\,\beta}{m}}, \text{ et } x = \frac{b\,\textit{ſin.}(2\beta+\omega)}{\textit{ſin.}\,\omega},$$

vbi, cum ſit $b < \frac{m\,\textit{coſ.}\,\beta}{n\,\textit{ſin.}\,\beta}$, erit $\text{ſin.}\,\omega < \text{coſ.}\,\beta$ ſeu $\omega < 90 - \beta$ ideo-

ideoque $BP > BC$. Hinc ſequitur, ſi eſſet $BA < BP$ tum arcum circuli per ambo puncta A et C duci convenire, vt rectam BA tangat; tum ſcilicet magis lucrum obtinere non licet.

Problema 4.

26. Si limites, quos aggerem transgredi non oportet, tribus lineis rectis AB, BC, CD conſtent, definire aggeris conſtructionem maxime lucroſam. Fig. 6.

Solutio.

Sit, vt ante, m pretium aggeris vnam perticam longi, et n pretium vnius perticae quadratae agri, ponatur angulus $ABC = 2\beta$ et angulus $BCD = 2\gamma$, ac ſi fuerit $BC > \frac{m}{n}(\cot.\beta + \cot.\gamma)$ ſolutionem praecedens problema ſuppeditat. Primum enim circa B abſcindantur portiones $BP = BQ = \frac{m}{n}\cot.\beta$, et circa C portiones $CR = CS = \frac{m}{n}\cot.\gamma$; deſcribanturque, tam per puncta P et Q, quam per R et S, eodem radio $= \frac{m}{n}$ pert. bini arcus circulares PQ et RS limites tangentes; quo facto aggerem ſecundum lineam mixtam APQRSD duci conueniet. Hoc modo maximum lucrum acquiretur, quod maius erit, quam ſi agger iuxta ipſos limites duceretur, exceſſu exiſtente:

$$\frac{mm}{n}(\beta + \gamma + \cot.\beta + \cot.\gamma - \pi);$$

aggeris enim longitudo diminuetur quantitate:

$$\frac{2m}{n}(\beta + \gamma + \cot.\beta + \cot.\gamma - \pi) \text{ pert.}$$

at agri incluſi ſpatium minuitur quantitate:

$$\frac{mm}{nn}(\beta + \gamma + \cot.\beta + \cot.\gamma - \pi) \text{ pert. II.}$$

Quodſi lineae BA et CD vel alterutra earum minor fuerit quam portio inde reſcindenda, puncta P et S in A et D capi oportet, et arcus PQ et SR ſemper eodem radio $= \frac{m}{n}$ pert. deſcribendi tantum lineam BC tangent. Hoc caſu non opus eſt, vt ſit $BC > \frac{m}{n}(\cot.\beta + \cot.\gamma)$ ſed ſufficit, ſi BC non fuerit minor quam BQ et CR, quippe quae partes BQ et CR minores erunt quam caſu praecedente. Si alteruter angulorum B et C intus vergat, in eo nulla correctio locum habet, ſed tantum angulus extus vergens arcu erit ſubtendendus.

Si fuerit praeciſe $BC = \frac{m}{n}(\cot.\beta + \cot.\gamma)$, puncta Q et R conuenient, prodibitque vnus arcus continuus PQRS limites tangens, iuxta quem aggerem conſtrui oportet. Sin autem recta BC minor fuerit quam $\frac{m}{n}(\cot.\beta + \cot.\gamma)$ neque rectae BA et CD tam ſint paruae, vt praecedens ſolutio locum habere poſſet, ſequenti modo ſolutio eruetur:

Fig. 7. Cum euidens ſit, aggerem intra rectam BC cadere, is etiam maximi proprietate gaudebit, ſi rectae AV et BV ad concurſum V productae limites conſtituerent. Erit autem angulus $V = 2\beta + 2\gamma - 180°$; vnde poſita recta $BC = b$, vt ſit $b < \frac{m}{n}(\cot.\beta + \cot.\gamma)$ pert. erit $BV = \frac{b\,\sin.\,2\gamma}{\sin.(2\beta + 2\gamma - 180°)} = -\frac{b\,\sin.\,2\gamma}{\sin.(2\beta + 2\gamma)}$ et $CV = -\frac{b\,\sin.\,2\beta}{\sin.(2\beta + 2\gamma)}$.

Tum

Tum capiatur $VP = VS = \frac{m}{n}\cot.(\beta+\gamma-90^\circ) = -\frac{m}{n}\operatorname{tang}.(\beta+\gamma)$ et per puncta P et S radio $= \frac{m}{n}$ pert. ducatur arcus circuli PQRS, limites AB et CD in P et S tangens, qui dabit ductum aggeris. Quodſi ponamus $b = \frac{\lambda m}{n}(\cot.\beta + \cot.\gamma) = \frac{\lambda m\, ſin.(\beta+\gamma)}{n\, ſin.\beta\, ſin.\gamma}$ vt ſit $\lambda < 1$, reperitur:

$$BP = \frac{m}{n}(\lambda \cot.\beta - (1-\lambda)\operatorname{tang}.(\beta+\gamma))$$

$$CS = \frac{m}{n}(\lambda \cot.\gamma - (1-\lambda)\operatorname{tang}.(\beta+\gamma)).$$

Quantum autem lucrum hoc modo obtineatur, ita cognoſcetur: Cum ſit

$$VP + VS - PQRS = \frac{2m}{n}(\beta+\gamma - \operatorname{tang}.(\beta+\gamma) - \pi) \text{ et}$$

$$VPQRSV = \frac{mm}{nn}(\beta+\gamma - \operatorname{tang}.(\beta+\gamma) - \pi)$$

tum vero $BV + CV - BC = -\frac{b(ſin.2\beta + ſin.2\gamma - ſin.(2\beta+2\gamma))}{ſin.(2\beta+2\gamma)}$

ſeu $BV + CV - BC = -\frac{2\lambda m}{n}(\cot.\beta + \cot.\gamma + \operatorname{tang}.(\beta+\gamma))$

$$= -\frac{2\lambda m}{n}\cot.\beta\cot.\gamma\operatorname{tang}.(\beta+\gamma)$$

qua expreſſione inde ablata, prodit aggeris diminutio:

$$PB + BC + CS - PQRS = \frac{2m}{n}(\beta+\gamma+\lambda\cot.\beta+\lambda\, coſ.\gamma - (1-\lambda)\operatorname{tang}.(\beta+\gamma) - \pi)$$

$$= \frac{2m}{n}(\beta+\gamma-(1-\lambda\cot.\beta\cot.\gamma)\operatorname{tang}.(\beta+\gamma) - \pi)$$

Deinde ob $\triangle BVC = -\frac{bb\, ſin.2\beta\, ſin.2\gamma}{2\, ſin.(2\beta+2\gamma)} = -\frac{\lambda\lambda mm}{nn}\cot.\beta\, coſ.\gamma\operatorname{tang}.(\beta+\gamma)$

fit campi includendi diminutio: $BPQRSC =$

$$\frac{mm}{nn}(\beta+\gamma-(1-\lambda\lambda\cot.\beta\, coſ.\gamma)\operatorname{tang}.(\beta+\gamma) - \pi) =$$

$$\frac{mm}{nn}(\beta+\gamma+\lambda\lambda\cot.\beta+\lambda\lambda\cot.\gamma-(1-\lambda\lambda)\operatorname{tang}.(\beta+\gamma) - \pi)$$

 vnde

vnde totum lucrum aeſtimandum erit:

$\frac{mm}{n}(\beta+\gamma-\text{tang.}(\beta+\gamma)+\lambda(2-\lambda)\cot.\beta\,\text{coſ.}\gamma\,\text{tang.}(\beta+\gamma)-\pi)=$

$\frac{mm}{n}(\beta+\gamma+\lambda(2-\lambda)(\cot.\beta+\text{coſ.}\gamma)-(1-\lambda)^2\text{tang.}(\beta+\gamma)-\pi).$

Coroll. 1.

27. Si rectae AB et DC extus conuergant, vti in figura exhibentur, erit $2\beta+2\gamma>180°$, ideoque $\beta+\gamma>90°$, vnde tang. $(\beta+\gamma)$ fit negatiua, hincque $BP>\frac{\lambda m}{n}\cot.\beta$ et $CS>\frac{\lambda m}{n}\cot.\gamma$. Qui etiam poſito $\beta+\gamma=90°+\theta$, vt ſit $V=2\theta$ habebitur $BP=\frac{m}{n}(\cot.\beta+\frac{(1-\lambda)\text{coſ}.\gamma}{\text{ſin}.\beta\,\text{ſin}.\theta})$ et $CS=\frac{m}{n}(\cot.\gamma+\frac{(1-\lambda)\text{coſ}.\beta}{\text{ſin}.\gamma\,\text{ſin}.\theta})$ adeoque $BP>\frac{m}{n}\cot.\beta$ et $CS>\frac{m}{n}\cot.\gamma$.

Coroll. 2.

28. Hoc ergo caſu, quo $\beta+\gamma=90°+\theta$, nihil obſtat, quo minus ſolutio inuenta applicari poſſit, dummodo rectae BA et CD ſuperent valores pro BP et CS inuentos. Sin autem altera vel vtraque fuerit breuior, arcus circuli radio $\frac{m}{n}$ deſcribendi per terminum breuioris ita duci debet, vt longiorem tangat; at ſi ne hoc quidem fieri queat, per vtrumque terminum A et D ita ducatur, vt longiorem tangat.

Coroll. 3.

29. Quodſi autem fuerit $\beta+\gamma=90°+\theta$, et ſolutionem inuentam applicare liceat, erit aggeris diminutio:

$$\frac{2m}{n}(\beta+\gamma+\cot.\beta+\text{coſ.}\gamma-\pi+(1-\lambda)\cot.\beta\cot.\gamma\cot.\theta)$$

Campi

Campi autem includendi decrementum

$$\frac{mm}{nn}(\beta+\gamma+\cot.\beta+\cot.\gamma-\pi+(1-\lambda\lambda)\cot.\beta\cot.\gamma\cot.\theta)$$

ita vt verum lucrum ſit

$$\frac{mm}{n}(\beta+\gamma+\cot.\beta+\cot.\gamma-\pi+(1-\lambda)^2\cot.\beta\operatorname{coſ}.\gamma\cot\theta).$$

Coroll. 4.

30. At ſi rectae BA et CD intus conuergant, quo caſu angulus θ fit negatiuus, partes BP et CS minores euadunt, quam caſu $\lambda = 1$, ideoque arcus circuli vltra rectam BC porrigeretur, quod cum naturae aduerſetur, hoc caſu verum maximum locum non inuenit. Quod etiam inde patet, quod intra rectas BA et CD conuergentes circulum radii $=\frac{m}{n}$, qui vtramque tangat, deſcribere non licet.

Scholion 1.

31. Antequam caſum rectarum BA et CD intus conuergentium perpendamus, conſideremus caſum, quo ſunt parallelae, ideoque $\beta+\gamma = 90°$, et $\theta = 0$, atque $BC = b = \frac{\lambda m}{n\,\mathrm{ſin}.\beta\,\mathrm{ſin}\,\gamma} = \frac{2\lambda m}{n\,\mathrm{ſin}.\,2\beta}$, exiſtente $\lambda < 1$. Fig. 8.
Sit autem $BA > \frac{m}{n}\cot.\beta$ et $CD > \frac{m}{n}\cot\gamma$; per ſolutionem iam partes BP et CD capi deberent infinitae; quod cum fieri nequeat, arcum circularem ita per terminum breuiorem D duci conueniet, vt alteram rectam BA tangat, radio $=\frac{m}{n}$, ac ſi eſſet etiam $BA < BP$, alio radio circulus per A et D duci deberet, quia rectam BA in A tangeret. Quantum igitur hinc lucrum oriatur, generalius inueſtigemus: Sit $CD = c$, ac demiſſo

miſſo ex D in BA perpendiculo DM, erit $DM = b\,\text{ſin.}\,2\beta = \frac{2\lambda m}{n}$, et $BM = c + b\,\text{coſ.}\,2\beta$; ponatur radius circuli $DO = MN = z$, erit $DN = b\,\text{ſin.}\,2\beta - z$, et $ON = \sqrt{(2bz\,\text{ſin.}\,2\beta - bb\,\text{ſin.}\,2\beta^2)}$; vocetur autem angulus $DON = \Phi$, erit $\frac{b\,\text{ſin.}\,2\beta - z}{z} = \text{ſin.}\,\Phi$ et $z = \frac{b\,\text{ſin.}\,2\beta}{1+\text{ſin.}\,\Phi}$; ideoque $ON = PM = \frac{b\,\text{ſin.}\,2\beta\,\text{coſ.}\,\Phi}{1+\text{ſin.}\,\Phi}$; hinc arcus PQRD $= \frac{(90^\circ + \Phi)\,b\,\text{ſin.}\,2\beta}{1+\text{ſin.}\,\Phi}$. Quare ob $BP = c + b\,\text{coſ.}\,2\beta + \frac{b\,\text{ſin.}\,2\beta\,\text{coſ.}\,\Phi}{1+\text{ſin.}\,\Phi}$, reſpectu caſus, quo agger ſecundum ipſos limites duceretur, in longitudine aggeris lucraremur $b + 2c + b\,\text{coſ.}\,2\beta + \frac{\beta\,\text{ſin}\,2\beta\,\text{coſ.}\,\Phi}{1+\text{ſin.}\,\Phi} - \frac{(\frac{1}{2}\pi + \Phi)\,b\,\text{ſin}\,2\beta}{1+\text{ſin.}\,\Phi}$

Porro eſt ſector $DOP = \frac{(\frac{1}{2}\pi - \Phi)\,bb\,\text{ſin.}\,2\beta^2}{2(1+\text{ſin.}\,\Phi)^2}$, area autem $BCDOP = bc\,\text{ſin.}\,2\beta + \frac{1}{2}bb\,\text{ſin.}\,2\beta\,\text{coſ.}\,2\beta + \frac{bb\,\text{ſin.}\,2\beta^2\,\text{coſ.}\,\Phi}{(1+\text{ſin.}\,\Phi)^2} + \frac{bb\,\text{ſin.}\,2\beta^2\,\text{ſin.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi}{2(1+\text{ſin.}\,\Phi)^2}$, vnde in magnitudine campi perdimus:

$$bc\,\text{ſin.}\,2\beta + \tfrac{1}{2}bb\,\text{ſin.}\,2\beta\,\text{coſ.}\,2\beta + \frac{bb\,\text{ſin.}\,2\beta^2\,\text{coſ.}\,\Phi}{(1+\text{ſin.}\,\Phi)^2}$$
$$+ \frac{bb\,\text{ſin.}\,2\beta^2\,\text{ſin.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi}{2(1+\text{ſin.}\,\Phi)^2} - \frac{(\frac{1}{2}\pi + \Phi)\,bb\,\text{ſin.}\,2\beta^2}{2(1+\text{ſin}\,\Phi)^2}.$$

Hinc igitur poſito Φ conſtante ſtatim patet, eo maius fore lucrum, quo maiorem capere liceat lineam $CD = c$; ea enim elemento dc aucta, lucri augmentum erit $dc(2m - nb\,\text{ſin.}\,2\beta) = 2(1-\lambda)\,m\,dc$. Cum autem c detur, ſumto angulo Φ variabili, lucrum erit maximum, ſi

mb

$$mb\,\text{ſin.}\,2\beta\left(d.\frac{\text{coſ.}\Phi}{1+\text{ſin}\,\Phi}-d.\frac{\frac{1}{2}\pi+\Phi}{1+\text{ſin.}\Phi^2}\right)=$$

$$nbb\,\text{ſin.}\,2\beta^2\left(d\frac{\text{coſ.}\Phi}{(1+\text{ſin.}\Phi)^2}+\tfrac{1}{2}d.\frac{\text{ſin}\,\Phi\,\text{coſ}\,\Phi}{(1+\text{ſin.}\Phi)^2}-\tfrac{1}{2}d.\frac{\frac{1}{2}\pi+\Phi}{(1+\text{ſin.}\Phi)^2}\right),$$

quae aequatio euoluta commode ad hanc reducitur:

$m=\frac{n\,b\,\text{ſin.}\,2\beta}{1+\text{ſin.}\Phi}=nz$, ita vt ſit $z=\frac{m}{n}$

vti quidem iam ex ſuperioribus liquet. Erit ergo

$1+\text{ſin.}\Phi=\frac{n\,b\,\text{ſin.}\,2\beta}{m}=2\lambda$ et ſin $\Phi=2\lambda-1$.

Quia $\lambda<1$, ponatur $\lambda=\text{coſ.}\zeta^2$, erit ſin. $\Phi=2\,\text{coſ}\,\zeta^2-1=\text{coſ.}\,2\zeta$, et $\Phi=90^\circ-2\zeta=\frac{1}{2}\pi-2\zeta$; hinc coſ. $\Phi=\text{ſin}\,2\zeta$.

Diminutio ergo aggeris ſecundum longitudinem ob $b=\frac{2\,m\,\text{coſ.}\,\zeta^2}{n\,\text{ſin.}\,2\beta}$ erit $=2c+\frac{2\,m\,\text{coſ.}\,\zeta\,\text{coſ.}(\beta-\zeta)}{n\,\text{ſin.}\,\beta}-\frac{m}{n}(\pi-2\zeta)$ et diminutio agri incluſi:

$$\frac{2\,m\,c\,\text{coſ.}\,\zeta^2}{n}+\frac{m\,m}{n\,n}\left(\text{ſin.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\zeta+\frac{2\,\text{coſ.}\,\zeta^3\,\text{coſ.}(2\beta-\zeta)}{\text{ſin.}\,2\beta}-\tfrac{1}{2}(\pi-2\zeta)\right).$$

Scholion 2.

32. Quod ſi lineae BA et CD intus conuergant, vt ſit $\beta+\gamma=90^\circ-\theta$, et BC $=b<\frac{m\,\text{coſ.}\,\theta}{n\,\text{ſin.}\beta\,\text{ſin.}\gamma}$, quaeſtio eſt magis difficilis, verumtamen ex principiis hactenus ſtabilitis expediri poterit. Huc imprimis pertinet caſus, quo inſula quaedam figurae et magnitudinis cuiuscunque aggere eſſet cingenda, cuius figura ſi fuerit polygonum, cuius ſingula latera ſuperent quantitatem $\frac{m}{n}(\text{cot.}\,\frac{1}{2}p+\text{cot}\,\frac{1}{2}q)$ exiſtentibus, p et q angulis cuique lateri adiacentibus, quaeſtio nullam habet diffi-

cultatem, dum ſinguli anguli arcubus circuli, cuius radius eſt $= \frac{m}{n}$ pert. ita ſubtendi debent, vt latera fiunt tangentes At ſi quaedam latera, vel adeo omnia, ſint minora, peculiari ſolutione eſt opus, cui autem hic non immoror, cum quaeſtio digna videatur, quae omni cura euoluatur, et ad vſum communem accommodetur; quod opus, vel aliis perficiendum relinquo, vel in tempus magis opportunum mihi reſeruo.

PHYSI-

PHYSICA.

AD OBSERVATIONES ET EXPERIMENTA DE MERCVRIO EX MANVSCRIPTIS *HERMANNI BOERHAAVE* SVPPLEMENTVM I.

recenſente

CAROLO FRIDERICO KRVSE.

Anno 1734. obtulit Collegio Philoſophorum in Brittannia obſeruationes et experimenta de argento viuo (*a*), anno vero inſequenti Academiae Regiae Scientiarum in Galliis ſuper eadem re (*b*) exhibuit quaedam ſummus *Hermannus Boerhaaue*.

Ex vtrisque caſti, vere Phyſici obſeruatis conſtitit immutabilis prorſus natura Hydrargyri, dum variata interim ſpecie, in nouas formas mutatus appareret.

Anno 1737. data ad Senatum Sapientum in Brittannia diſſertatione (*c*) recitauit et alios, quos illi vltro explorando labores, incredibili ſumtu et patientia adhibuit. Vnde, detecta eiusdem conſtantia, auri ſimul indoles perſpecta habetur.

(*a*) Philoſophical Transactions No. 430. pag. 145.

(*b*) Memoires de l'Acad Royale des Scienc. 1736. pag. 539. et Philoſoph. Transact. No. 445. pag 343.

(*c*) Philoſoph. Transact. No. 444. pag. 368.

Nacto otio plura promiſerat; promiſſis praeuenere cunctis flebilia bonis fata (*d*). Moriens, tradiderat manuſcripta nepotibus, *Hermanno* (*e*) et *Abrahamo* (*f*) *Kaau Boerhaaue*, quibus praematura morte ereptis ad me peruenere ſcripta manu viri omni laude maioris.

Legens interim, perlegens, faſtidioſa, herculei laboris taedia, piaculum duxi, acto labore adeo iucunda vnice in muſeo ſeruare. Non pauca enim docent atque prioribus, iam editis, collata, lucem affundunt, dicta firmant, veritatem adſerunt.

In prima, ad Illuſtrem Brittanniae Eruditorum ſocietatem, diſſertatione lucide aſſeruit *Boerhaauius*, per ſolos motus mechanicos Mercurium ex mitiſſimo fieri acrem, ex inſipidiſſimo acquirere ſaporem, ex ſplendidiſſimo fieri nigrum, ex fluido conſiſtentem; ex eadem vero conſtat, ſola ignis actione redire iterum in priſti-

(*d*) 1738. Septembr. 23. die.

(*e*) Socero meo, quem 7. Octobr. 1753. fato functum lugeo. Hic Inuictiſſimae *Eliſabethae*, Auguſtae, Piae, Felicis, Orbis Ruſſici Imperatricis, Conſiliarii intimi, Archiatrorum Comitis et ſupremi, per vniuerſum Imperium, rei medicae Directoris munere fungens, feliciſſimi, quem vnquam Ruſſica tellus aluit, Medici nomen meruit.

(*f*) *Hermanni* frater, iunior, cuius ſcripta meritaque vel mediocriter in litteris medicis verſatis, non latent. Hic, febre acuta cum delirio perpetuo correptus, vndecima morbi die, 6. Iulii 1758. eſſe deſiit. Vita eius paucis, aſt veriſſimis, lineis delineata eſt in Summario Nouor. Commentar. huius Academiae Tom. IV.

priſtinam formam, ludere perſonas mutatas, laruaque depoſita, alis et talaribus volare mercurium, nec tormentis his mutari.

Ibidem docuit, aetatem qui hermetica in arte conſumpſerat, auctor, neque feces ponere ignis tormentis, neque leuiorem fieri mercurium., cuius ad aquae, aceti ve bullientis calorem ſubortas mutationes eodem in ſcripto recenſet.

Ex iis autem, quae ad Regiam in Galliis florentem Academiam dedit, liquido apparet, nec in igne diutiſſime digerendo, ſiue renouatus oſcillet aer, ſiue repagulis arceatur, tranſire ſolidum in metallum, argentum viuum.

Docuit porro, ibidem, ex plumbo per ſales fixos haud generari mercurium, quidquid clamant Chymicorum nobile par, Pater et filius *Helmontii*: quidquid offert *Becherus* (*g*). Nec illud praeſtare acetum ſtillatitium, vt perhibet ſubtiliſſimus *Iſaacus Hollandus*, primus trium principiorum chemicorum auctor, (*h*) labore fideliore didicit, docuitque caſte, ſuosque

---

(*g*) Neque obeſſe puto, quae hac de re exhibuit celeberrimus *Groſſe*. Vid. eius Recherches ſur le Plomb. Memoires de l'Acad. Royal. des Scienc. 1735. p. 313. et ſequentibus.

(*h*) „Recentiſſimi, de corporum principiis chemicis tractantes, perhibent: Arabes atque Saracenos ſaeculo XII. et XIII. inueniſſe, „metalla nil aliud eſſe, quam argentum viuum per ſulphur „condenſatum hocque ex Gebri, Auicennae atque Rhaſis monumentis patere. Efficta haec per Arabes principia, ab hoc „tempore vsque ad ſaeculi XVI. initium, Chymici interea clari, „absque

ſuosque errores expurgantis Chemiae aſſertor *Boerhaave* (*i*). Poſt reſuſcitantium ſalium impotentiam, per

---

„absque vlla retractione adoptarunt, veluti *Raymundus Lullius*, „*Arnoldus de Villa Noua* et *Ioannes Iſaacus*, *Hollandus* vulgo „dictus. Poſtquam vero verſus dicti ſaeculi initium *Baſilius Valentinus*, et *Theophraſtus Paracelſus* imprimis, Chemiae operam „dedere, factum eſt, vt iſte, praeter haec duo, ab Arabibus „efficta principia, aliud nouum, quod ſalis nomine inſigniebat, „prioribus adiiciendum exiſtimauerit etc.„

Doleo auctorem, ad quem ſuperius memorata pertinent, accuratius non euoluiſſe *Boerhaauium*, celebre licet illum dicat nomen eſſe, in re tamen neglexiſſe videtur. Maluit nimirum citare diſſertatiunculam, modo hanc, modo illam, vnicum interdum ſui Auctoris fructum, neceſſitatis ſaepe lege, non raro alieno arbore natum, quam ad *Hombergium*, *Boerhaauium*, *Hofmannum*, *Stahlium* ve crebrius prouocare; vtut foetus eiusmodi citati, ingentibus his viris, re propius examinata principium vitale deberent. Captus hic Auctor voluptate enucleandi *Boerhaavii*, aliorumue auctorum grauiſſimorum, fato iam functorum, erroribus, illum vix citat, quin reprehendat. Melius egiſſet, ex puriſſimo fonte huius Viri hauriendo, ſi nobis accuratius, quae ad hermeticae artis hiſtoriam pertinent, exhibuiſſet. *Boerhaavio* enim edoceri potuiſſet, *Gebri* teſtimonium ad VII. potius quam ad XII. ſaeculum pertinere. Syſtema duorum principiorum chemicorum, mercurii et ſulphuris, proinde iam illo tempore celebrabatur. Nihilominus ipſo *Gebro* adhuc edocemur, ante ipſum iam viguiſſe, hanc, antiquiſſimam certe opinionem, dum in principio *ſummae perfectionis metallorum* ſcribit, ſe non niſi libros antiquorum abbreuiaſſe; partem forſan librorum, de hac arte, quos Imperio *Diocletiani* combuſtos perhibet *Suidas*. *Baſilius* vero *Valentinus* quem *Paracelſo* ſaeculo priorem, iure indicat *Boerhaauius*, minus recte ad initium XVI. ſaeculi celebratur. *Paracelſum* vero ex *Baſilio* doctrinam de tribus elementis illo tempore hauſiſſe, atque, preſſo auctoris nomine, ſuam feciſſe

per ipſum argentum viuum, ex plumbo dum mercurium educere conatur, eundemque ex ſtanno eodem adminiculo extrahere tentat, fruſtra fuit (*k*).

In tertia denique ad ſapientes Brittannos data diſſertatione, mercurium e venis eductum labe quadam inquinatum, ab ipſa origine illi concreta intimeque inoleſcente, ab alchimiſtis credi, perhibet *Boerhaavius*, qui, ad mentem illorum, defaecationem impuri feliciſſime tum demum obtineri crediderat, quando puriſſimis corporibus, ſuae naturae ſimilibus, miſceretur, atque ope ignis inde iterum ſepareretur. Miſcuit ideoque auro Mercurium, totiesque igne illum inde auocans, conſtan-

feciſſe extra omne dubium poſitum eſt. *Baſilius Valentinus* vero iuuenis vidit Belgium et Angliam. *appendic. ad XII. claues.* artem cereuiſiariam optimam ibi reperit: Hac autem occaſione *Iſaaci Hollandi* opera vidiſſe, atque ex illis doctrinam de tribus principiis retinuiſſe, veroſimile eſt, ait enim in coenobio ſe ex libris didiciſſe, nullum licet auctorem citet; *Hollandum* vero, *Baſilio* antiquiorem, doctrinam de tribus principiis profitentem videre licet, opera ſubtiliſſimi huius auctoris vel fugitiuo oculo perluſtranti. Neque hoc *Paracelſi* temporibus ignorabatur: *Severinus* Danus etenim Epiſtolam ad *Paracelſum* dedit, quae praefixa exſtat operibus *Paracelſi*, ibi citat *Iſaacum Hollandum* pro auctore diſciplinae Paracelſicae et laudat.

(*i*) Meretur ab omnibus legi oratio quam habuit 1718. de Chemia errores ſuos expurgante, illuſtris auctor, antequam ad egregium, prae caeteris, hoc ſtudium animum adiungant tirones.

(*k*) Miror Cl. *Vogel* mercurium, in oleo Vitrioli currentem adhuc ſtatuere, atque exinde pondus inſigne huius acidi deriuare. In inſtit. chemic. §. 413. et 417. pulcherrime alias chemica tractantem.

conſtantiam et ſimplicitatem vtrorumque admiratus, ſpem figendi cum auro argentum vivum, ignis actione, ſepoſuit.

Neque ſubſtetiſſe hic indeſeſſum rerum naturalium ſcrutatorem, ex ſequentibus patebit (*l*). Selegi quippe Experimenta quaedam, ex diario egregii viri, nullis proh dolor! annotationibus diuite, quaeque ſimpliciter trado, verbis ipſiſſimis Auctoris, minus licet ſpecioſis, aſt magis veris, vtens. Haec, quoad ſermonem, operationis atque effectuum ratione, in paragraphos diſpeſcui, vt labores et producta melius a ſe invicem diſtingui poſſint. Caeterum, ſimplex veri eſt ſigillum. En ſummi viri verba:

§. 1.

17 $\frac{10}{8}$ 36 Mercurii Amſtelodamenſis optimi vncias XXXII. deſtillaui ex retorta vitrea, pura, igne arenae, ita, vt nihil prorſus mercurii fluidi in fundo retortae maneret.

§. 2.

Mercurium egreſſum, ſiccatum, effudi ſemper in retortam eandem, et deſtillaui modo §. 1.

§. 3.

(*l*) Experimenta illa, quae ad Diſſertationes de Mercurio, in actis Londinenſibus atque Pariſienſibus impreſſas, ſpectant, praemittenda cenſeo, illis quorum nullam neque ipſe auctor adhuc mentionem fecit, moneat licet aliquo in loco, ſupereſſe ipſi adhuc experimenta, quibus euertatur ſpes alchymiſtarum primi ordinis, quam Caeſaribus, Regibus, Principibus faſtuoſe depraedicatam, caro vendiderunt.

§. 3.

Singulis deſtillationibus naſcebatur rubri (*a*) quid in retorta.

§. 4.

Labore ſedulo continuaui deſtillationes vsque $17\frac{26}{2}37$, ſemper accurate fluidum totum eleuando.

§. 5.

Exiuerant tunc Mercurii Vnc. xxiv, 511 vicibus iam deſtillati. In fundo retortae erant genitae Vnc. ijß praecipitati rubri, ſcintillantis. In chartulis, quibus ſingulis vicibus mercurius erat exſiccatus, poſt quamque deſtillationem, multum mercurii forma nigra reſtabat. Ita vt perierint 511. deſtillationibus de mercurio Vnc. vß. id cauere non potui omni cura, id et in operatione inchoata $17\frac{10}{9}31$. contigit (*b*), ſic fere $5\frac{1}{6}$ grana perierunt ſingula deſtillatione, ſollicite licet caueretur (*c*).

 § 6.

(*a*) Vide primae, datae ad Britannos, de mercurio diſſertationis §. IV. Ibidem enim deſcribit auctor operationem huic ſimillimam, niſi tempore ac laboribus vlterioribus protractis diuerſam cerneres.

(*b*) Operatio $17\frac{10}{9}31$. eadem eſt, quam deſcripſit in prima de mercurio ad Brittannos diſſertatione §. IV. vsque ad XII.

(*c*) Comparari vtique debet proceſſus hic cum 511. deſtillationibus, quae maximam partem primae de mercurio diſſertationis conſtituunt; ibidem enim mercurius 52 vicibus deſtillatus

1) Ex fluido in puluerem rubrum ſplendentem pro $\frac{1}{52}$ ſui ponderis vertebatur.

2) 52 deſtillationibus illis perierunt mercurii drachmae $6\frac{1}{2}$. ergo $7\frac{1}{2}$ grana, ſingula in deſtillatione.

3)

§. 6.

$17\frac{27}{3}37$. Praecipitati rubri (§. 5.) nati Vnc. ijß addito pauco mercurii 511. vicibus deſtillati, ex chartulis in quibus exſiccabatur collecti, deſtillaui e retorta luto obducta, igne ſummo, vt canderet retorta per horam.

§. 7.

Exiit mercurius reuificatus ad Vnc. ij. in fundo vero retortae gr. XVIII. pulueris rubri (*d*).

§ 8.

3) Idem mercurius 448. vicibus rurſus deſtillatus de pondere amiſit Vnc. IV. dr. ij. gr. xxxviiij. Ergo $4\frac{1}{2}$ grana ſingula in deſtillatione perierunt, dum toties deſtillando igne actus pro $\frac{11}{72}$ ſui ponderis in puluerem rubrum vertebatur.

4) In toto vero mercurius 500 vicibus deſtillatus, pro $\frac{5}{15}$ ſui ponderis, illo igne in puluerem rubrum verſus eſt. Mercurii vero fluidi ab operatione ſuperfuere Vnc. IX. dr. v. quae excedunt parum dimidiam adhibiti hydrargyri quantitatem. Perierunt vero Vnc. v. dr. j. gr. xxxxviiij. Ideoque grana v. ſingula in deſtillatione.

5) Conueniunt proinde pulcherrime duae, diuerſis temporibus peractae, operationes, ex quibus plura meditationi opportuna ab idoneis, vlterius erui poſſunt.

(*d*) Drachmae tres ac grana quadraginta duo perierunt. Quomodo? Vide quae de inſigniore reuificandi ex praecipitato mercurii diſpendio monet auctor, in prima de mercurio diſſertatione §. VIII corol. 8. Vix enim mihi perſuadere poſſum, errorem autographi eſſe: primus enim foret, quem in ſcriptis accuratiſſimi huius viri reperiiſſem. Crediderim, multa enucleandae huic quaeſtioni conferre, experimenta, quae Celeb. *Hombergius* cum metallis in foco *Tſchirnhauſiano* olim inſtituit, quaeque in actis ſcientia et experientia ditiſſimis academiae Pariſinae legi poſſunt.

§. 8.

Has (*e*) miſcui cum Vnc. XXIV. mercurii 511. vicibus deſtillati (§. 5.).

§. 9.

His (§. 8.) admiſcui Vnc. VIII. dr. ij. mercurii 511. vicibus deſtillati, cui et ſuus mercurius, ex praecipitato regeneratus, iam admiſtus erat (*f*).

§. 10.

Habui ergo mercurii 511. vicibus deſtillati per ſe et reuificati Vnc. XXXIV. et dr. ij.

§. 11.

Has (§. 10.) deſtillaui ſemper accurate modo §. 1. hodie incipiendo $17\frac{8}{3}37$. vsque ad $17\frac{5}{11}37$. 448. vicibus.

§. 12.

Tum habui mercurii mille et nouies per ſe iam deſtillati Vnc. XVII. Et praecipitati rubri in retorta Vnc. j. dr. jß. (*g*).

(*e*) Scilicet Vnc. ij. mercurii ex praecipitato reuificati §. 7.

(*f*) Quas hic iudicat auctor Vnc. VIII. dr. ij. mercurii 511. vicibus deſtillati pars maxima mercurii eſt, quem obtinuit aliquando ab operationibus, quas deſcripſit in prima de mercurio diſſertatione §. 4. 5. 6. 7. 8.

(*g*) Perierunt ergo Vnc: XVI. gr. XXX. praecipitati vero rubri longe minus natum vltimis his 448. deſtillationibus, quam quidem in praecedentibus. Cauſam huius phaenomeni in prima diſſertatione innuit auctor §. 5.

§. 13.

Mercurium (§. 12.) per chartam calidam, puram, ſiccam, colatum, vaſe vitreo, puro, ſicco ſeruaui, titulo mercurii 1009. per ſe deſtillati (*b*).

§. 14.

Praecipitati nati (§. 12.) dr. jß. ſeruaui titulo praecipitati per ſe mercurii 1009 deſtillati; reliquum vero deſtillaui ex retorta loricata, igne aperto.

§. 15.

Obtinui mercurii puri dr. vij. gr. VIII. in fundo retortae ſupererat pulueris rubri fixioris gr. XV. (*i*).

§. 16.

Mercurium illum (§. 12.) ponderaui ope bilancis induſtria clariſſimi *s'Grauesande*, pendebat ad aquam vt $13\frac{59}{100}$. ad 1. $17\frac{15}{2}38$.

§. 17.

Mercurius regeneratus ex praecipitato mercurii 1009 per ſe deſtillati erat ad aquam vt $13\frac{65}{180}$ ad 1., ponderante eodem celeberr. viro $17\frac{16}{2}38$. (*k*).

Eous-

(*b*) De hoc plura impoſterum, quando ad alia longe operoſiora *Boerhaavii* experimenta peruenero, quibus perficiendis hunc adhibuit.

(*i*) Periere itaque gr. XXXVII. Vide §. 7. huius ſupplementi notam.

(*k*) Quibus iam impreſſas *Boerhaavii* de Mercurio Diſſertationes adeundi occaſio deficit, habent hic tabulam, ſeriem expanſionum varii mercurii complectentem, quas vt plurimum vna cum celeberrimo *s'Granesandio* abſoluit, illuſtris *Boerhaave*.

☉

Eousque Mercurium, igne torſit, ſolitarium Ill. *Boerhaave*, non contentus primis datis ad Brittannos Diſſertationibus iam indicatis, vt diſceret, quid tandem ignis actione diuturniore eueniret. Conſtans ſimili modo ſe exhibuit mirabile hoc, noſtris temporibus frigore actum, omnino malleabile, metallum. Nulla huic ſupplemento corollaria appoſui: deduxit plura hac in arte ſeuerus quidem, vberrimus tamen auctor, quae in prima eius de mercurio diſſertatione legi poſſunt, nimia ſi huc transferri debuiſſent, adiecto fortaſſis vnico: quod mercurius 448. vicibus, ſimili ac antea igne adhuc actus, idem perſiſteret, varias vario igne luderet perſonas, maiori tamen igne vtcunque in priſtinam formam rediret.

OBSER-

☉ ad ▽ vt $19\frac{119}{500}$. ad 1.
☿ venalis ſemel deſtillatus ad ▽ vt $13\frac{57}{100}$. ad 1.
☿ 511 vicibus per ſe deſtillatus ad ▽ vt $14\frac{11}{100}$. ad 1.
☿ 1009 per ſe deſtillatus ad ▽ vt $13\frac{59}{100}$ ad 1.
☿ reſuſcitatus ex praecipitato mercurii 1009. deſtillati ad △ vt $13\frac{65}{100}$ ad 1.
☿ aliquoties ab ☉ deſtillatus ad ▽ vt $13\frac{55}{100}$. ad 1.
☿ 750. vicibus ab ☉ deſtillatus ad ▽ vt $13\frac{52}{100}$. ad 1.
☿ 877. vicibus ab ☉ deſtillatus ad ▽ vt $13\frac{50}{100}$. ad 1.
☿ aliquoties ab ☽ deſtillatus ad ▽ vt 13. $\frac{55}{100}$. ad 1.
☿ 217. vicibus ab ☽. deſtillatus ad ▽ vt 13. $\frac{50}{100}$. ad 1.

OBSERVATIONES METEOROLOGICAE POTISSIMVM BAROMETRICAE ET THERMOMETRICAE ANNI 1757. CVM CONSECTARIIS INDE DEDVCTIS.

Auctore

I. A. BRAVN.

Methodus fere eadem in his obſeruationibus eſt adhibita, quae in antecedentibus, hinc ſuperfluum eſſet, pluribus rurſus hic exponere de inſtrumentis et modo, quo ſint confectae. Repraeſentant ſcilicet obſeruationes barometricae maximas et minimas altitudines cuiuslibet menſis per integrum annum cum differentiis, vti thermometricae maximum et minimum caloris gradum cuiuslibet menſis per totum annum cum differentiis. Barometrum idem ſimplex eſt adhibitum, in quo pollices ſunt Pariſienſes notati, qui in centum partes ſunt diviſi. Numerus igitur ante punctum pollices Pariſienſes, poſt punctum eorum partes centeſimas ſignificat. Idem quoque Thermometrum eſt adhibitum, in quo ſcilicet (o) ſignificat calorem aquae bullientis, et 150. aquae in glaciem abeuntis, quod congelationis punctum adpellatur. Haec ſcala thermometrica facile cum aliis comparari poteſt, quae ſunt vſitatae, ſi inſpiciatur comparationis ſcalarum thermometricarum vſitatiorum tabula, quam iam 1755. cum obſeruationibus noſtris ex-

exhibuimus. Inſerta eſt Tom. VII. Comment. Acad. Nihil ſupereſt, niſi vt obſeruationes ipſas repraeſentemus, ita vt primum barometricae adpareant, dein thermometricae et Meteora.

Obſeruationum barometricarum anni 1757. altitudines maximae et minimae cum earum differentiis, per ſingulos menſes anni integri.

Menſes.	Dies.	Maxima.	Minima.	Differ.
Ian.	24. -	28 60. -	27.47.d.15.h.11.p m.	1.13.
Febr.	1. -	28.43. -	27.05.d 21 - - -	1.38.
Mart.	26. -	28 35. -	27.30 d.9.et 15. - -	1 05.
April.	10. -	28.54. -	27.50.d 27 m. - -	1.04.
Maius	31. -	28 43. -	27.45.d 9.et 12. -	0.98.
Iunius	1. -	28.45. -	27.55.d.13. - - -	0.80.
Iulius	16.et 17	28.35. -	27 90 d.6.28.31. -	0 45.
Auguſt.	28. -	28 46. -	27.33 d.3 - - -	1.13.
Sept.	10.et 11	28.75. -	27.45 d 19 - - -	1.30.
Octob.	2. -	28.55. -	27.05.d 17 - - -	1.49.
Nou.	20. -	28.63. -	27.45.d.3 - - -	1.18.
Dec.	19.h.11p.m.	29.12. -	27 85 d.5, - - -	1 27.

Max.29.12.Min.27.05.Differ max.2.7 per integr. annum.

Conſectaria.

Si hae obſeruationes inter ſe comparentur, patet primum, maximam altitudinem contigiſſe Decembris 19. h. 11 p. m. Eſt haec altitudo 29.12. plane extraordinaria, quae nunquam hic Petroburgi eſt obſeruata. Maximae enim hic obſeruatarum ad hoc vsque tempus fuere primum 29.01. ſiue ſecundum pollices Lon-

dinenſes praeciſe 30.95, vti ex antecedentibus obſeruationibus publicatis iam ſatis patet. Deinde 29.10. anno 1750. Eſt igitur nunc ſpatium variationum barometricarum rurſus mutandum; amplificari ſcilicet debet duabus partibus centeſimis, tanto enim haec maior eſt ea, quae antea huc vsque fuit maxima, ſcilicet 29.10. Cum igitur huc vsque ſpatium, intra quod altitudines mercurii in tubo *Torricelliano* variarint, fuerit primum 2.60. ab altitudine nimirum 26.41. ad 29.01: deinde ab anno 1750. 2.69: erit nunc 2.71. ab altitudine ſcilicet minima 26.41. ad maximam, quae nunc eſt 29.12. Contigit haec altitudo maxima Decembris 19. h. 11. poſt meridiem, Thermometro monſtrante 180. Dies fuit ſerenus, vti quoque dies aliquot antecedentes et ſubſequentes. Ventus ipſo die vix fuit ſenſibilis, vti quoque diebus antecedentibus et ſubſequentibus debilis, ex oriente vt plurimum ſpirans. Altitudo minima accidit Februarii 21. et Octobris 17. Febr. 21. ventus fuit N. O. dies nubilus, quem ſequuta eſt nox ſerena. Dies antecedentes et ſubſequentes fuere mixti. Octobris autem 17. ventus fuit vehementiſſimus W., qui iam die praecedente incepit, et nocte ſequente continuauit. Dies fuit nubilus cum niue exigua, vti dies aliquot antecedentes quoque fuere nubili et ſequentes mixti. Aqua fluuii Neuae ad notabilem altitudinem eodem die adſcendit, thermometrum monſtrabat 149.

In obſeruationibus thermometricis more noſtro conſueto notauimus maximos minimosque gradus caloris

ris per ſingulos menſes totius anni cum differentiis eorum ; obſeruationes ipſae autem ſequenti modo ſe habent :

Frigus max. ſ.		Calor minimus.	Calor max.	Differentia.
Ianuar. d.	8.	182	152.d. 16. et 17.	30.
Febr.	24.	175	145.d 14.	30.
Martii	3.	173.	135.d. 31. et 18.	38.
Aprilis	9.	148.	120.d. 24.	28.
Maii	3.	148.	99½.d. 24.	48½.
Iunii	13.	134.	103.d. 23.	31.
Iulii	15. et. 16.	124.	97.d. 12.	27.
Auguſt.	6.	138.	107.d. 1. et 21.	31.
Septembris	23.	155.	119.d 2.	36.
Octobris	14.	169.	147.d. 28.	28.
Nouembris	20.	174.	141.d. 11.	33.
Decembris	17.	187.	149.d. 3.	38.

Frigus maximum 187. Calor maximus 97. Diff. max. 90. per integrum annum.

Conſectaria.

Ex comparatione diuerſorum horum caloris graduum manifeſtum eſt , maximum frigus per integrum annum fuiſſe 187. Hic frigoris gradus quum non ſuperet gradum 200 , hic 1733 et 1739. obſeruatum: manet hic huc vsque maximus. Incidit maximus huius anni frigoris gradus in Decembris 17. vento vix ſenſibili O, tempeſtate ſerena, barometro adſcendente hoc die a 28.75 ad 28 87. Ventus aliquot diebus antecedentibus et ſequentibus ex oriente debilis fuit , vti

 quo-

quoque tempeſtas vtplurimum ſerena diebus proxime antecedentibus et conſequentibus. Calor maximus fuit 97. Hic gradus nunquam hic Petroburgi eſt obſeruatus, aequalis eſt calori hominis naturali, et ſanguinis hominis ſani. Maximus caloris gradus, qui huc vsque hic fuit obſeruatus, quum fuerit 104, erit igitur gradus caloris huius anni 7 gradibus maior eo, qui adhuc fuit maximus Differentia et variationum thermometricarum ſpatium maximum quum huc vsque fuerit 96. ſcilicet a gradu 104. ad 200. amplificandum nunc erit 7 gradibus, ita vt nunc ſit 103. ſcilicet a 97 ad 200. Incidit hic calor maximus in Iulii 12 h 4 poſt meridiem. H. 2 erat 99 et h. 10 ante meridiem 104. Ventus debilis fuit SW, qui quoque diebus aliquot antecedentibus et ſequentibus flauit. Eodem die circa h 4 tonitru eſt auditum, ſed tantum debile, bis enim vel ter tantum audiebatur, aliud autem tonitru h 11 p m. ſequutum eſt, quod etiam tantum e longinquo audiebatur. Barometrum deſcendens erat et attigerat 28.02 Die 10 erat 28.15. continuabat deſcendere ad diem 14.

Quodſi non ſolum gradus caloris maximus, qui hoc anno fuit obſeruatus, ſed etiam reliqui caloris gradus obſeruati expendantur; facile conſpicitur hanc aeſtatem omnium, ex quo quidem tempore obſeruationes hic inſtituuntur, fuiſſe calidiſſimam. Quum alias magni caloris gradus diu durare non ſoleant, vti frigoris; e contrario hac aeſtate fere perpetuus calor intolerabilis fuit. Nam poſt medium Maium iam dies

cali-

calidiſſimi fuerunt. Monſtrabat enim thermometrum d. 19. 110, d. 20. 116, d. 22. 108, d. 23. 105, in ſole 82. d. 24, 99. d. 25. 100. d. 26, 103. d. 27, 116. Menſe Iunio d. 1. 112, d. 3. 106, d. 28. 109, d. 9. 107, d. 11. 113, d. 22. 104, d. 23. 103, d. 27. 106, d. 28. 107. Menſe Iulio d. 1. 113, d. 2. 110, d. 3. 111, d. 4. 109, d. 5. 101, d. 6. 109, d. 9. 109, d. 10. 101, d. 11. 102, d. 12. 99, d. 13. 106, diebus 14, 15 et 16. 112, d. 17. 108, d. 19. 101, d. 20 et 21. 105, d. 22. 107, d. 24 et 26. 105, d. 28. 103, d. 29. 107, d. 31. 104. Quin ipſo Auguſto multi dies adhuc ſatis calidi fuere. Monſtrabat enim thermometrum d. 1. 107, d. 11. 119, d. 13. 116, d. 15. 111, d. 21. 107, d. 23. 108, d. 26 et 27. 116, d. 31. 113. Hi gradus caloris plerique obſeruati ſunt inter h. 2. et 3. p. m. quo tempore vtplurimum maximus exiſtere calor ſolet caeteris paribus, vt frigoris gradus maximus ſiue minimi caloris gradus circa ortum ſolis vel proxime, veſperi quoque circa h. 11, quibus temporibus ad minimos caloris gradus cognoſcendos obſeruationes a nobis ſunt inſtitutae.

Primum tonitru iam contigit Aprilis 4. cum magna pluuia. Tonuit porro Maii 16. 20. Iunii 18. 27 et 28. Iulii 5. 6. 12. 13. 22. et 28. Auguſti 1 et 24. Per integrum igitur annum decies quater tonuit.

Dies hoc anno ſereni fuerunt Ianuarii 1, 2, 6, 8, 14. Februarii 6, 7, 13, 17, 18, 19, 20, 23, 24,

25, 28. Martii 1, 3, 4, 6, 8, 12, 18, 20, 26, 31. Aprilis 1 nocte, 3, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 28 et 30. Maii 3, 4, 5, 6, 7, 10, 15, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 24, 25, 27, 28. Iun. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 14, 16, 17, 20, 21, 22, 23, 24, 27, 28, 30. Iulii 1, 3, 7, 8, 9, 12, 15, 16, 17, 18, 22, 23, 26, 27, 29, 30. Auguſti 6, 11, 15, 17, 21, 22, 23, 27, 31. Septembris 1, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 13, 23, 24, 30. Octobris 1 nocte, d. 2, 4, 10, 13, 14, 25. Nouembris 17, 18, 19, 20. Decembris 7, 9, 17, 19, 22, 23, 24' 25, 26, 27.

Nemo, opinor, ſibi perſuadebit, ſerenitatem perfectam ſemper hic eſſe intelligendam, diximus quoque diem ſerenum qui maiorem partem fuit ſerenus, licet quoque hinc inde nubes tenues ſe conſpiciendas praebuerint. Forſitan nullo anno plures dies ſereni numerati fuerint, quam hoc; ſerenitas enim quoque dierum hoc anno fuit extraordinaria. Reliqui dies fuerunt vel mixti, vel nubili tantum, vel cum pluuia et niue. Pluuii et niuoſi dies cum ventis vehementioribus praecipue fuerunt hi: Ianuario niuoſi 4. 6. 9. 10. 13. 15. 27. Februarii 3. 11. 15. Martii 2. 10. 11. 15. 17. d. 21 pluuius vt et 23. 24. d. 25. nebuloſus d. 27. et 28. pluuii. Aprilis pluuii 4. 6. et quidem pluuia cum niue mixta, porro pluuius d. 7. 13. et 14. Ventus vehementior W z S cum pluuia magna et quadam aquae Neuenſis altitudine ſolito maiore. D. 25. 26. 27. itidem pluuii. Maii 8. 9. magna procella cum mediocri pluuia

pluuia, quae per interualla toto die continuauit. D. 9. h. 1 grando quoque per aliquot momenta cecidit. Pluuii porro d. 11. 12. 16. vltimo die cum vento vehementiori item d. 20. Iunii pluuius 12. 13. 16. 18. 29. Iulii 14. 20. 22. 28. Auguſti 3. 4 et 5 cum vento vehementiore W et altitudine aquae Nevenſis ſat magna, porro pluuii d. 13. 16. 24. Septembris d. 9. nebuloſus d. 14. pluuius d. 15. niuoſus et nocte prima glacies, d. 19. pluuius et 28. Octobris 6 niuoſus item 11. 12. 16. cum procella ex occidente. D. 17 ventus continuauit, quem comitata eſt altitudo aquae fluuii Neuae. D 20 pluuius, d. 23 niuoſus, d. 24 pluuius, vt et 27. D. 29 ventus W z N vehementior cum quadam altitudine aquae ſolito maiore. Nouembris pluuii 1. 3. Nix cum pluuia mixta d. 10, 11 et 12. magna pluuia, d. 13. exigua nix, d. 14. niuoſus, d. 15. pluuioſus, d 22. 23. 25. 26 niuoſi. Decembris niuoſi 2. 5. d. 11 nebula denſa dein nix d. 12 nebuloſus, d. 13 niuoſus, d 21 niuoſus, thermometro 171. figurae niuis ✱ nitidiſſimae adparuerunt, vti fere ſemper, ſi magno frigoris gradu exiſtente ningat. d. 30 et 31 pauca nix cecidit.

Aurorae boreales nullae inſigniores ſe conſpiciendas hoc anno praebuerunt, quamuis nonnunquam veſtigia adparuerint, quum aliis annis ſat frequentes fuerunt, id quod etiam extraordinarium videri poteſt.

OBSER-

OBSERVATIONVM METEOROLOGICARVM A. MDCCLVIII. PETROBVRGI FACTARVM IOTIORA MOMENTA CVM ANIMADVERSIONIBVS ET CONSECTARIIS.

Auctore

I. A. BRAVN.

Obſeruationes hae Meteorologicae, eodem modo, ac praecedentes, et iisdem inſtrumentis, ſunt confectae. Complectuntur nimirum obſeruationes barometricas, thermometricas, et potiorum meteororum. Barometricae ſimplici barometro in altitudine circiter ſedecim pedum Pariſienſ. ſupra planum maris Baltici ſunt captae vt antecedentes. Numeri ante punctum, vti alias, notant pollices pedis Pariſini; numeri poſt punctum partes centeſimas eiusdem pollicis. Exhibentur hic, vti in antecedentibus, ex altitudinibus barometricis, maximae et minimae cum differentiis cuiuslibet menſis per integrum annum in tabula quadam, vt vno obtutu inſpici queant, et maxima altitudo annua cum maxima differentia, ſiue variatione ponderis atmoſphaerici per integrum annum perſpici poſſit. Additur et hic tempeſtas antecedens, comitans, et conſequens, vt relatio altitudinum barometricarum, minimum ſummarum et infimarum, ad tempeſtates pateſcat.

Ob-

Obſeruationes thermometricae hic notatae variationem caloris per ſingulos menſes totius anni indicant, ſcilicet gradus maximos et minimos caloris cum eorum differentiis, vnde ſummum frigus et maximus calor totius anni cum variatione annua cognoſcitur.

Adnotatur et hic, cum ſummis et infimis caloris gradibus annuis, ſtatus tempeſtatis cum antecedente et conſequente, et cum altitudinibus barometricis, vt et hic relatio obſeruationum thermometricarum ad barometricas et ſtatum tempeſtatis eluceſcat.

Obſeruationes haſce quoque ſecundum ſcalam thermometri Delilianam eſſe factas, vti antecedentes, vix opus eſſe videtur monere. Indicat nimirum cifra nullitatis nota, gradum caloris aquae bullientis, et numerus 150 punctum congelationis, quod iam ſatis notum.

Denique ſequuntur meteora inſigniora, ſcilicet venti vehementiores, nebulae, pluuiae, niues, grandines, tonitrua cum fulminibus, fulgura etc. quae omnia a vaporibus et exhalationibus in atmoſphaeram adſcendentibus et deſcendentibus originem trahere, et diuerſas tempeſtates efficere conſtat. Eiusmodi obſeruationes et Meteorologiae emendandae et perficiendae inſeruire, notius eſt, quam vt moneri debeat.

Progredimur igitur ad ipſas obſeruationes recenſendas.

Ad obſeruationes barometricas huius anni quod attinet, illae ſequentem in modum ſe habent:

Menſes - -	D.	Alt. barom. max.	Min. -	D. -	Differ.
Ianuarii	17 - -	28.50 - -	27.05.	10 -	1. 45
Februarii	27 - -	28.47 - -	27.60.	4 -	0. 87
Martii	28 - -	28.63 - -	27.15.	23 -	1. 38
Aprilis	3 - -	28.80 - -	27.68.	19 -	1. 12
Maii	2 - -	28.57 - -	27.35.	18 -	1. 22
Iunii	14 - -	28.35 - -	27.62.	25 -	0. 73
Iulii	21 - -	28.32 - -	27.40.	11 -	0. 32
Auguſti	1 - -	28.32 - -	27.63.	18 -	0. 69
Septembris	16 et 23.	28.20 - -	26.63.	26 -	1. 84
Octobris	29 - -	28.50 - -	27.02.	15 -	1. 48
Nouembris	17 - -	28.90 - -	27.13.	30 -	1. 77
Decembris	12 - -	28.85 - -	26.42.	30 -	2. 40

Ergo fuit ſumma altitudo barometrica per integrum hunc annum 28.90, et infima 26.42, adeoque differentia maxima annua 2. 48.

Haec ſumma altitudo barometrica 28. 90, ſiue viginti octo pollices pariſinos, et nonaginta partes eiusdem centeſimas ſeu fere vndecim lineas magna obſeruata mihi eſt Nouembris 17. h. 11. p. m. Antecedens altitudo erat 28. 85. et ſequens die 18. 28.68. Dies praecedentes a die 14, quo barometrum erat 28.20 fuere nubili, vento ex oriente debili vel nullo, ipſo obſeruationis tempore SO 1. Thermometrum variabat inter gradus 149 et 152, quem gradum monſtrabat ipſo obſeruationis tempore. Sequentes dies tres proximi erant fere ſereni, et barometrum deſcendebat ad 28.44, vento vix ſenſibili, frigus vero creſcebat a 153 ad 176. Pondus igitur aeris potius copiae vaporum

et

et exhalationum, quam frigori aerem condenſanti, tribuendum videtur. Caeterum ſi ſumma barometri altitudo huius anni comparetur cum ſumma altitudine anni praecedentis, ſcilicet 29 $\frac{12}{100}$, ſiue viginti nouem pollicum pariſinorum et vnius et dimidiae fere lineae, quae nunc omnium obſeruatarum adhuc maxima eſt; adparet, altitudinem huius anni ſummam 28.90. minorem eſſe altitudine ſumma anni praecedentis 29.12. partibus centeſimis 22. ſiue amplius 2½ linearum. Ergo manet altitudo anni praecedentis omnium adhuc obſervatarum maxima.

Minima huius anni altitudo barometrica 26.42 mihi obſeruata eſt Decembris 30. h. 9. p. m. Obſeruatio proxime antecedens h. 2. p. m. indicabat altitudinem 26.92. et proxima ſequens diei ſequentis 31. h. 9. a. m. 27.30. Deſcendit a tribus diebus proxime antecedentibus a 27.90 ad hanc notatam altitudinem minimam, et diebus proxime ſequentibus rurſus adſcendit ad 27.90. celerrime, et porro ad 28.00. Ventus obſeruationis tempore fuit vehementiſſimus ex S, qui iam die 28. flare coepit, et ad diem 31 continuauit, licet non ſemper ex eadem ſpirauerit plaga, ſed modo S modo W fuerit. Procul dubio igitur haec exigua altitudo vehementiae venti erit praecipue adſcribenda. Thermometrum gradum caloris indicabat 148 cadente pluuia, quum per diem copioſiſſima nix cecidiſſet. Dies antecedentes et ſequentes erant fere nubili et niuoſi. Variatio caloris erat intra gradus 148 et 173, qui gradus die 27 veſperi mihi notatus eſt, quae igitur temperiei mutatio ſatis ſubita et magna.

Quod ſi porro haec altitudo huius anni minima comparetur cum altitudine minima omnium adhuc obſeruatarum : conſpicitur, hanc eidem eſſe aequalem. Nam omnium minima adhuc eſt 28. 18 pedis Londin. ſiue 26 et fere $\frac{41}{100}$ pedis Pariſini. Haec iam obſeruata eſt 1729. Octobris 12, adeoque ante 29. annos, et quod excurrit. Merito igitur mirandum intra tantum temporis ſpatium nullam eſſe obſeruatam, niſi hoc anno, quae illi eſſet aequalis. Caeterum ex obſeruationibus antecedentibus conſtat, altitudinem ſummam barometricam ab anno 1737 Decemb. 24. ad annum 1750, adeoque tempore 13 annorum, manſiſſe eandem, ſcilicet 30.95 pedis Lond. ſiue fere 29.01 pedis Pariſ. ſed 1750 creuiſſe ad 29.10, et anno praecedenti ad 29.12.

In ſpatio igitur variationis altitudinum barometricarum obſeruationes huius anni nihil mutant, ſed manet adhuc 2. 70, vel 71, ſiue pollicum duorum et linearum $8\frac{1}{2}$, vti altitudo media 27. 77, ſiue pollicum Pariſ. viginti ſeptem et linearum fere nouem.

Differentiae menſtruae altitudinum harum ſi inſpiciantur, patet, eas, vti alias, menſibus mediis, inprimis Iunio, Iulio, Auguſto, eſſe minores, quam menſibus primis et vltimis, quae lex ſemper obtinet, niſi extraordinaria tempeſtas faciat exceptionem, vti hic Februarius, quum tempeſtas ſolito calidior fuerit. Differentia vero annua 2. 48 admodum magna eſt, et extraordinaria, dum a maxima 2. 70 tantum $\frac{22}{100}$ differt, ſiue minus quam lineas tres, vti menſtrua menſe Decem-

Decembri 2. 40 plane extraordinaria quoque deprehenditur. Contra minima menſtrua occurrit menſe Iulio $\frac{32}{100}$, ſiue fere quatuor linearum, quae ſatis eſt exigua, et variationem ponderis atmoſphaerici ſatis paruam indicat.

Hactenus de variationibus ponderis atmoſphaerae huius anni, quae per diuerſas altitudines mercurii in tubo torricelliano hic obſeruatas innotuere. Sequuntur variationes caloris per ſingulos huius anni menſes thermometro Deliliano notatae, quae ſunt ſequentes:

Menſes - - -	Frig. max.	Calor max. - - -	Differ.
Ian. 9. h. 11. p. m.	197	- 152. die 22. h. 2. p. m. -	45
Febr. 28. h. 7. a. m.	177	- 145. 8. h. 2. p. m. - -	32
Mart. 12. h. 7. a. m.	177	- 140. 19. h. 2. p. m. -	37
April. 2. h 11. p. m.	164	- 120. 29. h. 5. p. m. - -	44
Maii 17. h. 11. p. m.	146	- 111. 27. h. 3. p. m. - -	35
Iunii 10 et 12 mane	135	- 97. in ſole 88. 24. h. 2. p. m.	38
Iulii 8. h. 11. p. m.	136	- 105. 20. h. 4. p. m. - -	31
Aug. 28. h. 7. a. m.	141	- 107. 13. h. 3. p. m. - -	34
Sept. 15 21. 23.	150	- 127. 3. h. 2. p. m. - -	23
Oct. 29. h. 7. a. m.	160	- 139. die 2, et 26. h. 2. p. m.	21
Nou. 20. h. 8 a. m.	176	- 146. 26. h. 2. p. m. -	30
Dec. 2. h. 11. p. m.	182	- 148. 16 per totum diem.	34

Ex obſeruationibus hisce thermometricis inter ſe comparatis varia pateſcunt. Primum adparet, hoc anno frigus maximum fuiſſe 197. et maximum calorem 97. adeoque variationem annuam 100. graduum, qualis fere vt plurimum eſſe ſolet. Hic frigoris gradus maximus, ſi com-

paretur cum maximo 200. vel 201. alias hic obſeruato, 1733. 1739. et 1748, patet, gradum frigoris huius anni maximum proxime ad maximum omnium hic obſervatorum accedere, gradum autem caloris maximum eſſe aequalem maximo omnium hic obſeruatorum, ſcilicet 97, quem, vti ex antecedentibus obſeruationibus patet, notauimus Iulii 12. h. 4. p. m. anni ſuperioris 1757. aeſtate calidiſſima. Quoniam autem frigus maximum huius anni 197. non ſuperat frigus maximum 200: manifeſtum eſt, hunc gradum omnium adhuc hic obſeruatorum manere maximum, et ſpatium variationum caloris anno ſuperiore de nouo ſtabilitum manere 103.

Ex comparatione differentiarum porro conſpicitur, maximam menſtruam obſeruatam eſſe 45. menſe Ianuario, et minimam 21. menſe Octobri, quae ſatis parua eſt, quum haud raro differentiae diurnae non ſolum huic aequales, ſed ea maiores reperiantur, dum ad gradus 28. et 30. tempeſtate variabili et ſubito inſigniter mutata adſcendere ſolent, vti hoc anno maxima diurna fuit 28. Aprilis 12. obſeruata, quamuis contra ea nonnunquam differentia diurna vix ſit etiam ſenſibilis, quod poſterius tamen rarius accidere hic ſolet.

Gradus frigoris maximus huius anni 197. mihi obſeruatus Ianuarii 9. h. 11. p. m. ſub ſequentibus circumſtantiis contigit. Barometri altitudo erat 28.22. quum mane fuerit 28.28. die antecedenti 28.30. et ſequenti mane 28.10. Nox erat ſereniſſima, vti quo-

que

que dies ipſe, et aliquot antecedentes dies, ſequentes vero erant nubili et niuoſi. Ventus erat nullus, vti quoque per diem, quod inſignioribus frigoris gradibus exiſtentibus fieri vt plurimum ſolet. Diebus duobus antecedentibus ventus leniter ex oriente ſpirabat, ſequentibus vero proximis ex S. et W. Gradus frigoris inter horam 2. et 3. p. m. obſeruatus erat 188, adeoque differentia diurna tantum 9. Conſtat enim, ſi caetera ſint paria, duo potiſſimum interuallo 24. horarum eſſe tempora, quibus calor maximus et minimus contingere ſolet. Scilicet calor minimus, ſeu frigus maximum, regulariter ſub ſolis ortum eſſe ſolet, creſcit dein calor non ſolum ad meridiem vsque, quo ſolis altitudo maxima eſſe, adeoque maxime calefacere ſolet, ſed fere ad h. 3. p. m. quo rurſus decreſcit regulariter, niſi diuerſa tempeſtas obſtet, ad ſolis ortum diei ſequentis. Haec ratio eſt, cur obſeruationes thermometricae noſtrae mane ſint inſtitutae et poſt meridiem inter h. 2. et 3. Quodſi vero mane non ſint factae, nocte h. 11. inſtitui eas, quo tempore plerumque gradus iam obſeruari ſolet, qui gradui ſub ſolis ortum eſt ſaepe aequalis, aut proxime ad eum accedit.

Calor maximus 97. Iunii 24. inter horam ſecundam et tertiam p. m. obſeruatus ſub hiſce circumſtantiis accidit: In ſole thermometrum monſtrabat 88. vt adeo differentia inter thermometrum ſoli expoſitum, et thermometrum in vmbra collocatum fuerit nouem graduum. De hac differentia notandum eſt, eam admodum variari, licet totum coelum aequaliter ſerenum

videatur,

videatur, ita vt non nunquam graduum 25. et amplius mihi ſit hic obſeruata. Barometri altitudo erat 27.75, quum mane fuerit 27. 80. et ab 28.26, quae altitudo die 20. fuit, ad hunc terminum lente deſcenderit, et ſequenti die ad 27. 62. deſcendere perrexerit. Coelum admodum fuit vaporoſum, ita vt ſol tanquam diſcus ruber adparuerit, quod, aere vaporibus, praecipue exhalationibus, copioſis repleto, contingere ſolet. Ventus debilis ex oriente ſpirabat, vti quoque diebus duobus antecedentibus et conſequentibus. Circa h. 4. p. m. tonitru e longinquo eſt auditum, et pluuia parua cecidit, h. 10. autem pluuia ſatis larga, et tonitru, non tamen vehemens, fuit. Quum atmoſphaera inferior vaporibus et exhalationibus fuerit repleta, et barometrum altitudinem inſignem non monſtrauerit, calorque inſignis thermometro fuerit indicatus: mirandum non eſt, fulmineam tempeſtatem hoc die contigiſſe, dum omnes adfuerunt conditiones, ſub quibus tempeſtates fulmineae accidere ſolent. Vltra altitudinem 28.08. ſiue viginti octo pollicum pedis Pariſini et lineae vnius tempeſtas fulminea mihi hic non eſt obſeruata, quae ſcil. propius acceſſit.

Sequuntur meteora inſigniora per ſingulos huius anni menſes, vt venti, ſed tantum vehementiores, ſcilicet gradus tertii et quarti, qui poſteriores procelloſos notant, porro nebulae, nubes, pluuia, grando, nix, tonitrua cum fulminibus, halones circa Solem et Lunam, et aurorae boreales.

Men-

Menſis Ianuarius.

Ventus vehementior nullus eſt obſeruatus, niſi quod die 14. p. m. paullo vehementior ex occidente flauerit, qui vero iam circa veſperam ceſſauit. Conſtat generatim tempeſtate frigidiore ventos vehementes non oriri.

Reſpectu plagarum venti hoc menſe vt plurimum ex oriente et occidente ſpirauere, ſcilicet per 13. dies ex oriente, et per nouem dies ex occidente. Dies ſine vento fuerunt, vel vix ſenſibiles venti d. 2. 4. 9. 12. 13. 17. adeoque dies ſex.

Dies nubili et niuoſi hoc menſe fuerunt 14, reliqui 17. ſereni, licet pauci perfecte ſereni, qui hic ſunt rariores, quum coelum vt plurimum ſit vaporoſum, et nubes hinc inde ſimul deprehendantur.

Februarius.

Et hoc menſe nullus ventus vehementior eſt obſeruatus, niſi quod die 7. ex oriente paullo vehementior ſpirauerit, deſcendente quidem barometro, non tamen inſigniter. Venti debiliores reſpectu plagarum fuere hi; ventus ex oriente fuit per 10. dies, ex occidente 5. et ex meridie quoque per 5. dies, venti nulli die 6. et nocte die 27. Iam adnotatum eſt, et vulgaris experimentia docet, ventos per diem flantes vtplurimum per noctem fieri debiliores et ſaepius quoque nullos. Saepius quoque dies ſine vento ſequi ventos vehementiores, vti hoc menſe diem ſextum tranquillum ſequutus eſt die 7. ventus vehementior. Et contra ventos vehementiores excipere tranquillitas ſolet.

Dies ſereni hoc menſe tantum fuere 4. ſcilicet dies 20. 23. 27. et 29, reliqui plerique fuere nubili, pauci niuoſi.

Martius.

Hoc menſe ventus vehementior graduum 3. et 4. fuit die 17. per diem et noctem, irregularis, fere tamen ex W, barometro adſcendente durante vento, neque ante ventum multum deſcenderat. Subitaneae temperiei mutationi hic ventus adſcribendus videtur, dum thermometrum ab 173. ad 151. ſpatio 24. horarum fuit variatum. Venti debiliores reſpectu plagarum fere fuere ex occidente. Nam per 21. dies ventus W flauit. Ventus ſiluit d. 12. 19. 20. 21. 22. 27.

Dies ſereni hoc menſe fuere fere dimidii, reliqui nubili plerique, pauci niuoſi.

Aurora borealis conſpecta fuit die 15. placida, barometro 28. 12, thermometro 168. Sequenti die thermometrum monſtrabat mane et nocte 174. p. m. autem 152. vento ex occidente 2, qui etiam eiusdem gradus anteceſſit aliquot diebus.

Aprilis.

Hoc menſe ventus vehementior W 3. et 4. die 20. 21. flauit. Die 19. barometrum ab h. 2. ad 10. p. m. deſcendit a 27.90. ad 27.66, qui deſcenſus celer ventum vehementiorem praenunciabat, durante autem procella d. 21. ad 28. 15. rurſus adſcendit, quod vtplurimum fieri ſolet. Reliqui venti

fue-

ſuere debiliores et admodum variabiles, quod hoc menſe fieri ſolet. Scilicet 6. W. 8. O. 6. S. 6. N. 2. ſine vento.

Hic menſis ſatis fuit ſerenus, quum 19 dies fuerint ſereni, reliqui nubili, niuoſi et pluuii. Pluuii nempe 10. 20. et 22. Sed quantitas pluuiae exigua fuit. Glacies Neuae die 9. ſoluta eſt, thermometro mane 147. p. m. 126, vento SW. Aprilis 9. fere medius eſt terminus temporis, quo glacies Neuae abire ſolet, maximus enim terminus ad huc eſt Apr. 26. qui bis occurrit ab a. 1718. ad hoc tempus, ſcilicet 1739. et 1742; minimus Mart. 22. qui ſemel occurrit 1723. Ergo differentia eſt 35. dierum et medius inter diem 8. et 9. Aprilis incidit.

Maius.

Venti vehementiores fuere d. 19 20. W. 3. et 4. Die 17. barometrum erat 27.95. et deſcendebat ad diem ſequentem ad 27.35, durante vero vento ad 27.68. rurſus adſcendit. Tempeſtas fuit pluuia cum grandine. Venti lenes W. 21. et O. 4.

Dies ſereni huius menſis fuere viginti, reliqui dies nubili et pluuii, pluuii ſcilicet d. 18. pluuia 4. lineas alta, die 19. 2. lin. d. 20. lin. 2. Tota igitur altitudo pluuiae hoc menſe lapſae fuit tantum 8. linearum, ſiue pollicis dimidii pedis Pariſini et duarum linearum.

Grando pauca d. 12. inter h. 10. et 11. cecidit, itemque d. 20. cum pluuia antea indicata.

Halo circa ſolem coloribus praedita conſpecta mihi fuit die 25. inter h. 11. et 12, coelo tenuiſſimis nubibus, vt alias, obducto.

Iunius.

Hoc menſe ventus vehementior nullus eſt obſervatus, omnes venti fuere debiles fere W. et O. Scilicet per 13. dies ventus ex occidente, per 10. ex oriente ſpira ut. Dies ſine vento 3. 5. 17. noctes 29. et 30.

Dimidius fere menſis fuit ſerenus, ſiue praeciſe 13. dies, reliqui fuere pluuii cum tempeſtatibus fulmineis. Pluuii fuere dies 6^{tus}, quo ſimul primum tonitru mihi eſt auditum. Altitudo pluuiae 4 linearum fuit. Ventus durante tempeſtate inter h. 7. et 8. p. m. variabilis fuit modo W modo O modo S. Barometrum 27 82. et thermometrum h. 2. p. m. 112, porro dies pluuii fuere 7^{mus}, vbi altitudo pluuiae 6. lin. dies 8. vbi pluuia 2. lin. dies 9. pluuia 4. lin. d. 10. pluuia cum grandine 2. lin. d. 11. pluuia cum grandine piſi magnitudine maioris 3. lin. d. 16. pluuia 6. lin. d. 21. pluuia cum tonitru et exigua grandine 2. lin d. 24. pluuia cum tonitru 1. lin d. 25. tonitru cum pluuia 4. lin. Die 26. magna pluuia 1. pollicis et 7. linearum, cum grandine, tonitru et fulminibus perpetuis. Die 27. tonitru cum pluuia 8. lin. Die 29. pluuia exigua lin. 1. Barometrum diebus pluviis et turbidis vltra altitudinem 27.95. non adſcendit, plerumque haerebat circa numeros inferiores niſi quod ſemel d. 21. fuit 28.12, quo pluuia cum grandine

dine cecidit et tonitrua cum fulminibus fuere. Thermometrum diebus, quibus tonuit, gradum 23. maiorem non monſtrauit.

Ex hiſce obſeruationibus adparet: 1) dies pluuios hoc menſe fuiſſe 13, et quantitatem pluuiae 5. pollicum pedis Pariſ. et 2. linearum 2) tonitrua cum fulminibus fuiſſe 6. 3) grandinem cecidiſſe quater.

Iulius.

Menſe Iulio ventus vehementior nullus contigit, venti debiles plerique ex oriente flauere, ſcilicet per dies 21, et ex occidente per dies quatuor. Sine vento dies 22. ſolus fuit.

Tonitru nullum toto hoc menſe contigit, quod ſatis inſolitum eſt.

Dies ſereni 14, reliqui nubili, ſed plerique pluuii, et quidem pluuii dies 3. 4. 10. 11. 13. 14. 18. 23. 24. 25. adeoque 10. Quantitas pluuiae fere fuit 4. pollicum Pariſienſium.

Auguſtus.

Neque hoc menſe ventus vllus vehementior obſeruatus eſt. Venti debiles ex oriente et occidente vt plurimum ſpirauere, et quidem per 13 dies ex oriente et per 10 ex occidente. Sine vento d. 1. 16, ſaepius autem noctibus. Tonitru hoc menſe eſt obſeruatum die 17. cum pluuia inter h. 2. et 3. p. m. thermo-

mometro 115, barometro 27. 92. Ventus W paullo vehemens durante tempeſtate, vt ſolet, fuit.

Nebula conſpecta die 30. vento O 1, quam nocte pluuia ſequuta eſt.

Dies ſereni fuere 15, reliqui nubili et pluuii, pluuii ſcilicet 6. dies 8. 17. 18. 21. 23. 30. Quantitas pluuiae $3\frac{1}{2}$. lin.

September.

Venti vehementiores hoc menſe flauere tres, die 22. W 3. et 4. d. 25. S. 3. et 4. d. 27. W 3. et 4. Barometro flantibus his ventis inſigniter deſcendente.

Caeterum venti debiliores ex occidente ſpirarunt die 2. 11 16 22. 28. 30. adeoque per ſex dies. Ex oriente diebus 1. 3. 8. 10. 12. 13. 29. adeoque ſeptem. Ex meridie ſemel die 25. Ex ſeptentrione d. 5. 20. reliqui ex plagis intermediis. Sine vento fuere dies 9. 14. 15. 16. 21. adeoque quinque.

Dies ſereni 6. ſcilicet 2. 8. 10. 21. 23. 28. reliqui nubili et pluuii. Pluuia cecidit die 1. 4. 7. 18. 22. 26. 27. 29. Quantitas pluuiae $3\frac{1}{2}$. poll.

Grando cecidit bis die 22.

Nebulae fuere d. 11. 20.

Pruina die 11. et congelatio prima thermometro 150.

October.

Venti vehementiores hoc menſe fuere d. 1, W 3. d. 9. nocte N 3 et 4. d. 12. W 3. et 4. Reliqui venti maiorem partem fuere W ſcilicet per dies 22.

Sine

Sine vento dies 6. fuere, nimirum 8. 21. 23. 25. 27. 31.

Dies ſereni 12. ſcilicet 5. 6. 10. 11. 13. 16. 17. 19. 20. 21. 28. 29. reliqui nubili, pluuii et niuoſi. Pluuia d. 3. 8. 22. 27 30. et 31. adeoque per ſex dies.

Niues die 9. 12. 14. 16.

Grando d. 3. et 4.

Nebulae die 24. 27. 31.

Nouember

Hoc menſe duo venti vehementiores ſunt numerati, nimirum die 26. et 28. W 3. tantum nocte. Reliqui omnes admodum debiles fuere et quidem W et NW 4. ſcilicet die 6. 26. 27. 29. O et S. O 10. ſcil 7. 9. 12. 13. 17. 18. 21. 24. 25. 30. N d. 3 et 5. S d. 4. et 22.

Sine vento dies 4. 10. 11. 15. 16. 19. 20. 29. adeoque octo.

Dies ſereni 5. nimirum 4. 5. 19. 21. 29.

Pluuia cum niue d. 1. Niues d. 3 6. 7. 10. Pluuia d. 11. Nix d. 12. 13. 22. Pluuia d. 25. Nix d. 28. et 30.

Nebula craſſior die 20. a m.

Glacies in flumine Neua adparere coepit die 2. nocte, thermometro 166. ſequenti die 3. h. 10. p. m. glacies iam ſtetit, thermometro 164. Saepius, quin perpetuo, obſeruauimus gradu frigoris ad 166. perueniente et aliquot dies durante, glaciem in Neua adparere incipere, et mox ſtare, niſi ſubito tempeſtas mitior incidat. Conſtat iam ex antecedentibus et aliunde terminum maximum,

mum, quo flumen glacie conſtrictum eſt, eſſe Nouembris 30, qui ter ab 1718. adhuc fuit obſeruatus, ſcilicet 1719. 1727. 1729. et minimum die 23. Octobris, qui ſemel eſt notatus 1750. Differentia igitur maxima eſt 39. dierum, hinc medius numerus eſt fere Nouembris 20, quo die quoque intra tempus dictum quinquies coiit glacie flumen. Idem huius anni terminus fuit quoque 1748. notatus.

December.

Menſe Decembri venti vehementiores obſeruati ſunt ſequentibus diebus 16. et 17. W 4. die 29. 30. et 31. N W. 3. et 4.

Venti reliqui leniores primum ex occidente ſpirarunt 13. dies. Ex S per ſex dies, totidemque dies ex N. et ſemel ex O. Sine vento nullus fuit dies hoc menſe niſi 3. ex parte.

Dies ſereni fuerunt quinque ſcilicet 2. 3. 9. 12. 23. Niuoſi vero nouem, reliqui tantum nubili.

Quodſi meteora integri huius anni hactenus recenſita conſiderentur et conferantur, adparet

1) Ventos vehementiores per totum annum fuiſſe 18, ſcilicet menſe Martio 1. Apr. 3. Maio 2. Sept. 3. Octob. 3. Nou. 2. Dec. 4, eosque vt plurimum W. Vnus enim tantum menſe Septembri fuit S, et vnus N. Octob. Dec. duo N W, et ſine vento vehementiori fuere Ian. Febr. Iun. Iulius, Auguſtus.

2)

2.) Ventos potiſſimum ſpiraſſe ex W ſcilicet 134. dies vt Ian. 9. Febr. 5. Martio 21. Apr. 6. Maio 21. Iun. 13. Iul. 4. Aug. 10. Sept. 6. Octobr. 22. Nou. 4. Dec. 13. Praecipue igitur menſibus Martio, Maio, Octobri.

Ventos ex oriente 93. ſcilicet 13. Ian. 10. Febr. 8. Apr. 4. Maio 10. Iun. 21. Iul. 13. Aug 7. Sept. 10. Nou. 1. Dec. Ergo potiſſimum menſe Ian. Iul. Auguſto.

Ex meridie 18.

Ex Sept. 16. Dies autem ſine vento fuiſſe 44. Hinc intelligitur, ventum ex occidente hoc anno fuiſſe frequentiſſimum, quod et alias fieri ſolet, ventum ex oriente ſatis quoque frequentem, minus autem frequentes ex meridie et ſeptentrione. Per 60 autem dies ex plagis diuerſis intermediis flauit.

3.) Dies ſereni integro hoc anno fuere 144. ergo tertia pars et amplius fuit ſerena.

4.) Dies pluuii menſibus aeſtiuis Maio, Iulio, Auguſto, Septembri fuere 40. ſcilicet Maio 3. Iunio 13. Iulio 10. Auguſto 6. Septembri 8.

Quantitas pluuiae fuit 16 pollicum Pariſinorum et 9 linearum in his diebus: nimirum menſe Maio octo linearum, Iunio 5. pollicum 2. lin. Iulio 4. poll. Auguſto poll. 3. lin. 6. Sept. poll. 3. lin. 5. Hinc aeſtatem ſolito humidiorem fuiſſe conſpicitur, adeoque minus quoque fertilem, dum propter copioſam pluuiam et foenum et frumentum multum corruptum eſt, ſatis laete creuit foenum tamen in locis aridioribus.

 5)

5) Grandines per integrum annum cecidere per 9 dies ſcilicet Maii 12. et 20. Iun. 10. 11. 21. 26. Sept. 22. Octobr. 3. et 4.

6.) Nebulae fuere mihi ſeptem obſeruatae, nimirum Auguſti 30. Sept. 11. et 20. Octobr. 24. 27. 31. et Nou. 20. quae thermometro 176. monſtrante accidit, et admodum ſpiſſa adparuit, flumine iam a die 3. huius menſis glacie obducto, quod frequenter non contingit.

7.) Tempeſtates fulmineae fuere ſeptem, quae, excepta vna, omnes menſe Iunio fuere, ſcilicet die 6. quo primam obſeruaui, die 21. 24. 25. 26. 27. Auguſti 17. fuit vltima.

8.) Prima pruina et congelatio mature contigit, ſcilicet Sept. 11, vti vltima hujus anni fuit Aprilis 24. adeoque differentia eſt 4. menſium 17. dierum, quod tempus $4\frac{1}{2}$ menſium circiter, menſes aeſtiuos, ſiue aeſtatem hic fere conſtituere ſolet.

9.) Halo vnica eaque circa Solem cum coloribus eſt obſeruata Maii 25, quae alias circa Solem praecipue autem Lunam eſſe frequentiores ſolent.

10) Aurora borealis vnica tantum inſignis ſecundum obſeruationes meas contigit, nocte inter diem 15 et 16 menſis Martii, licet ſaepius veſtigia lucis borealis adparuerint.

11.) Si quatuor tempeſtates fixae porro comparentur, adparet, hiemem ſatis gelidam et conſtantem fuiſſe, ver adhuc ſatis frigidum, contra aeſtatem et autumnum humidiores, hinc annum in his locis minus fertilem.

Ad-

Ad haec ſequentia addere placet:

Conſtat iam alias, declinationem acus magneticae hic loci parum eſſe variabilem, hinc nullam differentiam inter declinationem huius et anni ſuperioris notare mihi licuit; manet igitur declinatio $4\frac{1}{2}$ graduum fere occidentem verſus.

Fuerunt, qui exiſtimarent maculas ſolares influxum quoque in tempeſtates habere. Quamuis haec ſententia probabilis non videatur, quum effectus eiusmodi obſcurationum Solis per maculas vix ſenſibiles in atmoſphaera noſtra videantur: adnotare tamen hic lubet hoc anno maculas in Sole fuiſſe copioſiſſimas, nullo enim die ſereno Solem tubo 5 pedum contemplatus ſum, quin maculas conſpexerim plures, Decembris 21. duodecim ſimul mihi obſeruare contigit. Quaedam multo maiores adparebant, quam Mercurius ſolet, Solem tranſiens.

Denique quum nullum ſit dubium, quin aer atmoſphaericus, et tempeſtates anni ſuos in corpus humanum, eiusque ſanitatem exſerant effectus; morbos praecipue hoc anno humido graſſatos, addere volui. Fuere autem illi praecipue febres inflammatoriae, peripneumoniae, pleuritides, petechiales, catarrhales, quae vltimae fere omnibus menſibus fuere obſeruatae, variolae, ſcorbutus, febres intermittentes, acutae, peracutae cum deliriis, arthritides, et menſe Octobri quoque anginae. Diarrhoeae ſatis frequentes, vt alias, quoque fuere.

DESCRIPTIONIS PISCIVM RARIORVM E MVSEO PETROPOLITANO EXCEPTORVM CONTINVATIO.

Auctore

I. T. KOELREVTER.

IV.

Cyprinus pinna caudae horizontali, ſubtrifida; dorſuali faſtigata, paruula.

DESCRIPTIO.

Tab. IX. fig. 1. et 2. Colorem huius Cyprini, quem propinqua affinitate cum Chinenſi aurato eſſe coniunctum, pinna caudae horizontalis prodit, olim fuiſſe argenteum, et branchiarum operculi laminae, et ſquamae, hinc et inde argenteo adhuc nitentes ſplendore, probare videntur.

Corpus ab oris extremo rectius primum, notabiliter tamen ſtatim adſcendit, et arcuato dein ſub flexu pinnam dorſi petit; abhinc deſcendit ſub arcu leuiter concauo ad eminentiam quandam vsque, ſubacutam, paruam, a qua denuo vlterius ad caudae pinnam, ſub arcu leuiſſime conuexo, deſcendit.

Idem ab oris extremo, ſub flexu minus arcuato, quam quo ad dorſi pinnam adſcendebat, ad pinnarum pectoralium regionem deſcendit, dein rectiorem ſequitur

tur curſum ad pinnas vsque ventrales, et ab his denique ad caudae pinnam eodem modo ſenſim adſcendit, quo ab oris extremo antea deſcendebat. Differt itaque a vero Chinenſium Cyprino „ pinna ani gemina, caudae „ transuerſa triſurca Linn. Syſt. Nat. edit. dec. p. 322. „ n°. 8. „ quem pariter ad manus habebam, dum haec ſcriberem, quod huius corpus ab oris extremo verſus dorſum aequali fere ſub arcu adſcendat, quo abdomen verſus deſcendit, et pari quoque modo a dorſi pinna ad caudam deſcendat, quo a pinnis ventralibus ad eandem adſcendit. Sic etiam Cyprini Chinenſis caput multo magis obtuſum eſt, quam noſtratis, quod in illo ab oris extremo ſtatim arcuato ſub flexu ad dorſi initium adſcendit, cum in hoc rectiori ſub ductu idem attingat.

Prona capitis ſuperficies anteriora verſus planiuſcula, poſteriora verſus ſubconuexa eſt. Dorſum ab initio conuexum, ſenſim in ſubacutum marginem pinnam ſuam verſus contrahitur, pone quam, ſi eminentiam iſtam ſubacutam, de qua ſupra dixi, quaeque pinnae ani principio e directo opponitur, excipias, conuexum iterum ambitum ad extremum vsque oſtendit. Abdominis e contrario ſuperficies ab angulo coniunctionis vtriusque membranae branchioſtegae e conuexa ſenſim planior fit, inter pinnas ventrales et anum in ſubacutum contrahitur marginem, et pone pinnae ani finem planitiem denuo acquirit notabilem. Latera capitis infra et ante oculos plana, circa branchiarum opercula ſubconuexa; qualia etiam trunci ſunt latera, ad anteriora tamen magis, ad poſteriora minus.

 Oris

Oris edentuli, leuiter prominentis, labia carnoſa, immo carnoſiora mihi viſa, quam in Cyprino Chinenſi.

Foramina Narium vtrinque duo, in eadem fere cum ſuperiore orbitae margine poſita altitudine, eidemque, quam oris extremo, propiora: anteriori ſubrotundo, minori; poſteriori maiori, ſemilunari, membranula retrorſum ſpectante, velut operculo, obtecto.

Oculi ſatis magni, limbo ſuperiore magis prominentes, quam inferiore, maximam partem intra orbitam recondito.

Opercula branchiarum cum membrana branchioſtega eiusdem plane ſunt conformationis, ac in Cyprino Chinenſium. Membrana, qua illorum margo auctus deprehenditur, non tantum iuxta pinnarum pectoralium principium, id quod manifeſto attingit, ſed etiam ad ipſius cum membrana branchioſtega coniunctionem, latior multo eſt, quam verſus angulum operculorum ſuperiorem.

Squamae cuti arcte inhaerentes, et reſpectu corporis magnae; quaedam ſc. ex maioribus detractae, $1\frac{1}{4}$ lin. latae, et $1\frac{1}{5}$ lin. longae, margine libero rotundatae, altero truncatae et emarginatae erant.

Linea longitudinalis ex angulo operculi branchiarum ſuperiore prodiens, ab initio ſenſim deſcendit ad regionem vsque, principio pinnarum ventralium e directo oppoſitam, ſenſimque ex obliquo in rectum extenſa, immutata directione, excurrit ſupra extremam et horizontaliter expanſam corporis partem lateralem, qua exterior pinnae caudae lobus ſuſtentatur,

et

et iuxta radii eiusdem pinnae medii maiorisque baſin finitur, in toto decurſu dorſo, quam ventri, propior.

Anus leuiter prominens, ante pinnae ani principium ſitum obtinet. Iuxta pinnae huius finem, in ſiniſtro latere, ex abdominis margine inferiore papilla quaedam dependet, pedunculo craſſiuſculo ſuffulta, de qua dubius ſum, num ex ſtatu morboſo, an naturali, ortum ſuum duxerit?

Pinnae pectorales radiorum quindecim circiter, a primo ad tertium, qui longiſſimus eſt, ex ordine longiorum, et ab hoc ad vltimum ex ordine breviorum.

Pinna dorſi parua, reſpectu ventralium, paullo anterius ſita, radiorum ſex: primus horum breuis ſetaceus, ſecundo arcte adpreſſus; ſecundus omnium fortiſſimus, ſimplex, leuiter incuruatus, rigidus, poſtico margine denticulis oblique deorſum ſpectantibus inſtructus, tertio breuior; tertius omnium longiſſimus, tenuior; reliqui ex ordine breuiores ac tenuiores, vltimo excepto, qui penultimo et antepenultimo fortior eſt.

Pinnae ventrales radiorum octo, quorum primus ſecundo paullo breuior, ſecundus tertio, longiſſimo, caeteri ex ordine breuiores ſunt.

Pinna ani vnica, radiorum ſeptem: primus ſetaceus, ſecundo dimidio breuior, eique arcte adpreſſus; ſecundus omnium fortiſſimus, rigidus, ſimplex, margine poſtico denticulis, oblique ſurſum ſpectantibus, inſtructus, rectus, tertioque paullo breuior; tertius longiſſi-

giſſimus, et ab hoc incluſiue ad vltimum omnes in extremitatibus ramoſi, ac ex ordine breuiores; vltimo bipartito.

Pinna caudae horizontalis, magna, vtrinque leviter deflexa, inaequaliter trifurcata, radiisque circiter triginta ſex compoſita: 1mus, 2dus ac 3tius, ab vtroque latere, radii breuiſſimi, vix conſpicui; 4tus, 5tus et 6tus, omnium longiſſimi; caeteri ex ordine iterum breuiores ad intimum vsque pinnae caudae lobum, quocum vterque lateralium angulum obtuſum efficit; huius denique, intimi nempe, radii, ab extimis ad interiores, ex ordine longiores ſunt, interiorumque vnus reliquis fortior factus eſt, magisque ad baſin ſuam prominulus. Lobus etiam eiusdem pinnae dexter ſiniſtro paullo maior, medius autem lateralibus longe breuior eſt; et, quoniam modo dictae pinnae latera modice deflexa ſunt, baſis eius ſquamata, ſub cauda, concaua ex parte apparet. Deſuper, me caudae pinnam in vero Chinenſium Cyprino paullo aliter formatam deprehendiſſe, quam quidem a Cel. *Linnaeo* in Actis Stockh. 1740. p. 403, T. 1. f. 1—8. verſ. germ. deſcripta exſtat, praetermittere nolui: erat nempe in tres lacinias, aequalis inter ſe longitudinis, diviſa, quarum media partem dimidiam pinnae caudae perpendicularis, qualem in piſcium plurimis ordinarie videmus, eamque ſuperiorem, repraeſentabat, illiusque inſtar radiata quoque erat; radii enim, 1, 2, 3, 4 et 5 omnium minimi et ſimplices, a primo ad quintum ex ordine longiores; ſextus et ſeptimus, omnium longiſſimi ac fortiſſimi; octauus, nonus et decimus prio-

prioribus paullo breuiores ac tenuiores; omnesque, exceptis quinque vel ſex ſuperioribus, in extremitatibus ramoſi erant. Huius laciniae, decem radiis conſtructae, radio infimo intimus vtriusque lateralis ac horizontalis laciniae radius, membranae ope, radios pinnarum ſolito more connectentis, iungebatur. Singula harum lacinia, ſub angulo plus minusue recto cum media, mediante iam dicto radio, connexa, e quindecim conſtabat radiis: extimis quatuor, omnium minimis; quinto, ſexto et ſeptimo, omnium longiſſimis ac fortiſſimis; caeteris, ab octauo ad decimum quintum, qui intimus erat, ex ordine breuioribus; omnibusque, ſi quatuor vel quinque exteriores exceperis, in extremitatibus ramoſis. Baſis huius pinnae ſub cauda erat excauata, prout etiam in *Linnaeana* deſcriptione monetur, medium autem eiusmodi in intermedia pinnae lacinia radium, reliquis fortiorem, ab iisque forma maxime diſtinctum, qualis in icone proſtat, et deſcribitur, non vidi. Ea propter autem deſcriptionem, a Cel. Viro datam, mendo laborare, non contendam, cum in ſupra deſcripto piſce caudae pinnam ei per omnia fere ſimilem eſſe, ipſe viderim, qualem in Cyprino ſuo deprehendit Auctor, fide digniſſimus, ſed exponam potius hanc ſtructurae varietatem, tanquam maxime ſingularem, in dubio haerens, vtrum diuerſam plane ſpeciem, varietatemue tantum, an ſexus diuerſitatem potius indicet, erat autem maſculus, caeterum Chinenſi ſimillimus, ſi excipias, quod dorſi pinna in noſtrate viginti, ventrales octo tantum, radiis fuerint inſtructae.

Menſura.

	Ped. Pariſ.	Poll.
Longitudo tota, ſcil. ab oris extremo ad apices radiorum pinnae caudae longiorum -	2	2
— — — ab oris extremo ad extremitatem corporis ſquamoſam - - - - - -	1	$9\frac{1}{2}$
Ab oris extremo ad oculi medium - - -	–	$2\frac{1}{2}$
— — — ad angulum operc. br. poſticum -	–	7
— — — — principium pinnarum pectoralium -	–	$6\frac{1}{2}$
— — — — — — pinnae dorſi - - - - -	–	10
— — — — — — pinnarum ventralium -	–	$10\frac{1}{2}$
— — — — — — pinnae ani - - - -	1	$3\frac{1}{3}$
— — — — — — — — caudae - - - -	1	7
— — — — ad anum - - - - - - -	1	3
Longitudo pinnarum pectoralium - - - -	–	$4\frac{1}{2}$
— — — pinnae dorſi, ad baſin - - - -	–	$1\frac{1}{4}$
— — — — — — radiorum longiorum - -	–	$3\frac{1}{2}$
— — — pinnarum ventralium - - - -	–	4
— — — pinnae ani, ad baſin - - - -	–	$2\frac{1}{2}$
— — — — — — radiorum longiorum - -	–	3
— — — pinnae caudae, ſcil. a primis radiis, ſeu ab eius principio ad longiorum radiorum apices - - - - - - - - - -	–	7
Extremitas corporis ſquamoſa, in caudae pinnam extenſa ad - - - - - - -	–	1
Diameter oculi fere - - - - - - - -	–	2
Diſtantia inter primi pinn. pect. primique pinn. ventr. radii baſin - - - - - -	–	$3\frac{3}{4}$

Diſtan-

	Ped. Pariſ.	Poll.
Diſtantia inter vltimi pinnae dorſi radii baſin, et primum pinnae caudae radium - -	-	$9\frac{1}{2}$
— — — — vltimi pinnae ani radii baſin, et primum pinnae caudae radium - - -	-	$1\frac{1}{2}$

	Lin.
Latitudo horizontalis per oculorum axes - -	$3\frac{1}{2}$
— — — — — — — — poſticum operc br. marginem - - - - - - - - - - - -	$3\frac{2}{3}$
— — — — — — — — maximam corporis latitudinem, quae in operculum branchiarum cadit - - - - - - - - - - - -	$4\frac{1}{4}$
— — — — — — — — pinnae dorſi principium	$3\frac{2}{3}$
— — — — — — — — — ani principium - -	$1\frac{1}{3}$
— — — — — — — — — caudae principium -	$2\frac{1}{2}$
Latitudo perpendicularis per oris angulum - -	$1\frac{1}{2}$
— — — — — — — — — — oculi medium - -	$4\frac{1}{3}$
— — — — — — — — — — dorſi initium - -	6
— — — — — — — — — — principium pinnarum pectoralium - - - - - - - - - - -	7
— — — — — — — — — — — — ventralium - -	6
— — — — — — — — — — — — pinnae ani - - -	$3\frac{1}{4}$
— — — — — — — — — pinnae ani finem - - -	$1\frac{2}{3}$
— — — — — — — — — principium pinnae caudae -	1

* * *

V.

Gobio pinna ventrali ſubrotunda, acetabuliformi, e duobus pedunculis, octoque radiis, valde ramoſis, compoſita.

Tab. IX. fig. 3. et 4.

DESCRIPTIO.

Color Piſcis, cuius deſcriptionem nunc aggredior, in praeſenti pallide brunus, circa os ſubfuſcus, ſub gula et abdomine cinereus erat.

Corpus forma maxima ex parte, eaque anteriore, ſubteres, poſteriore cathetoplateum, eiusdemque fere vbique latitudinis, craſſitiei autem ab anterioribus poſteriora verſus ſenſim decreſcentis. Idem ab oris extremo ad capitis verticem adſcendit, adſcenſuque ſuo, leuiſſimo quidem, ad pinnae dorſi principium vsque pergit, inde vero ſecundum rectam fere lineam ad extremum vsque vix notabiliter deſcendit. Sic quoque ab maxillae inferioris extremitate acetabulum verſus mediocriter valde adſcendit ab eiusque dein poſtico margine anum verſus leuiter deſcendit ſub ductu parum conuexo, abhinc vero ad extremum vsque, vt ſupra, curſum fere rectilineum obſeruat. Hinc caput ipſo corpore demiſſius; dorſum ab initio, ad pinnam ipſius primam, planiusculum, in medio ſecundum longitudinem ſulco ſuperficiali diſtinctum, qui ad anteriora latior, poſtice anguſtior eſt, in aliquali a pinnae iſtius principio diſtantia plane euaneſcit, colore, quam latera, intenſiore tinctus; reliquum dorſi iuxta pinnas ſubcon-

conuexum, interque poſterioris finem et caudae pinnae initium planiusculum eſt. Inferior corporis ſuperficies ante acetabulum ſubconuexa, pone illud vsque ad anum in carinam mediocriter elauatam contracta, eiusdemque ad latera ſinuata, ab ano vero, tam iuxta pinnam, quam pone eam ad caudae pinnam vsque planiuscula apparet. Latera corporis, a capite pinnae dorſualis ſecundae regionem verſus, conuexa primum, inde, mutata ſenſim in planitiem conuexitate, ad extremitatem vsque plana ſunt.

Caput latius parum, quam altum, hinc quodammodo plagioplateum tam inter oculos, quam infra eosdem, vbi in decliue oblique antrorſum abit, e planiusculo leuiter impreſſum, eſt. Os, reſpectu corporis, amplum; rictus enim diameter transuerſa toti capitis latitudini aequalis eſt. Labium maxillae ſuperioris latum, craſſum, liberum, inque oris extremo, leporini labii inſtar, fiſſum, oblique parum retrorſum flexum: margine exteriore longiore, magisque prominente, interiore breuiore, denticulis contiguo. Ex huius, interioris nempe, medio, proxime infra labii fiſſuram, papilla quaedam parua prominet. Labium inferius, quod pari cum ſuperiore fiſſura notatur, ipſamque maxillam inueſtit, prominet, ac ab antico ipſius et ſubacuto margine oblique ſurſum introrſumque verſus dentes ducitur, vtrinque appendice, qua mediante cum ſuperiori ad oris angulos coniungitur, auctum.

Vnica in maxilla ſuperiore denticulorum, iuxta internum labii ſuperioris marginem conſpiciendorum ſe-

ries eſt, qui, quum minutiſſimi ſint, ſetarumque potius breuium, plurimarum, ac denſe compoſitarum formam habeant, numerari vix poſſunt. Dentes in maxillae inferioris ſummo margine vtrinque quatuor tantum, vel quinque, aliquali ſpatio a ſe inuicem diſtantes, breues quidem, aſt e latiori baſi in acumen introrſum incuruatum terminati, immobiles. Lingua lata, palato inferiori vndique adnata, ſuperficieque inaequali praedita. Maxilla inferior, et ore clauſo, ſuperiore notabiliter breuior, extremo ſuo et acuto margine huius denticulorum ſeriem vix attingit

Foraminula, quae a tubulis oblique truncatis, mucum ſecernentibus, vtplurimum formantur, in capite ſeptendecim obſeruaui, tria ſc. inter, quatuor ante oculos, et quinque ex vtroque latere, inter inferiorem oculi marginem ac ſuperiorem operculi branchiarum angulum obuia. Quae inter oculos ſunt, in triangulum diſponuntur, duo nempe anteriora, parallela, et vnicum in medio, poſticum; eorum vero vnum ab altero $1\frac{1}{2}$. lineam diſtat. In dimidiae lineae diſtantia ab oculi margine antico aliud occurrit, patulum, absque tubuli veſtigio, quod ſetam immiſſam in profundum ducit, huicque in vnius ac dimidiae lineae diſtantia directe anteponitur aliud, tubuloſum, e quo ad praecedens haud datur aditus. An haec duo, ante ſingulum oculum collocata, narium vices gerunt? an plenarius harum defectus? diſcernant ii, quibus Piſcem hunc diſſecandi dabitur occaſio. Sequuntur ea, quae pone oculum in vtroque latere occurrunt; vnum horum dimidiam ab oculi inferiore ac poſtico margine lineam remo-

remotum, dein alia tria videbis, in triangulum diſpoſita, et vltimum tandem in vnius ac dimidiae lineae diſtantia a praecedentibus, proxime ſupra operculi branchiarum ſuperiorem angulum ſitum. Praeter haec recenſita foramina et alia adſunt, longe iis minora, de quibus vero nimis prolixum eſſet dicere. Huc etiam ſpectant areolae iſtae ſcrobiculatae, quae infra inferiorem orbitae marginem in conſpectum veniunt, pro muci lacunis forte habendae.

Oculi, trium fere linearum interuallo inter ſe diſtantes, ſitum inter perpendicularem et horizontalem medium obtinent, nec magni ſunt, nec prominentes, vt in prius deſcripta ſpecie ſub n°. III, cute tamen communi pari modo obtecti.

In membrana branchioſtega, abſque ſectione tria tantum detegere potui oſſicula. Haec ipſa ſub operculo libera adſcendit, eiusdemque angulo poſtico, ſuperiori, demum annectitur, limbo ſuo ad poſteriorem operculi marginem prominens. Nec ad branchias vlla patet apertura, quae ab iſto membranae branchioſtegae limbo, pinnarum pectorialium baſin lambente, formatur, quaeque tam ampla eſt, vt latae harum baſi exacte reſpondeat.

Squamae ſubquadratae in circumferentia, a $\frac{1}{3}$ ad 1. lin. longae, pellucidae, ſecundum longitudinem ſtriatae, limbo libero, quin in externo latere ſtria transuerſa ab altero, cuti inhaerente, diſtinguitur, obſcuriores, craſſiores, ſtriisque longitudinalibus, prominulis, quarum extremitates, denticulorum ſub forma,

a limbi iſtius margine prominent, inſignitae, hinc ad tactum leuiter aſperae ſunt. Magnitudo ſquamarum ab anteriori verſus poſteriorem corporis partem ſenſim increſcit, diametro longitudinali transuerſam ſuperante. Squamae omnium minimae, quae anteriora corporis occupant, ſubrotundae ac tenuiſſimae ſunt. In capite, operculo branchiarum, dorſi et abdominis initio ſquamarum ne veſtigium quidem apparet.

Linea longitudinalis valde obſcura, vel potius nulla.

Anus oris, quam pinnae caudae extremo propior, poſt ſe gerit papillam latiuſculam, ex ſinu prodeuntem ac retrorſum ſpectantem, extremoque ſuo apice pinnae ani primi radii baſi fere contiguam.

Pinnae pectorales, ad latera corporis, baſi ſua carnoſa aperturae ad branchias patenti oppoſitae, ex ouato-lanceolatae, radiisque ſeptendecim inſtructae: exterioribus ab vtroque margine ad intimum vsque ex ordine longioribus, plurimis ramoſis. Pinnae ventrales inter ſe connatae, orbiculum concauum, ſeu acetabulum, repraeſentant, in aequali cum pinnis pectoralibus ab oris extremo diſtantia ſitum. Eſt autem illud in circumferentia ſubrotundum, diametri $4\frac{1}{2}$. linearum, antice duobus quaſi pedunculis, craſſiuſculis, breuibus, impreſſis, ceu fulcris, vel columellis, firmatum, radiisque praeterea octo, ſub angulo acuto ab abdomine reflexis, parumque dein inflexis, valde ramoſis, compoſitum. Pedunculi iſti, duarum linearum interuallo inter ſe diſtantes, ad baſin anguſtiores, ſuperne latiores, acetabulum

lum verſus impreſſi, et infracti quaſi ſunt, ac, licet ad anticum illius latus formandum ſuam addant ſymbolam, ab ipſo tamen acetabulo et proximis eius radiis prominent; hinc ſinum etiam efformant ſatis profundum, inter ipſorum baſes ac externam acetabuli lateris antici faciem relictum. Idem illud anticum acetabuli latus, quod vtrumque pedunculum connectit, radiis omnino deſtitutum, membranaceum ac pellucidum eſt, limbo tamen excepto, qui craſſior, obſcurior, extrorſum flexus, et pedunculorum propago eſſe videtur. Vtriusque pedunculi lateri, primum atque diſtinctum maiorem radium reſpicienti, arctiſſime iungitur radiolus quidam ſpurius, qui aeque ac ſequentes in ramos finditur, illorum partialibus radiolis tenuiores quidem, arctiorique vinculo inter ſe iunctos, pro pedunculi ipſius parte, ob arctiorem cum eo nexum, facile habendus. Inter ſpurii huius primique baſes interſtitium oblongum, mere membranoſum ac pellucidum eſt, interſtitio, quod inter veros occurrit radios, membranoſo breuius quidem, aſt multo latius. Radices octo inſequentium radiorum, quorum in vtroque corporis latere, ſeu in dimidia acetabuli parte, quatuor collocantur, oſſeae, diſtinctae ab ipſorum radiato flabello, breues ac latiuſculae ſunt, retrorſumque parum inclinatae. Radii ipſi, valde inter ſe contigui, a primo ad quartum, ex ordine, parum quidem, longiores, in ramos ſiue radiolos, ſtatim a radice finduntur tenues, ſimplices, eundoque diuergentes. Primum dextri lateris radium 7, ſecundum 10, tertium 9, quartum pariter 9; primum vero ſiniſtri lateris 7, ſecundum 8, tertium pariter 8,

 quar-

quartum 9, minoribus eiusmodi radiolis inſtructum eſſe obſeruaui; adeoque numeros vnius lateris certas inter ſe non habere rationes, per ſe patet. Licet poſteriores radii $2\frac{1}{2}$. circiter lin. longi, anteriores vero paullo breuiores ſint, ob illorum tamen maiorem verſus anum inclinationem, idem fere vbique habet profundum atque altitudinem acetabulum, ſi anticum eius latus excipias, quod ob ipſius limbum extrorſum deorſumque flexum poſtico parum demiſſius eſt. Latera acetabuli externam ſuperficiem conuexam, internam concauam habent; fundus autem, qui acetabuli partem, corpori adnatam, conſtituit, $2\frac{1}{2}$. lin. latus ac planus eſt, eiusdemque ad marginem, lateribus proximum, radiorum oſſicula radicalia cum interſtitiis ſubconcauis, quae inter ſe relinquunt, in conſpectum veniunt. Notandum etiam eſt, octo iſtorum radiorum, quibus maxima ex parte acetabulum formatur, inferiorem portionem, eamque potiorem, ſubſtantiae eſſe firmioris, rigidioris ac minus pellucidae, quam ſuperiorem, ſiue acetabuli limbum, qui ab iſta diſtinctiſſimus, tenuis, flexilis, pellucidus ac integerrimus eſt.

Pinna dorſi prima, principio ſuo acetabuli lateri poſtico fere e directo oppoſita, ſex radiorum, rigidiusculorum, quorum vltimus a penultimo longius diſſitus eſt, quam caeteri inter ſe inuicem radii, radicibus ſc. eorum $1\frac{1}{2}$. lin. interuallo inter ſe diſtantibus. Quoniam omnes huius pinnae radii, vltimo, $5\frac{1}{2}$. lin. longo, excepto, mutilati fuerant, veram eorum longitudinem indicare non potui. Membrana, a poſteriore imoque vltimi radii margine verſus alterius pinnae initium expanſa, primam ſecundae pinnae contiguam efficiebat.

Pinna

Pinna dorſi ſecunda radiorum 11, primus ſecundo parum breuior, ſimplex; ſequentes ad intermedios vsque ex ordine parum longiores; reliqui eiusdem cum intermediis longitudinis; omnes autem, excepto primo, in extremitatibus ramoſi; vltimus bifidus.

Pinna ani, initio ſuo pinnae dorſualis ſecundae initio e directo oppoſita, radiorum 11, aequalis fere inter ſe longitudinis, minoris tamen, quam pinnae dorſi ſecundae radii. Primus horum ſimplex, et ſecundo parum breuior eſt; a ſecundo ad vltimum omnes ramoſi ſunt; penultimus vltimo proximior, quam caeteri inter ſe inuicem radii.

Pinna caudae radiorum circitee 24, in extremo elliptica, integerrima, et, ſi expanditur, circumſcriptione ad marginem ſubrotunda.

Gobionem nigrum omnium fere Auctorum, qui *Go* vel *Goget* Venetis, *Sea-Gudgeon* vel *Rockfiſh* Anglis dicitur, eiusdem, quam modo deſcripſi, eſſe ſpeciei, vix crediderim, et lectores mihi aſſenſuros perſuaſum habeo, ſi ſequentia iis libuerit perpendere momenta: 1) enim *Willoughbeius* Gobioni ſuo (*a*) duplicem denticulorum in maxillis ordinem tribuit, cum noſter ſimplici tantum fuerit inſtructus. 2) Idem Auctor, et poſt eum alii quoque, in pinna dorſuali ſecunda quatuordecim numerauerunt radios, ego vndecim tantum; ſed hanc minoris eſſe momenti ratio-

 nem,

(*a*) Hiſt. Piſc. Lib. IV. cap. X. pag. 206. Tab. N. 12. fig. 1.

nem, lubens fateor, quod variare non raro in pinnis radiorum numerum certiſſimum ſit. 3) Pinnam ventralem, ſi extendatur, infudibuli figuram quadantenus imitari, idem affetit, cum in noſtrate eadem, cum rigiditate late patens, non tantum ſe extendi non patiatur, ſed infundibulum etiam nullo modo referat. 4) Quantum ex icone, tam a *Rondeletio*, quam a *Willoughbeio* data, poteſt coniici, maxilla Gobionis nigri inferior ſuperiore longior, in noſtrate e contrario breuior eſt. 5) In illo pinnae pectorales a branchiarum operculo nimium diſtant, ſi huius in comparatione habeatur ratio. 6) Pinna illius ventralis in icone *Willoughbeii* non immediate ſub pectoralibus, ſed paullo poſterius ſita eſt, neque, vt in praeſenti, adeo ſingularis ſtructurae ſpecimen, ſed verarum potius pinnarum imaginem referre videtur, ſiue formam, ſiue eximiam longitudinem conſideres, qua pectorales adhuc ſuperat. 7) In eadem icone latera corporis caudam verſus tanquam conuexa expreſſit chalcographus, quae in noſtrate cathetoplatea et plana erant; alias vt taceam rationes, quas afferre non dubitarem, ſi in eruendis characteribus eſſentialibus, et in dignoſcendis a ſe inuicem ſpeciebus ſatis eſſent comprobatae.

Menſura.

Menſura.

	Poll. Pariſ.	Lin.
Longitudo tota, ſc. ab oris extremo ad apices radiorum pinnae caudae longiorum	3	10
- - - - - ab oris extremo ad extremitatem corporis ſquamoſam	3	2
Ab oris extremo ad oculi medium	-	$4\frac{1}{4}$
- - - - - - - - - - - angulum operc. br. poſticum	-	8
- - - - - - - - - ad principium pinnarum pectoralium	-	$8\frac{1}{2}$
- - - - - - - - - - - anticum acetabuli marginem	-	$7\frac{1}{2}$
- - - - - - - - - - principium pinnae dorſi	1	$\frac{1}{2}$
- - - - - - - - - - anum	1	$7\frac{1}{2}$
- - - - - - - - - - principium pinnae ani	1	$8\frac{1}{2}$
- - - - - - - - - - - - - - - - caudae	3	
Longitudo pinnarum pectoralium	-	9
- - - - pinnae dorſi primae, ad baſin	-	8
- - - - - - - - - - - ſecundae, ad baſin	-	$10\frac{1}{3}$
- - - - - - - ani, ad baſin	-	$9\frac{1}{3}$
- - - - - - - - radiorum longiorum	-	5
- - - - - - - caudae, ſc. a primis radiis ſeu ab eius principio ad longiorum radiorum apices	-	10
Extremitas corporis ſquamoſa in caudae pinnam extenſa, ad	-	3
Diameter oculi	-	$1\frac{1}{4}$
- - - - acetabuli	-	$4\frac{1}{2}$
Ab vno oris angulo (ore aperto) ad alterum	-	6

	Poll.	Lin.
Diſtantia inter primi inferioris pinnae pecto-ralis radii baſin et primum pinnae ani radium - - - - - - - - - - -	1	1
- - - - - - - vltimi pinnae dorſualis primae radii baſin et primum pinn. dorſ. ſecundae radium - - - - - - - -	-	$\frac{1}{5}$
- - - - - - - vltimi pinnae dorſualis ſecundae radii baſin et primum pinnae caudae radium - - - - - - - - - - -	-	$5\frac{1}{2}$
- - - - - - - vltimi pinnae ani radii baſin, et primum pinnae caudae radium - -	-	$5\frac{1}{2}$
Latitudo horizontalis per oculorum axes -	-	$6\frac{1}{2}$
- - - - - - - - - - poſticum operc. br. marginem - - - - - - - - - - - -	-	6
- - - - - - - - - - principium pinnae dorſ primae -	-	6
- - - - - - - - - - - - - - - - - ſecundae -	-	5 [illegible]
- - - - - - - - - - pinnae dorſi ſecundae finem	-	3
- - - - - - - - - - principium pinnae caudae	-	1 [illegible]
Latitudo perpendicularis per oculi medium	-	5
- - - - - - - - - - - - - principium pinn pect.	-	$6\frac{1}{3}$
- - - - - - - - - - - - - - dorſual. ſecundae -	-	$5\frac{2}{3}$
- - - - - - - - - - - finem pinn. dorſ ſecundae -	-	$5\frac{1}{3}$
- - - - - - - - - - - principium pinnae caudae -	-	$5\frac{2}{3}$

* * *

VI.

VI.

Gobio pinna dorſuali vnica, longa; pectoralibus latiſſimis, acetabulum planiuſculum includentibus. Piſcis Smyrnenſis ad Muſtelas accedens. Catal. Muſ. Petrop. nº. 90.

DESCRIPTIO.

Tab. IX. fig. 5. et 6.

Color corporis vniuerſi mutatus, ſubalbidus eſt, et caudam verſus in dilute brunum vergit.

Corpus ipſum, quo ad Muſtelas quam proxime accedit, antice valde craſſum, ſubteres, ventricoſum, poſtice tenuiſſimum, maxime cathetoplateum, et, ſi pinnarum non habeatur ratio, ſatis etiam anguſtum, ac, pro capitis et ventris mole, ſolito breuius. Quod ad circumferentiam eius attinet, ab oris extremo, ſub conuexo ductu, ſupra narium regionem adſcendit, circa quam, inter oculos, aliquantum imprimitur, ſub initium dorſi denuo ſub ductu, parum conuexo, breui licet, eleuatum; deſcendit enim abhinc modice verſus pinnae dorſualis initium, deſcenſuque ſuo, eoque magis notabili, ad extremitatem vsque pergit. Idem ab maxillae inferioris extremo, ſub ductu parum concauo vsque ad ſternum prominulum, ſub rectiori vero dein verſus anticum acetabuli marginem, deſcendit ſtatim notabiliter; ab huius vero margine poſtico ad pinnae ani principium ductum ſequitur ſubconuexum, vlterio-

remque

remque dein curſum ad extremitatem vsque manifeſto ſub aſcenſu abſoluit. Piſce erecto, ſeu abdomini incumbente, etiam apparet, pronam corporis ſuperficiem eſſe conuexam ante oculos et circa narium regionem, ab vno vero ad alterum oculum leuiter impreſſam, a dorſi initio ad dorſualem pinnam vsque ſubconuexam denuo, ſulcoque leuiori, per medium dorſum ad pinnae initium excurrente, interſtinctam; latera dorſi vero iuxta pinnam anguſtiſſima, conuexa primum, ſenſim, dein ſenſimque quo propius ad caudae pinnam accedunt, decliuia magis. Inuerſo piſce, ſupinam corporis ſuperficiem, inter maxillae inferioris extremum et acetabulum, conuexam, leuiorique inſimul ad mentum impreſſione, ſternique prominentia eſſe notabilem; eandemque pone acetabulum pinnaeque ani principium, absque ſulco ſinu ve, pariter conuexam, tandemque ad abdominis latera, iuxta ani pinnam, anguſtiſſimam, ſtatim ab huius principio decliuem, et ad extremitatem vsque decliuitate continuo maiori auctam, obſeruaui. Latera corporis circa branchiarum operculum ſatis, circa pinnas pectorales autem modice, conuexa, pone has planiuscula ſunt. Ex modo dictis etiam corporis craſſities quodammodo intelligitur, quae in vniuerſum, in dimidia, eademque antica, eius parte, maxima, in altera, eaque poſtica, prioris reſpectu, minima eſt; ſpeciatim vero mox ab oris extremo magna, ad mediam operculorum branchialium partem maxima, et ad pinnae dorſi principium ventremque turgidulum vix minor, inde contra ſubito diminuta, vsque ad extremum cum decremento valde notabili, ſpectatur.

Oris

Oris obtuſi rictus, in ratione ad corporis magnitudinem habita, amplus, ab vno ſc. oris angulo ad alterum ſeptem lineas latus, eiusdem conformationis eſt, qualem in Gadis et Muſtelis alias deprehendimus.

Labia oris, nec craſſa, nec valde prominula, interiorem marginem liberum, dentiumque laminis ſolummodo contiguum habent: ſuperius inferiore craſſius latiusque, ab lamina dentium ſuperiore, ſi os apertum directe adſpicias, parum prominet, eiusdemque partem anticam obtegit; inferius, quod tenuius eſt anguſtiusque, eodem, quo ſuperius, modo inferioris laminae faciei anticae opponitur.

Maxillae fere ſemicirculares: ſuperior inferiore parum longior, vtraque lamina ſolida oſſea, ſemicirculari eſt inſtructa, cuius planiuscula ſuperficies plurimis eiusmodi ſcrobiculis, quales digitalibus imprimere ſolent artifices, exarata conſpicitur. His ipſis, non ſine concinno ordine diſtributis, et aequali ſemper interuallo inter ſe diſtantibus, ſine dubio efficitur, vt ſub manducatione v. g. cibi in ſcabra et inaequali ſuperficie conterantur, et ad deglutitionem praeparentur; adeoque laminas iſtas dentium molarium munere fungi, ac praeter hoc in capiendis firmiusque retinendis cibis ſuum pariter vſum habere, probabile eſt. Singulae laminae medium ſulco eſt diuiſum. quo duorum crurum, quibus componitur, ſymphyſis dignoſcitur. Iuxta hanc maxima earum latitudo $\frac{3}{4}$ lineas exaequat, oris angulos verſus ſenſim decreſcens.

 Vtrius-

Vtriusque harum laminarum marginem poſticum membrana ſatis valida, craſſa, plusquam dimidiam lineam lata, papillisque planiusculis referta, coronat; pronaſcitur nempe e poſtici laminae marginis radice, limbo lateribusque omnino libera; harumque ea, quae ad inferiorem maxillam pertinet, ſurſum ſpectat, oreque aperto, ſtatim in oculos cadit, cum altera, quod fauces reſpicit, minus, quam iſta, promineat. Cutis, oris interiora inueſtiens, aeque, ac membranae modo dictae, papillis vndique ſcatet.

Septem ab oris extremo lineas in palato ſuperiori conſpiciuntur puluilli duo oſſei, ſcabri, hemiſphaerici, piſi magnitudine, paralleli, vaginisque membranaceis, veluti praeputio, cincti, iisdemque in palato inferiori totidem areae planiusculae, eiusdemque indolis, reſpondent.

Narium prominularum vtrinque duo foramina, margini oculorum ſuperiori et antico propiora, quam oris extremo, ac inter ſe communicantia: poſticum, antico dimidio minus, ab oculi proximo margine 1. lineam diſtat, et in aequali diſtantia ante ſe habet anticum, maius, $1\frac{1}{2}$. lin. a proximo oculi margine, et $3\frac{1}{2}$. lin. ab oris extremo, collocatum. Interſtitium vero inter dextri ac ſiniſtri lateris nares $3\frac{1}{2}$. linearum eſt. Notari etiam merentur orificia ductuum muciferorum octo, in vtroque proni capitis latere conſpicienda, quorum primum pone oculum, tubuloſum; ſecundum, tubulo ſatis prominente inſtructum, infra eundem; tertium, haud procul ab oris angulo, pariter tubuloſum, ſed antecedentibus minus; quartum, quin-

tum

tum et ſextum, in extremo capitis limbo, ſuperiori labio contiguo, diſpoſita, aequalis a ſe inuicem diſtantiae, caeteris minora, tubuloque diſtituta; haecque ſex in ſemicirculo ſita ſunt; ſeptimum proxime ſupra ſextum, prominulum; tandem oblique introrſum octauum a priori et narium foramine antico aequaliter fere diſtans, paruulum. In aliquali ab maxillae inferioris limbo diſtantia octo iterum occurrunt foraminula, ratione ſitus, maxillae ductum ſequentia. Praeter haecce tubulorum oſtia, in cute etiam circelli minimi, non tantum in prono capite, praeſertim inter oculos, ſed etiam in dorſo et lateribus vndique ſparſim occurrunt, numero plurimi, inaequali ſpatio inter ſe diſtantes, vtplurimum disiuncti, rarius contigui. Num et ex his liquor mucoſus ſecernatur, mihi non certo conſtat; probare tamen id videtur muci coagulum, quo tota fere corporis ſuperficies erat perfuſa, et ſquamarum in vniverſo corpore defectus, quarum ad vices forſan ſupplendas cutis, alias glaberrima, iis inſtructa eſt. Horum circellorum nullum in ſupino corpore comparuit veſtigium.

Oculi, ratione corporis, haud magni, minime prominentes, cutisque communis propagine obducti, ſitum inter perpendicularem et horizontalem medium habent, et quinque linearum interuallo a ſe inuicem diſtant.

Operculum branchiarum variis muſculis, per cutem translucentibus, eſt inſtructum, quorum vnus, omnium maximus, ac dimidiam fere, eandemque inferiorem, operculi partem occupans, buccae inſtar,

valde prominet. Habet autem hic muſculus, ex ouato-oblongus, ſeu potius amygdalaeformis, ac ſecundum corporis longitudinem extenſus, ſuum duas lineas ab oris angulo principium, quod latiorem et anticam eius extremitatem conſtituit, inſertionem vero ad poſticum operculi marginem, ad eleuandum operculum et inſimul membranam branchioſtegam, ſine dubio efformatus.

Membrana branchioſtega, ampla valde, a ſupremo ac poſtico operculi angulo ad ſterni prominentiam vsque late extenſa, oſſiculis ſeptem, ſitu ac forma inter ſe diſcrepantibus, duobusque praeterea Mercurii virgulae non abſimilibus cruribus oſſeis, ex ſupremo ac poſtico ipſius angulo prouenientibus, ſuſtentatur. De his primo dicemus, oſſiculorum, proprie talium, genera, vnum poſt alterum, poſtea pertractaturi. Prodit nempe e loco modo dicto oſſiculum tenue, ſtatim a baſi, verſatili, in duo crura inaequalis longitudinis ac modice recurua diuiſum, quorum exterius, longius, in partem membranae branchioſtegae triangularem, ſpinae inſtar, ſupra pinnae pectoralis baſin, prominentem, abit, eandemque fulcit; interius, breuius, ſub angulo valde acuto, prius deſerit, aliudque oſſiculum, extremitate inferiore ſecundo membranae branchioſtegae oſſiculo laxe incumbens, tanquam acceſſorium, ſub angulo obtuſo recipit, quod vna cum cruribus virgulam Mercurii ſat bene referre mihi viſum eſt. Quod ad ipſa membranae branchioſtegae oſſicula attinet, omnia tenuia, gracilia, et aequalis fere inter ſe craſſitiei ſunt: primum, caeteris longius, rectum, et ſupra ipſius medieta-

dietatem quaſi infractum, partim maxillae inferioris marginem preſſe comitatur, partim ab eodem et operculo aliquantum recedit, extremitate antica muſculi cuiusdam, de quo inferius ſermo erit, lateri interno et maxillae limbo, laxo mediante nexu, interpoſitum, poſtica oſſiculi, quod acceſſorium ſupra vocaui, interno margini contiguum; ſecundum, tertium, quartum et quintum, parallela inter ſe ſurſumque recuruata, ſub anteriore primi parte ſuas habent radices, craſſiusculas, inter ſe conuergentes, firmoque ſatis nexu coniunctas, apicibus vero ſpinae triangularis parti inferiori, eidemque marginali, inſeruntur; ſextum ac ſeptimum denique, itidem inter ſe parallela, et notabili a praecedentibus interuallo diſtantia, ad ſterni prominentiae latus ſuas figunt radices, ab illorum radicibus longe remotas, ſurſumque leuiter recuruata, iisdem propius ſenſim accedunt, tandemque ad pinnae pectoralis baſin in apices, praecedentium apicibus ſatis vicinos, abeunt. Quamuis in deſcribendis partibus externis ad muſculos, tanquam ad internas, non reſpiciatur, ſingularis tamen in hoc piſce oſſiculorum membranae branchioſtegae compoſitio, muſculorumque, ad ea mouenda deſtinatorum, diſtributio me mouent, vt hac occaſione breuiſſimis eorum iniiciam mentionem. Quatuor autem obſeruantur muſculi, faſciales: vnus eleuator, tres, qui deprimunt. Primus, quem pro eleuatore habeo, ad ſummum operculi marginem ortus, oblique deſcendit, et oſſiculi, duobus cruribus inſtructi, baſi inſeritur; ſecundus, praecedenti triplo maior, ad mentum oritur, et, oblique transuerſo ſub decurſu, oſſiculorum, quarti et quinti,

 forte

ſorte et plurimum, radicibus affigitur; tertius, ſecundo duplo minor, cum eodemque, bino ſc. triangulum efformans, ſub ſterni prominentia conſpiciendus, ab vno ad alterum latus transuerſim extenditur, anticam, ſexti ac ſeptimi, oſſiculorum extremitatem ſubit, ac eadem cum praecedenti, inſertione gaudet; quartus, tertio aequalis, ac parallelus, ad pinnarum pectoralium baſin, eiusdemque inferiorem partem, proxime ante limbum acetabuli anticum ſitus, a duobus infimis, modo memoratis, ſexto ſc. et ſeptimo, vnius lateris aſſiculis ad iſta alterius, arcuato parum ſub flexu, in transuerſum pariter extenditur, ſuisque tendinibus, qui tenues valde ſunt, iis inſeritur. Quamuis membranae branchioſtegae late pateat ambitus, aperturam tamen ad branchias exiguam valde, ſub late triangulari ſpina, videmus, quatuor ſc. tantum lineas latitudine exaequantem.

Squamae in toto corpore nullae; id quod ſupra iam monui; neque linea longitudinalis vera, ſed ſpuria tantum, in poſteriore corporis parte, cuius per medium recta excurrit, apparet.

Anus oris, quam corporis, extremitati propior, anguſtus, minimeque prominulus eſt.

Pinnae omnes radiis ſimplicibus ſunt inſtructae; id quod alias rariſſime obſeruabitur.

Pinnae pectorales, magnae, latiſſimae, obtuſae, radiorum 33 circiter, baſin habent largam, ab inferiore aperturae angulo ad anticum acetabuli limbum ſeſe extendentem, ſuperne ſemilunari muſculo obfirmatam

tam, inferne autem plus quam vltra dimidiam partem fulcro eiusmodi muſculoſo, certe haud prominente, deſtitutam. Inferior harum pinnarum portio, ſi expanſa eſt, maximam acetabuli partem obtegit. Septem aut octo infimorum radiorum extremitates pulpoſae, vltra pinnae marginem excurrentes, breuium diuerſaeque magnitudinis, barbularum ſub forma dependent. Quoniam, pinnae huius baſis a primo ſtatim radio ad vltimum vsque, ſub ipſius deſcenſu, ſenſim antrorſum flectitur, primus ſitum multo poſteriorem, quam vltimus ſ. infimus, obtinet. Radiorum longitudo ſic ſeſe habet, vt ab infimo ad vigeſimum ſextum circiter vsque, ſenſim longiores fiant, ab hoc vero ad primum praecedentibus, longiſſimis, ex ordine parum breuiores. Craſſitiei, quam inter ſe ſeruant radii, eadem eſt ratio. Infimi vtriusque pinnae radii ſibi tam proxime adſtant, vt exiguum tantum inter ſe relinquant ſpatium; immo, ſi quis obiter hasce pinnas adſpiciat, in vnam coalitae ipſi videbuntur.

Acetabulum, quod ab inferiore pinnarum pectoralium portione quaſi includitur, ſcutum refert rotundum, planiuſculum, illi, quod in Lumpo Anglorum videmus, ſimillimum. Diuiditur autem ſulcis, in ipſius ſuperficie conſpiciendis, in varias variae magnitudinis ac formae partes, quarum omnium maxima ea eſt, quae, acetabuli medium occupans, eiusdemque limbo ſitu paullo profundior, ſub cordis figura apparet, baſi os, apice obtuſo anum reſpicientis. Haec, quam et fundum nuncupare poſſumus, $2\frac{3}{4}$ lin. diametri, ſecundum longitudinem ſtria quadam albicante, veluti ner-

vo

vo, in duas aequales diuiditur portiones, ex eademque, tanquam ex ſterno, vtrinque ſub angulo acuto emittit oblique antrorſum coſtas quinque, inferne tenuiores, ſuperne latiores, quarum ſingula in ſummitate lobo obuerſe ouato, reflexoque inſtruitur. Extremitates horum loborum latiores ipſum cordatae partis marginem terminant, quem inter et acetabuli limbi interiorem portionem ſinus valde anguſtus, aut profundior, quam alibi, ſulcus obtinet. Fundum cingit limbus, planus, latiusculus, dimidio plus ſuae latitudinis liber, interius vero vna cum fundo corpori adnatus, ſubſtantiae parte interiore durioris, rigidae, quaſi cartilagineae, foliaceae, exteriore tenuioris, membranaceae, flexilis ac vniformis. Foliaceam iſtam dixi, quod, praeter ſcutulum ſolitarium, e duodecim foliolis, ſeu lobis, contiguis, ſulcisque circumſcriptis, conſtat.

Illud, ſcutulum nempe, directe fundo cordato praepoſitum, ſubquadrangulum, lateribus exaſciatum, antico margine conuexum, poſtico vero ſterni minoris anticae extremitati continuum eſt, foliolaque magnitudine multum ſuperat. Duo proxima ſcutulo foliola, lateribus eius exaſciatis contigua, ſubrotunda ſunt, coſtisque deſtituta, caetera vero, ſubouata, oblique retrorſum ſpectant, extremitate obtuſiore fundo, acutiore membranaceae limbi parti obuerſa, ſingulumque coſtae lobatae reſpondet. Vtriusque etiam lateris intermedia anterioribus ac poſterioribus perparum maiora ſunt. De membranacea limbi parte vix habeo, quod dicam, niſi, quod ad acetabuli latera paullo latiorem, quam in reliquo tractu, eam deprehenderim.

Pinna

Pinna dorſi vnica, longa, 35 radiorum, ad dimidiam fere altitudinem cute, communis propagine, incraſſata, in caudae pinnam vsque excurrit, vltimo ſc. ipſius radio cum primo alterius, pari modo, vt caeteri, membrana connexo. Radii, a primo, quem in duobus indiuiduis a ſecundo diſtinctum, et ſpinulae inſtar prominentem vidi, ad vigeſimum quartum circiter, ex ordine longiores magisque ſurrecti, ab his vero ad vltimum vsque ſenſim breuiores fiunt, licet primis adhuc multo longiores ſint.

Pinna ani longa, radiorum 29, eiusdem, ac prior, formae et ſubſtantiae, in caudae pinnam, eodem, vt iſta, modo, et quidem paullo longius, excurrit, quia vltimus ipſius radius vltimum dorſualis radium longitudine excedit.

Pinna caudae, ratione corporis, parua, lingulata, radiorum 12. Piſcem hunc, non tantum pinnarum pectoralium, ſed acetabuli etiam forma ac ſitu, ad Cyclopterum, *Lump* Anglis dictum, mira ſimilitudine accedere, ex deſcriptione cuiuis erit clarum; quantum autem corporis potiſſimum forma, ſumma cutis laeuitate, dorſuali et ani pinna etc. ab eodem abludat, non minus euidens eſt. Eum itaque ad Genus referre placuit, cum quo pluribus, quam cum alio, notis conuenit. An in ſalſo mari, an dulcibus in aquis vitam degat, et vbi, quaeritur?

Menſura.

	Poll. Pariſ.	lin.
Longitudo tota, ſc. ab oris extremo ad apices radiorum pinnae caudae longiorum -	4	1
Ab oris extremo ad oculi medium - - -	–	6
— — — ad angulum operc. br. poſticum -	1	
— — — ad ſupremi pinnae pect. radii baſin -	1	
— — — ad infimi eiusdem pinnae radii baſin -	–	9
— — — ad anticum acetabuli marginem - -	–	9
— — — ad dorſi initium - - - - -	–	6
— — — ad pinnae dorſi principium - - -	1	3
— — — ad eiusdem finem - - - - -	3	$7\frac{1}{2}$
— — — ad anum - - - - - - - -	1	6
— — — ad pinnae ani principium - - -	1	11
— — — ad eiusdem pinnae finem - - -	3	9
— — — ad pinnae caudae principium - -	3	7
Longitudo radiorum pinnae pect. longiorum -	–	9
— — — pinnae dorſi, ad baſin - - - -	2	$4\frac{1}{2}$
— — — — — — radiorum longiorum - -	–	$5\frac{1}{2}$
— — — — ani, ad baſin - - - - -	1	11
— — — — — — radiorum longiorum - -	–	$4\frac{1}{2}$
— — — — caudae - - - - - - - -	–	6
Diameter oculi - - - - - - - - -	–	$1\frac{2}{3}$
— — — acetabuli - - - - - - - -	–	$5\frac{1}{2}$
Ab vno oris angulo (ore ſc. aperto) ad alterum - - - - - - - - - -	–	7

Diſtantia

	pol.	lin.
Diſtantia inter ſingulum oculum - - -		5
— — — — infimorum vtriusque pinnae pect radiorum baſis - - -	—	$2\frac{1}{4}$
— — — — anticum acetabuli marginem et anum - - - - - - - - - - - -	—	$0\frac{1}{4}$
— — — — anum, et primi pinnae ani radii baſin	—	5
Membrana vltimi pinnae dorſi radii in caudae pinnam excurrit ad - - - - - - -	—	$1\frac{1}{4}$
— — — — pinnae ani radii in eandem excurrit ad - - - - - - - - - - -	—	2
Latitudo horizontalis per oculorum axes - -	—	9
— — — — — — — medium operc. bronch	—	1
— — — — — — — pinnarum pect. baſin	—	$0\frac{1}{2}$
— — — — — — — pinnae dorſi princpium	—	$9\frac{1}{2}$
— — — — — — — anum - - - -	—	9
— — — — — — — pinnae ani principium	—	5
— — — — — per eiusdem pinnae medium	—	$1\frac{2}{3}$
— — — — — — — — — — — — finem	—	$\frac{1}{4}$
Latitudo perpendicularis per oculi medium - -	—	$9\frac{2}{3}$
— — — — — — — — pinn. pect baſin -	1	
— — — — — — — — — — - - extrem. marg	1	
— — — — — — — — ani principium - -	—	$0\frac{1}{2}$
— — — — — — — — — medium - -	—	$5\frac{1}{2}$
— — — — — — — circa pinnae ani finem -	—	2

* * *

VII.

Sparus, duabus vtrinque maculis notatus; primo pinnarum ventralium radio longiſſimo, aſtaci antennam referente.

DESCRIPTIO.

Tab. X. fig. I. Color Piſcis, in ſpiritu vini aſſeruati, e luteo in ſpadiceum vergit, in prono capite, dorſo, poſterioreque corporis parte intenſior, in capitis lateribus pinnisque dilutior, in operculis branchiarum et regione, pone pinnas pectorales ſita, ac circa ventrales dilutiſſimus et argenteo ſplendore mixtus. Intenſioris e luteo ſpadicei coloris obſcura etiam ſedecim circiter zonarum, per transuerſum corporis ductarum, veſtigia adhuc ſuperſunt; rectae quidem hae ſunt, aſt non item perpendiculares, ſed poſteriora verſus parum inclinatae, ita, vt cuiusuis extremitas ſuperior, dorſalis, reſpectu ad ſitum inferiore, ventrali, ſit poſterior. Dorſi, caudaeque, pinnarum radii colore albicante et ſpadiceo alterno variegati. Duae denique in vtroque corporis latere ſunt obſeruandae maculae, ſubrotundae, e bruno fuſcae, quarum vna in medio fere corpore, diametri trium linearum, proxime infra lineam longitudinalem ac poſteriore ſua parte pinnae dorſalis principio directe ſuppoſita; altera minor, ad extremitatem corporis, ſupra pinnae ani finem, huicque, quam extremo dorſo, propior.

Totum

Totum corpus cathetoplateum, latiuſculum, et ab anterioribus poſteriora verſus craſſitie ſenſim decreſcens. A prona capitis parte, conuexa, recta et decliui, dorſum ſtatim modico arcu aſcendit vsque ad pinnam dorſalem, mox circa quintum huius radium ad I lineam vsque depreſſum, in linea fere recta ad caudae pinnae principium vsque deſcendit, conuexam vbique ſeruans ſuperficiem.

Inferior corporis margo a maxilla inferiore ad caudae pinnam vsque vnicum modo arcum deſcribit, a principio ad anum vsque conuexus, a pinnae ani initio vero vsque ad eius finem ſenſim magis magisque attenuatur.

Capitis latera anterioraque corporis leuiſſime tantum conuexa, poſteriora e toto fere plana.

Os directe ante oculos locatum, paruulum, arcuatum. Labia oris carnoſa, dentes tegentia. Dentes in vtrisque maxillis conferti, obtuſi, minimi, fere aequales.

Foramina narium vtrinque duo, inter ſuperius oris labium et orbitae marginem anteriorem eumque ſuperiorem aequali in diſtantia diſpoſita: anteriore minimo, membranula, antrorſum ſpectante, velut operculo, obtecto; poſteriore ampliore, retrorſumque patente.

Oculi palpebris deſtituti, limbo ſuperiore magis prominentes, quam inferiore, maximam partem intra orbitam recepto. Iris ex argenteo in pallide brunum colorem vergens. Pupilla ſubrotunda.

Opercula branchiarum membrana, marginem inveſtiente, et ſupra pinnae pectoralis baſin in triangularem lobulum exeunte aucta, inferioreque marginis parte ciliis oſſeis exaſperata.

Malae os (quod etiam altera alteri ſuperincumbens operculi lamina poſſet nominari) ad anguli poſtici marginem denticulis eſt inſtructum. Pariter etiam margo laminae iſtius oſſeae, orbitam inter ac oris angulum deflexae, denticulis armatus eſt.

Oſtium, ad branchias patens, longum quidem, aſt anguſtum valde.

Membrana branchioſtega, ſi quae forſan adeſt, in conſpectum non cadit; an ſub denſo iſto, quod inter malae oſſa conſpicitur, ſquamarum ſtrato recondita?

Squamae denſe confertae ac molles, totum non ſolum corpus, ſed et omnes capitis partes, exceptis ſolum labiis oculisque, totam fere ani pinnam, vt et dorſi, caudae, pectoraliumque pinnarum baſin obtegunt; maximae ſuper caput, branchiarum opercula, malae oſſa ac anteriorem corporis partem, poſteriorem verſus autem ſenſim minores, quae in pinnis ſunt, et praeſertim in ani pinna, omnium minimae. Linea longitudinalis ex angulo operculi branchiarum ſuperiore prodiens, modicumque deſcribens arcum, poſticum ac ſupremum maculae, in medio corpore ſitae, marginem petit, inde rectiore via, leuique tamen ſub aſcenſu, per medium corporis decurrit, ſubitoque ad vnius circiter lineae altitudinem ſurſum inflexa, leui ſub deſcen-

ſu,

ſu, et, poſtquam recta per ſupremum alterius maculae ad caudam conſpiciendae marginem tranſiit, ad medii pinnae ani caudae radii baſin terminatur.

Anus in foſſulam demerſus.

Pinnae pectorales lineari-lanceolatae, radiorum vndecim; extimis breuiſſimis, ſimplicibus, interioribus ex ordine longioribus, ac bifurcatis.

Pinnae ventrales, iuxta abdominis marginem, reſpectu pectoralium 1½ lin. ſitu anteriores, ſibique valde approximatae, ſetaceae, longiſſimae, aſtacorumque antennis ſimiles, radiorum quatuor, quorum tres inferiores in vtraque pinna tenuiſſimi ac breuiſſimi; infimo ſc. ſeu quarto 1 lin. tertio 2 lin. ſecundo 2½ lin. tantum longo. Primus autem, reſpectu illorum valde craſſus, teres, ſetaceus, flexilis, omniumque longiſſimus; ac baſi ſc. verſus apicem ſenſim attenuatur, innumerisque articulis, magnitudine ſenſim decreſcentibus, aſtaci antennarum inſtar, compoſitus eſt, et, in rectam extenſus lineam, tenuiſſima ſua extremitate pinnae caudae radiorum apices fere attingit.

Pinna dorſalis, in ſquamoſa baſi faſtigata quaſi, citra dorſi medietatem ſita, radiorum tredecim, ex ordine ſenſim longiorum. Priores quinque, ſimplices, rigidi, caeterisque craſſiores, veri ac validi ſunt aculei; ſequentium, a ſexto ad duodecimum, qui longiſſimus eſt, plerique infirmiores, flexiles magis ac ramoſi; vltimus penultimo paulo breuior.

Pinna ani, ab ano ad caudae pinnae initium extenſa, radiorum circiter quadraginta quatuor, maxi-

mam

mam partem ſimplicium; a primo ad trigeſimum ſextum vsque ex ordine ſenſim longiorum, ab hoc ad vltimum vero ex ordine ſenſim breuiorum. Decem vel duodecim priores rigidi, validi et aculeati, ſequentium plurimi molliores; vltimorum quidam ſubramoſi. Caeterum, ſi de numero et longitudine radiorum certus eſſe velis, pinna, quae denſo ſquamarum ſtrato obtecta eſt, deſquamanda tibi prius erit, vt radii denudati in conſpectum veniant.

Pinna caudae modice bifurca, lobis obtuſis, radiorum octodecim, ramoſorum; vtriusque lobi intermedii ac exteriores caeteris, quos includunt, longiores.

Menſura.

	Poll. Pariſ.	Lin.
Longitudo tota, ſc. ab oris extremo ad apices radiorum pinnae caudae longiorum	4	
- - - - ab oris extremo ad extremitatem corporis ſquamoſam - - - - - - -	3	1
Ab oris extremo ad oculi medium - - -	-	4
- - - - - - - ad angulum operc. br. poſticum	-	$9\frac{1}{3}$
- - - - - - - principium pinn. pectoralium	-	$10\frac{2}{3}$
- - - - - - - - - - - - - - ventralium	-	11
- - - - - - - - - - - - - pinnae dorſi - -	1	10
- - - - - - - - - - - - - - - - - ani - -	1	$1\frac{1}{2}$
- - - - - - - - - - - - - - - - - caudae -	3	
- - - - ad anum - - - - - - -	1	$1\frac{1}{2}$

Longi-

	Poll.	Lin.
Longitudo pinnarum pectoralium - - - -		$10\frac{1}{2}$
- - - - - - - - - ventralium - - - - -	3	1
- - - - pinnae dorſi, ad baſin - - - - -	-	6
- - - - - - - - - - - - radiorum longiorum -	-	11
- - - - - - - - - ani, ad baſin - - - - -	2	1
- - - - - - - - - - - - radiorum longiorum -	-	$7\frac{1}{2}$
- - - - - - - - caudae, ſc. a primis radiis, ſeu ab eius principio ad longiorum radiorum apices - - - - - - - - - -	-	11
Extremitas corporis ſquamoſa in caudae pinnam extenſa, ad - - - - - - -	-	1
Diameter oculi - - - - - - - - - -	-	$2\frac{1}{2}$
Diſtantia inter infimi pinnae pectoralis primique pinnae ventralis radii baſin - -	-	3
- - - - pinnae ventralis baſin et anum, ſeu pinnae ani initium - - - - - - -	-	3
- - - - vltimi pinnae dorſi radii baſin, et primum pinnae caudae radium - - -	-	$9\frac{2}{3}$
- - - - vltimi pinnae ani radii baſin, et primum pinnae caudae radium - - -	-	0
Latitudo horizontalis per oculorum axes -	-	5
- - - - - - - per poſticum operc. br. marginem - - - - - - - - - - - -	-	$5\frac{1}{2}$
- - - - - - - - - pinnae ani principium -	-	5
- - - - - - - - - - - - - - dorſi - - -	-	3
- - - - - - - - - - - - - - caudae - - -	-	$\frac{2}{3}$

	Poll.	Lin.
Latitudo perpendicularis per oculi medium -	–	7
– – – – – – – – – – – – dorſi initium -	–	$10\frac{2}{3}$
– – – – – – – – – – – principium pinnarum pectoralium - - - - - - - -	1	$1\frac{1}{3}$
– – – – – – – – – – – principium pinnarum ventralium - - - - - - - -	1	5
– – – – – – – – – – – principium pinnae dorſi - - - - - - - - - - -	1	5
– – – – – – – – – – – eiusdem pinn. finem	1	3
– – – – – – – – – – – principium pinnae caudae - - - - - - - - - - -	–	6

* * *

VIII.

Labrus valde oblongus, taeniis tribus candidis, diuerſae longitudinis, inſignitus; cauda integra.

DESCRIPTIO.

Tab. X. fig. 2. Piſcis in ſpiritu vini aſſeruatus ex albido liuidus, taeniisque tribus candidis vtrinque pictus eſt, quarum *ſuprema* e media fronte orta, oblique ad orbitae marginem anticum, indeque, ipſo interrupta oculo, ab orbitae margine poſtico ad ſuperiorem operculi branchiarum angulum vsque ducitur, *intermedia* ab angulo oris

oris initium capiens, orbitaeque marginem inferiorem tangens, rectaque via per branchiarum operculum, eique appenſam membranam, ducta perſiſtit, ſuique finem mentitur, aſt directe ſub hac, in ipſo corpore continuata, per lateris medium in caudae pinnam vsque excurrit, *infima* vero ſub maxilla inferiore orta, arcuato ſtatim ductu imum operculi marginem petit, abhinc, pariter vt intermedia, in ipſo corporis margine, margini operculi branchiarum contiguo, ſub angulo cum priore ſui tractu obtuſo, continuata, pone pinnae pectoralis baſin inflectitur, indeque leui ſub deſcenſu paralleloque cum intermedia ductu ad extremitatem corporis vsque ducitur. Sic quoque margo corporis inter mentum et angulum vtriusque operculi branchiarum inferiorem candicat, candoremque ſuum cum infimae vtriusque lateris taeniae principio miſcere videtur.

Corpus cathetoplateum, lanceolatum, macrolepidotum, margine ſuperiore paulo magis arcuato, magisque attenuato, quam inferiore; lateribus ſubconuexis.

Caput cathetoplateum, laeue. Os anguſtum; denticulorum in vtraque maxilla elliptica et aequali gracilium, oblique antrorſum porrectorum, denſeque conſtipatorum, vnica ſeries, labiis carnoſis, clauſo ore, obtecta. Lingua anguſta, carinata, glabra.

Narium foramina vtrinque duo, minima, in taeniae ſupremae tractu, qui ante oculum eſt, diſpoſita, ipſi oculo, quam ori, longe propiora.

Oculi ſubrotundi, in ſupremis fere capitis lateribus, oreque altius, ſiti.

Opercula branchiarum laeuia, alepidota, membranaque terminata, tam ad ſuperiorem, quam ad inferiorem ſinguli operculi angulum, in lobulum ſatis notabilem excreſcente. Membranae branchioſtegae, eiusque oſſiculorum, nulla veſtigia. Hiatus ad branchias perangustus, licet praelongus ſit, et ab operculi angulo ſuperiore, oculo altius poſito, ad abdominis marginem vsque, quem inferior occupat, extenſus.

Squamae ſatis amplae, magnitudine inter ſe invicem haud multum diuerſae, flexiles, perbreues, laeves, ad oras integerrimae.

Linea longitudinalis ab angulo operculi branchiarum vtriusque lateris ſuperiore, ductu leuiſſime conuexo, in aequali fere ab extremo dorſi margine et latere corporis medio diſtantia et parallelismo decurrit ad regionem vsque, decimi ſeptimi pinnae dorſi radii baſi ſuppoſitam, ibi, mox in linea recta oblique deorſum ac retrorſum ad lateris medium deflexa, intermediam ſubintrat taeniam, cum eademque dein rectilineo curſu in caudae pinnam vsque procedit. Formatur autem ipſa haec linea longitudinalis potiſſimum a viginti ſex ſeptemve punctis, quae ipſa nihil aliud ſunt, quam canaliculorum muciferorum, ſquamas ad lineam pertinentes perforantium, oſtiola.

Anus in medio fere corpore.

Pinnae in toto piſce ſeptem.

Pinna dorſi vnica, longa, e regione pinn. pect. radii primi baſi orta, radiis inſtructa viginti, ſimplicibus; anterioribus nouem aculeatis, ex ordine ſenſim longi-

longioribus ; reliquis inermibus, aculeatorum vltimos perparum longitudine primum ſuperantibus, dein vero finem pinnae verſus iisdem breuioribus ſenſim factis ; vltimo, vigeſimo ſc. ad baſin vsque bipartito.

Pinnae pectorales duae ; vtrinque vnica, ſtatim poſt operculum, ſubtriangularis, oblique ſurſum flexa, radiisque quindecim circiter inſtructa, quorum longitudo et craſſities, a ſuperioribus ad inferiores, ſenſim decreſcit ; horumque plurimi bipartiti.

Pinnae ventrales binae, contiguae, pectoralibus paulo poſteriores ſitu, abdominis margini impoſitae, in aequali fere ab operculorum angulo inferiore et ano diſtantia. Figurae eſt quaelibet lanceolatae, acutae, radiisque ſex ſuffulta, quorum interiores exterioribus, ſimplicibus, longiores et bipartiti.

Pinna ani, mox poſt anum et e regione pinn. dorſ. radii noni baſi orta, vltimique eiusdem pinnae terminata, radiis conſtat tredecim, ſimplicibus, eiusdem fere inter ſe et cum dorſalibus longitudinis ; primo, et ſecundo, aculeatis, breuioribus ; in ſequentibus iisdem parum longioribus, inermibus ; vltimo ad baſin vsque bifido.

Pinna caudae integra, aequalis, circa baſin ſquamis veſtita, radiorum duodecim ; extimo vtriusque lateris ſimplici, breuiore ; caeteris omnibus ramoſis, quorum intermedii proximis lateralibus perparum longiores.

Menſura.

	Poll.	Lin. Pariſ.
Longitudo tota, ſc. ab oris extremo ad pinnae caudae radiorum apices - - -	3	5
- - - - ab oris extremo ad extremitatem corporis ſquamoſam - - - - - - -	3	1
Ab oris extremo ad oculi medium - -	-	5
- - - - - - - - - angulum operc. br. ſuperiorem - - - - - - - - - -	-	10
- - - - - - - - - principium pinnae dorſi -	1	
- - - - - - - - - - - - - - pinnarum pectoralium - - - - - - - - -	-	11
- - - - - - - - - - - - - - - - ventralium	1	2
- - - - - - - - - - - - - - pinnae ani, ſeu ad anum - - - - - - - - -	1	9
- - - - - - - - - - - - - - - - - - caudae -	2	10
Longitudo pinnae dorſi, ad baſin - - -	1	6½
- - - - - - - - radiorum longiorum	-	3½
- - - - pinnarum pectoralium - - -	-	7
- - - - - - - ventralium - - -	-	4⅔
- - - - pinnae ani, ad baſin - - -	-	9½
- - - - - - - radiorum longiorum -	-	3
- - - - - - caudae, ſc. a primis radiis, ſeu ab eius principio ad longiorum radiorum apices - - - - - - - -	-	7
Extremitas corporis ſquamoſa in caudae pinnam extenſa ad - - - - - - -		2½
Diameter oculi - - - - - - - -	-	1⅔

Diſtan-

	Poll.	Lin.
Diſtantia inter primi pinn. dorſ. primique pinnae pect. radii baſin - - - - - -	-	5
- - - - - - vltimi pinn. dorſ. primique pinnae caudae radii baſin - - - - - -	-	4
- - - - - - - infimi pinn. pect. primique pinnae ventralis radii baſin - - - -	-	$5\frac{1}{3}$
- - - inter pinnarum ventralium baſin et anum, ſeu pinnae ani initium - - -	-	7 ad $7\frac{1}{2}$
- - - - - - - vltimi pinnae ani radii baſin et primum pinnae caudae radium - -	-	4
Latitudo horizontalis per oculorum axes -	-	$3\frac{1}{2}$
- - - - - - - - - - - - poſticum operc. br. marginem - - - - - - - - -	-	5
- - - - - - - - - - - - pinnae ani principium	-	$3\frac{1}{4}$
- - - - - - - - - - - - - - - - - - finem -	-	$1\frac{1}{2}$
- - - - - - - - - - - - - - - - caudae principium - - - - - - - - - -	-	$\frac{2}{3}$
- - - perpendicularis per oculi medium -	-	7
- - - - - - - - - - - - - - dorſi initium -	-	8
- - - - - - - - - - - - - - principium pinnarum pectoralium - - - - - - -	-	$10\frac{1}{3}$
- - - - - - - - - - - - ventralium	-	$10\frac{2}{3}$
- - - - - - - - - - - - pinnae ani	-	$9\frac{2}{3}$
- - - - - - - - - - - pinnae ani finem	-	5
- - - - - - - - - - principium pinnae caudae - - - - - - - - - -	-	4

* * *

IX.

Scomber dorſi anique pinna continua; aculeis ad vtriusque initium acceſſoriis.

An? *Gaſteroſteus* ſpinis dorſalibus quatuor. *Linn.* *Syſt.* Nat. edit. dec. p. 295. n°. 2. (Ductor.).
Haſſelqu. iter. 366.
Act. *Stockb.* 1755. p. 71.

DESCRIPTIO.

Tab. X. fig. 3. et 4. Colore hic piſcis, in ſpiritu vini aſſeruatus, adhuc gaudet argenteo, ſplendente in ſemilunari iſta, quae infra et poſt vtrumque oculum ſita eſt, regione muſculari, in vtriusque operculi branchiarum maxima, eaque poſtica dimidiaque, et omni totius corporis, quae infra lineam longitudinalem cadit, parte; ſordide albicante in prono et ſupino capite, ore, maxillis, palpebra, anteriore operculi lamina, pinnisque omnibus; dilute ſpadiceo denique in omni, quae ſupra lineam corporis longitudinalem venit obuiam, regione.

Corpus teretiusculum, rectum, toroſum, microlepidotum et modice cathetoplateum eſt, excepta ipſius extremitate, quae vltimos dorſi, vel ani, et caudae, pinnarum radios interiacet, plagioplatea, et, ſi latus reſpicias, valde contracta, ac in medio vtrinque in aciem carnoſo - membranaceam attenuata. Porro, quod ad conformationem corporis attinet, idem a maxillae ſuperio-

ſuperioris extremitate ſenſim ac leuiter aſcendit ad quartum dorſi aculeum, ſeu primum pinnae dorſalis radium vsque, et ab hoc caudam verſus ſimiliter deſcendit; a maxillae inferioris extremitate vero leui ſub deſcenſu pinnas petit ventrales, ab his rectius progreditur vsque ad anum, et ab hoc caudam verſus ſenſim ac leuiter aſcendit. Margo dorſi ab occipite primum aculeum verſus contractus ac prominulus eſt. Latera corporis ſatis conuexa.

Caput vtrinque compreſſum, ſuperne planiusculum, carina longitudinali, per medium verticem ducta, ſuperficiali notatum, alepidotum, glabrum, occipitis tantum vtriusque lateris angulo et ſpatio iſto ſemilunari, muſculoſo, oculum inter et operculum branchiarum ſito, exceptis, ſquamulis minutiſſimis inſtructis.

Os obtuſiusculum, apertura oblique deorſum ſpectante. Maxillae, ore clauſo, ſatis aequales, aperto autem inferior ſuperiore paulo longior; eaedemque denticellis acutis, minutiſſimis interius exaſperatae.

Narium foramina, oris extremo, quam oculis, paulo propiora, vtrinque duo, ſibi inuicem valde propinqua, elliptica et verticaliter poſita; horum poſterius ſitu paulo altius, quam anterius, eſt.

Oculi magni, in laterum ſuprema parte poſiti, oris extremo, quam angulo operculorum poſtico, propiores, cute, quam orbitae margo omnis ſuper albugineam emittit, ceu palpebra, in ipſorum ambitu inae-

 qualiter

qualiter obtecti, ita, vt luminis, quo palpebra ad oculum patet, diameter perpendicularis horizontalem nonnihil ſuperet.

Opercula branchiarum falcata, ſubtus et in lateribus vtrinque longo hiatu aperta, inermia, alepidota, circa marginem membrana terminata. Margo laminae anterioris, caeteris incluſae, membranaceus et crenulis minutiſſimis inciſus.

Membrana branchioſtega, ſub operculis tota latens, oſſiculis videtur ſex ſuffulta.

Supra pinnarum pectoralium baſin ſcapula oſſea triangularis, poſtico ac ſuperiori operculorum margini contigua, prominet.

Squamulae innumerae, minutiſſimae, cuti arcte inhaerentes, fere vt in Gadis.

Linea longitudinalis, continua, prominula, ab angulo operculorum poſtico ad $4\frac{1}{2}$. lin. recta et oblique ſurſum ducta, hinc ſub angulo valde obtuſo deflexa, leuique et modice arcuato ſub deſcenſu in aciei ſupra memoratae initium incurrit, in eodemque ſuum agnoſcit finem.

Anus in corporis medio, ſc. ab oris extremo aeque ac longiorum pinnae caudae radiorum apicibus, et breui interuallo ab ani pinna, diſtans.

Pinnae

Pinnae in toto corpore ſeptem ; ſc. duae pectorales, totidem ventrales, vnica dorſi ani et caudae.

Pinnae pectorales, poſt branchiarum aperturas, ventri, quam dorſo, propiores, oblongae, radiis ſeptendecim circiter conſtructae, leuiter arcuatis et ſubramoſis. Hi, a primo, aut ſecundo potius, ſuperiore, ad infimum vsque, ſenſim gracileſcunt, et, ratione longitudinis, a primo ad quintum vsque, ſenſim increſcunt, ab hoc vero ad infimum notabiliter decreſcunt. Communis omnium horum radiorum baſis, non minus vt ipſi, arcuata.

Pinnae ventrales contiguae, directe ſub inferiorum pinn. pect. radiorum baſi, in imo ventre ſitae, radiisque quinque compoſitae ſatis robuſtis, quorum primus ac ſecundus, ſitu exteriores, ſimplices ac reliquis longiores, tertius, quartus et quintus vero, interiores ſitu, ramoſi, illisque ex ordine breuiores. Intimus pinnarum vterque membrana mediante eidem baſi affixus.

Pinna dorſi, praecedentibus vtriusque generis pinnis ſitu poſterior, longa, plurimam dorſi marginis partem occupans, radiis viginti nouem ſuffulta, et praeterea quatuor, breuibus, aculeis diſtinctis, ad ipſius initium, aucta. Horum anticus et poſticus, minimi, intermedii duo paulo craſſiores ac longiores, omnes autem mobiles, et poſtica ipſorum facie membranula triangulari inſtructi. Illi, ſc. ipſius pinnae radii omnes in vnam pinnam, ſolito more, concreti ac molles; an-

teriores craſſiores ac longiores, inſequentes tenuiores ac breuiores ſenſim facti, ſimplices, poſteriorum quidam intermedios longitudine parum ſuperantes ac ſubramoſi.

Pinna ani, dorſali breuior longe, radiorum nouendecim, quorum anteriores maiores reliquis, (ſimilibus tamen in dorſali pinna minores) intermedii minores poſteriores mediae magnitudinis, de reliquo autem eiusdem cum dorſalibus conformationis. Accedunt ad initium huius pinnae pariter aculei duo diſtincti, perbreues, dorſalibus iſtis minores; anterior ob paruitatem ſuam vix conſpiciendus, poſterior paulo maior. Caeterum pinnae huius finis paulo longius a pinnae caudae initio diſtat, quam finis pinnae dorſi.

Pinna caudae profunde bifurca, caudae plagioplateae verticaliter inſiſtit, eamque ex parte excipit, radiis circiter triginta quatuor compoſita, quorum exteriores vtriusque lateris omnium breuiſſimi, ex ordine tamen longiores, ſimplices, ſuperantur a proximis ſequentibus, omnium longiſſimis, ſubramoſis, hisque cedunt intermedii, ex ordine, ad medium pinnae vsque, ſenſim breuiores facti, valde ramoſi.

Menſura.

Menſura.

	Poll Pariſ.	Lin.
Longitudo tota, ſc. ab oris extremo ad longiorum pinnae caudae radiorum apices -	5	6
— — — ab oris extremo ad extremitatem corporis ſquamoſam - - - - - - - - -	5	
Ab oris extremo ad oculi medium - -	-	6½
— — — — — — angulum operc. br. poſticum	-	9
— — — — — — principium pinn. pectoralium	1	5
— — — — — — — — — — — — ventralium	1	7
— — — — — — primum dorſi aculeum -	1	11
— — — — — — principium pinnae dorſi -	2	2½
— — — — — — anum - - - - - -	2	9
— — — — — — aciei caudae initium -	3	11
— — — — — — primum ani aculeum, ſeu ad pinnae ani principium - - - - -	2	11
— — — — — — principium pinnae caudae	4	5
— — — — — — aciei caudae finem -	4	9
Longitudo pinnarum pectoralium - - -	-	8
— — — — — — — — ventralium - - -	-	9
— — — maiorum dorſi aculeorum - -	-	1
— — — pinnae dorſi, ad baſin - - -	1	11
— — — — — — — — radiorum longiorum -	-	6½
— — — — — ani, ad baſin - - - -	1	1½
— — — — — — — radiorum longiorum -	-	4½
— — — — — caudae, ſc. a primis radiis, ſeu ab eius principio ad longiorum radiorum apices	1	2
Extremitas corporis ſquamoſi in caudae pinnam extenſa ad - - - - - - - - - -	-	6½

 Diame-

	Poll.	Lin.
Diameter oculi perpendicularis - - - -	-	$3\frac{2}{3}$
Diſtantia inter infimi pinn. pect. primique pinn. vent. radii baſin - - - - - - -		$3\frac{1}{2}$
— — — — quinti pinn. ventr. radii baſin et anum - - - - - - - - - - -	1	$1\frac{1}{2}$
— — — —anum et primum aculeum - -	–	$1\frac{2}{3}$
— — — — vltimi pinn. dorſ. et primi pinn. caudae radii baſin - - - - - -	–	$3\frac{1}{3}$
— — — — vltimi pinn. ani primique pinn. caudae radii baſin - - - - - - -	–	4
— — — — longiorum vtriusque lateris pinn. caudae radiorum apices - - - - - -	1	-
Latitudo horizontalis per oculorum axes -	–	$7\frac{1}{3}$
— — — — — — — — poſticum operc. br. marginem - - - - - - - - - -	–	9
— — — — — — — — primum dorſi aculeum	–	$7\frac{2}{3}$
— — — — — — — — principium pinn. dorſi	–	$7\frac{1}{2}$
— — — — — — — — — — — — aciei caud.	–	5
— — — — — — — — pinnae dorſi finem -	–	$5\frac{1}{3}$
— — — — — — — — — — — caud. initium	–	$3\frac{2}{3}$
— — — — — — — — aciei caudae finem -	–	$1\frac{1}{4}$
Latitudo perpendicularis per oculi medium -	–	$8\frac{1}{4}$
— — — — —poſticum operc. br. marginem - - - - - - - - - - -	–	11
— — — — — principium pinnae dorſi - - - - - - - - - - - - -	1	
— — — — — anum - -	–	11
— — — — — aciei caud. princip.	–	$4\frac{1}{2}$
— — — — — pinnae ani finem	–	$3\frac{1}{3}$
— — — — — pinn. caud. princip.	–	2

ASTRO-

ASTRONOMICA.

OBSER-

OBSERVATIONES
ALIQVOT ASTRONOMICAE ET METEOROLOGICAE LIPSIAE HABITAE

a

G. HEINSIO.

Eclipſis Lunae totalis d. 24. Ianuar. anno 1758. temp. ciuil. ſtyl. nou.

Eclipſis haec inſtabat horis matutinis in vicinia horizontis occidui, et calculus momenta tantum ingreſſus Lunae in vmbram terreſtrem viſibilia hic loci promittebat. Nix copioſa, quae die praecedente cecidit, nullam obſeruationis futurae ſpem praebebat, quae tamen veſperi, cum nubes inciperent hiatus agere, nonnihil excitabatur. Et re vera, inſtante Eclipſis initio, coeli facies, nubes plerumque tenues et hiatus ſerenos oſtendens, ſucceſſum nonnullarum ſaltem obſeruationum ſpondebat. Inuigilaui illis ope Tubi Aſtronomici, 6 ped. Pariſ. longi, qui obiecta admodum diſtincte repraeſentat, eaque ſecundum diametrum 24. vicibus auget. Tempus ad horologium oſcillatorium, hoc et ſequentibus diebus per altitudines Solis reſpondentes correctum, numeratum eſt. En obſeruationum circumſtantias:

 Anno

An. 1758. *ſtyl nou.*
d 23. *Ian. temp.*
vero Aſtronomico.

17^h. 1'. 0''.	Penumbra iam ad limbum Lunae orientalem in regione inter Cardanum et Seleucum diſtingui potuit, licet Luna per nubes pallida appareret.
— 10. 0.	Penumbra denſa cernebatur in dicta lunaris diſci regione. Luna nonnihil lucidior erat.
— 12. 20.	Initium Eclipſis fieri credidi in media inter Cardanum et Seleucum regione. Forſan initium nonnihil citius contigit: vmbra enim vera cum penvmbra admodum confundebatur. Non multum tamen aberrari puto, ſi momentum notatum pro momento initii habeatur. Luna ſatis lucida per nubes apparuit.
— 12. 45.	Certus eram, initium Eclipſis iam ante contigiſſe, licet terminus fere nullus inter vmbram et penumbram diſtingui poſſet.
— 14. 15.	Credidi appulſum vmbrae ad Grimaldum, termino inter vmbram et penumbram valde incerto.
— 14. 45.	Certus eram de appulſu vmbrae ad Grimaldum; vel potius peripheria vmbrae Grimaldum iam nonnihil intraverat.

verat. Statuere licebit appulſum vmbrae ad Grimaldum $17^h\ 14'\ 30''$.

Nunc vmbra melius terminari incipiebat.

— 15.′23″. Grimaldus videbatur totus in vmbra; ſed incertus adhuc eram.

— 15. 53. Grimaldus certe totus ab vmbra tectus; quod momentum pro totali immerſione Grimaldi retinere licet.

Luna per nubes tenues halone cincta apparuit.

— 20. 54. Vmbra tangit Ariſtarchum.

— 21. 33. Ariſtarchus totus in vmbra.

Paulo poſt coelum faciem nanciſcebatur ſerenam.

— 31. 8. Vmbra tangit Copernicum.

— 32. 7. - - - per medium Copernici.

— 33. 6. - - - totum Copernicum inuoluit.

Has circa Copernicum obſeruationes omnium certiſſimas habeo. Luna erat admodum clara, et terminus inter vmbram et penumbram bene diſtinctus.

— 37. 0. Nubes denuo coelum peruagabantur, et elapſo minuto omnis conſpectus Lunae erat impeditus.

— 47. 0. Luna quidem per nubes denuo translucere incipiebat, aſt maculas lunares ſufficienter diſtinguere non licuit, vt appulſus vmbrae ad iſtas aliqua certitudine notari potuiſſent. Sic quoque

 18^h.

18^{h}. 7$'$. 0$''$. coniectura tantum appulſum vmbrae ad Mare Criſium, quo ſcilicet iſta hoc tangere incepit, animaduertere licuit. Tandem et denſiores nubes et aedificia interpoſita obſeruationum continuationem impediebant.

Cum die 26. Ianuar. poſt meridiem obſeruationes altitudinum Solis pro correctione horologii proſequerer, inſignis effectus refractionis per nubes ſeſe obtulit. Scilicet inueneram ope Quadrantis, cuius mentio facta eſt T. I. Comment. nou. p. 464.

tempore horologii oſcillatorii		altitudinem limbi ſuperioris Solis (pro apparentia Tubi, inferioris) absque vlla correctione	
2^{h}. 49$'$. 59$''$.	6$'$. 4$''$.	12°. 20$'$.	35$'$.
— 56. 3.		11. 45.	

et tempore intermedio Quadrantem quoque diſpoſueram ad altitudinem 12°. 0$'$. vt momentum appulſus limbi Solis (apparenter in Tubo, inferioris) ad filum horizontale annotarem. Accedebat limbus inferior ad filum horizontale aſcendendo ſecundum apparentiam in Tubo; pauca autem ſecunda temporis ante, quam contactus limbi cum filo horizontali futurus eſſet, nubes denſa diſcum Solis intrabat, ita quidem, vt pars eius apparenter ſuperior tota e conſpectu eriperetur, inferior autem in vicinia fili ſufficienter adhuc cerni poſſet. Portio tunc admodum exigua limbi inferioris infra filum horizontale adhuc perſiſtebat, prona ad contactum

cum

cum filo; aſt intra 20. ſecunda temporis nulla ſenſibilis eius portionis imminutio, nullus ſenſibilis acceſſus limbi inferioris ad filum, obſeruari potuit, donec tandem contactus limbi cum filo poſt pauca ſecunda conſequeretur, quem $2^h.53'.44''$. horologii celebratum fuiſſe aeſtimaui, intra 3. vel 4. ſecunda temporis certus, quia nubes nunc limbum quoque inferiorem (apparenter) occuparet. Hoc phaenomenum permanentiae diſci ſolaris in eodem loco inſigne refractionis augmentum per nubem vtique indicat, et retardatio appulſus limbi ad filum horizontale ſub altitudine $12^\circ.0'$. quam ſuperiores obſeruationes docent, idem comprobat. Scilicet ſi variatio altitudinis 35. minut. vniformis ſtatuatur per interuallum temporis $6'\ 4''$; limbus Solis altitudinem $12^\circ.0'$. attingere debuiſſet $2^h.53'.27''$., quam tamen re vera demum $2^h.53'.44''$., ideoque $17''$. ſerius, conſecutus eſt. Animaduertere conuenit, altitudini $12^\circ.0'$. ex diuiſione Quadrantis ob aberrationem lineae fiduciae reſpondere altitudinem re vera $= 11^\circ.40\frac{3}{4}'$.; thermometrum autem mercuriale intra concläue, in quo obſeruatio peracta eſt, appenſum ad horologium, proxime indicaſſe 160. grad. ex diuiſione *de l'Isle.*

Coronidis loco mentionem iniiciam obſeruationis *Eclipſis Lunae partialis* d. 17. April. ſt. nou. 1753. Lipſiae peractae, quamuis non, niſi vnicum momentum, *Finem* nempe *Eclipſis*, hor. 8. $35\frac{1}{4}$. min. temp. veri aſtron. annotare licuerit. Circumſtantiae quoque omnem rigorem non ſpondent; a veritate tamen momentum notatum non multum aberrare credo. Scilicet Eclipſis haec accidit in vicinia horizontis ortiui, quor-

ſum proſpectus ex meo domicilio non patebat. Idoneum itaque locum petens horologiis tantum portatilibus, tribus quidem, in dimenſione temporis, vti licuit, quorum vnum minuta ſecunda monſtrabat. Iſtorum comparatio facta eſt tum mutua, tum ad horologium oſcillatorium in domicilio meo poſitum, cuius ſtatus, ex obſeruatis Solis altitudinibus innotuit. Probe iſta inter ſe conueniebant in determinatione momenti finis Eclipſis, quem ſolummodo per Tubum Gregorianum ſub apparatu, quo obiecta ſecundum diametrum 52. vicibus ille amplificat, obſeruare potui; pauca enim minuta prima temporis ante finem Eclipſis nubes demum, tenues adſpectum Lunae ſufficientem concedebant. Vmbra terreſtris valde diluta, et confinium vmbrae et penumbrae non ſatis diſtinctum apparuit. Momento $8^h.35\frac{3}{4}'$. ſupra notato finem iudicaui, de certitudine ſub eiusmodi circumſtantiis ſufficiente perſuaſus; et $8^h.37\frac{1}{4}'$. de fine certe iam peracto conuictus eram.

* * *

D. 21. *Iunii ſt. nou. an.* 1757, quinto poſt nouilunium die, veſperi circa occaſum Solis inſtabat *occultatio* ſtellae primae magnitudinis, *Cordis* nempe *Leonis* a *Luna*. Attentus ad iſtam ope Tubi aſtron. 6. ped. ſupra in obſ. Eclipſ. ☽. d 24. Ianuar 1758. deſcripti, quo integer Lunae diſcus oculo ſubiiceretur, immerſionem ſtellae ad marginem Lunae obſcurum obſeruare non licuit, absque dubio nimia luce ante Solis occaſum obſtante; aſt circiter $\frac{2}{3}$. horae poſt Solis

Solis occaſum *emerſionem* ſtellae ad limbum Lunae lucidum probe annotare potui $8^h. 57'. 55''$. *temp. vero aſtron.* quo momento ſtella, figuram diſculi referens, limbo Lunae lucido ita adhaerebat, vt ſecundum apparentiam in Tubo (inuerſam nempe) margo ſtellae occidentalis limbnm Lunae orientalem tangeret. Tempus horologii oſcillatorii per altitudines Solis, ex parte reſpondentes, rite correctum eſt.

D. 10. *Iulii ſt. nou an.* 1757. per Tubum Gregorianum ſub apparatu, quo iſte obiecta 52. vicibus ſecundum diametrum auget, obſeruaui *emerſionem Satellitis ſecundi* ex vmbra *Iouis*, ad diſtantiam a proximo Iouis limbo orientem verſus (ſitu erecto) $= \frac{3}{4}$. diam. Iouis proxime, coelo bene fauente. Contigit autem tempore vero aſtron.

Emerſio 2^{di} *prima*	$9^h. 28'. 45''$.
Emerſio totalis ſeu Satelles lumine pleno fulgebat	— 31. 20.

Altitudines Solis correctionem horologii oſcillatorii ſubminiſtrarunt.

De apparitione Veneris interdiu egi in Tom. III. Nou. Commentar. pag. 437. ſequ. ibique pag. 441. reditum huius phaenomeni circa finem Septembris vel menſe Octobri an. 1756. futurum praedixi. Euentus praedictionem optime confirmauit. Diebus ſerenis, ſpeciatim d. 29. Septembris, d. 3. et 10. Octobr. an. 1756, Venerem per integram horam poſt Solis ortum oculo nudo cernere licuit, et ii, qui oculorum acie pollebant, Venerem per duas tresue horas poſt Solis

lis ortum, diebus aliis per menſem Octobr. ſerenis, proſecuti ſunt.

Obſeruationes meteorologicae.

Caloris aeſtiui maxime extraordinarii, quem nonnunquam hic loci experimur, aliquoties mentionem inieci in Tomis Commentar. praec. Exempla ſequentia addere licebit. Thermometrum mercuriale ex diviſione *de l'Isle* Tom. I. Nou. Commentar. pag. 469. deſcriptum, quod I. vocabo, in loco vmbroſo boream verſus libero aeri expoſitum, rem patefecit.

An. 1755. *ſtyl. nou.*

	Poſt meridiem		Therm. I	
D. 13. Iulii	$1^h. 34'.$	-	101. grad.	
	3. 5.	-	$99\frac{2}{3}$.	Coelo ſereno, ſpirante vento leni ex auſtro.
	— 24.	-	$99\frac{1}{6}$.	
	— 42.	-	$99\frac{1}{3}$.	
	4. 0.	-	100.	

An. 1757. *ſtyl. nou.*

			Therm Z	
D. 14. Iulii	$3^h. 0'.$	- - - -	$101\frac{1}{3}$	coelum ſerenum
	5. 15.	- - -	102.	ventus ex auſtro
d. 15. Iulii	3. 0.	- - -	102.	ventus ex occidente, nocte inſequenti tonitrua.
d. 19. Iulii	3. 0.	- - -	103.	ventus SSO. coelum ſerenum
d. 21. Iulii	2. 45.	- - -	$99\frac{3}{4}$.	ventus SW. coelum ſerenum.

Iam ante d. 14. Iulii per plures dies coelo ſereno ingentem experti eramus calorem, isque, licet per vi-

ces

ces plueret, continuauit vsque ad d. 28. Iulii, quo hor. 3 p. m. thermometrum adhuc indicabat 106. grad. Tam diuturni aeſtus, quem nulla fere tonitrua hic loci comitabantur, recordatio non extat. Fertilitas erat ſingularis, et meſſis admodum larga. In his obſeruationibus thermometrum mercuriale a Cel. D *Zeihero* conſtructum ſecundum diuiſionem *de l'Isle* ſub circumſtantiis ſupra notatis adhibui, quod per Z ſignabo.

Anno 1758. *ſtyl. nou. d.* 10. *Iunii.*

Per quatuor abhinc hebdomades tempeſtate plerumque ſerena et ſicca fruiti ſumus, ſpirante vento, maiori ex parte, vel boreali, vel orientali, nec niſi d. 28. Maii pluuia nonnihil copioſa decidit. Cum vero ante aliquot dies ventus ex occidente ſpirare inciperet, calor atmoſphaerae inſignia cepit incrementa, qui hodie pomeridianis horis, coelo ſereno, maxime extraordinarius et ſenſui vix tolerabilis deprehenſus eſt. Thermometris I. et Z. in loco vmbroſo ſupra notato repoſitis ſequentia annotaui.

	Therm. Z		Therm. I
$2^h.58'$.	$98\frac{2}{3}$	- - - -	——
3. 2.	$99\frac{1}{2}$	nubes exiguae per tem-	——
– 8.	99	pus exiguum interdum	$100\frac{1}{2}$
– 14.	99	occultabant Solem	$100\frac{1}{2}$
– 23.	$98\frac{3}{4}$	- - - -	$100\frac{1}{8}$
– 30.	$98\frac{1}{3}$	- - - -	$99\frac{2}{3}$
– 45.	98.	- - - -	$99\frac{1}{6}$
4. 2.	$98\frac{2}{3}$	- - - -	$99\frac{1}{6}$.

Thermometrum Z ob bulbum minorem variationes caloris facilius recipit, quam Thermom. I.

Hor. $4\frac{1}{2}$. nubes fulgure praegnantes ſurgebant, et paulo poſt tonitrua, attamen e longinquo tantum, audiebantur. Die 11. Iunii p. m. coelo ſereno Therm. Z oſtendebat 102. grad. hor. $3\frac{1}{4}$; et d. 12. Iunii veſperi poſt hor. 7. copioſa et vicina fulgura et tonitrua ſequebantur.

Frigoris hic loci *extraordinarii* ſequentia innotuerunt exempla, teſte thermometro in loco vmbroſo boream verſus libero aeri expoſito.

Anno 1755. *ſtyl. nou.*

Temp. ciuil.	ante merid.	Therm. I.	ventus ſignaturae vulgaris et tempeſtas.
d. 9. Februar.	$9^h. 0'$	$179\frac{2}{3}$. grad.	SO. ſerenum.

Anno 1757. *ſtyl. nou.*

Ineunte, frigida quoque tempeſtas ingrediebatur.

d. 5 Ianuar.	$8^h. 9'$.	$169\frac{1}{2}$	——— ——— ———
7. - - -	8. 30.	180	N. ſerenum
8. - - -	8. 30.	$176\frac{2}{3}$	N. ſerenum
9. - - -	8. 30.	$172\frac{1}{2}$	NO. ſerenum
10. - - -	8. 30.	$171\frac{1}{4}$	ONO plerumque ſer.
11. - - -	8. 30.	$167\frac{1}{2}$	S. ſerenum.

Anno 1758. *ſtyl. nou.*

D 21. Ianuar.	8. 30.	178.	N. ſerenum
22. - - -	9. 0.	$175\frac{1}{3}$.	— — — —

Barometricas obſeruationes per aliquot annos in dies inſtitui, ex quibus eas tantum adducam, quae ſingulis annis maximam minimamue Mercurii altitudinem prodiderunt. Elegans ad hoc negotium adhibui baro-

barometrum phoſporeſcens, a doctiſſimo artifice conſtructum, recuruum in parte inferiori cum bulbo annexo, in quo ſuperficies Mercurii ſtagnat, et conſtantem *terminum a quo* computandi altitudines barometricas ſubminiſtrat, qui tunc conſtitutus fuit, dum ad mediam altitudinem Mercurius in barometro haereret. Diameter luminis bulbi in regione ſuperficiei Mercurii ſtagnantis eſt 10, et tubi barometrici in regione ſcalae variationis $2\frac{1}{2}$. lin. Pariſ. duodecim; vnde ſectionum areae ſunt in ratione 16:1. Scala variationis addita eſt orichalcea cum indice mobili, diuiſionem *Nonii* referente, cuius ope obſeruationes altitudinum Mercurii commode peragi poſſunt, ipſas tamen altitudines, ad diuiſionem ſcalae iſtius quidem conſignatas, in menſura Pariſienſi duodecimali expreſſi, pede 12. digitos, digito 12. lineas, linea autem 24 ſcrupulos capientibus; quem in finem ope menſurae Pariſienſis exactam dimenſionem a termino a quo ſupra notato vsque ad diviſiones ſcalae perfeci. Barometrum hoc ſuſpenſum eſt intra conclaue pro anni tempeſtate calefactum, ne variationes caloris et frigoris, quas aer externus alias ſubit, altitudines barometricas ſenſibiliter turbent; adiectum tamen eſt thermometrum ex diuiſione *de l'Isle*, vt variationes aeris interni etiam innoteſcerent. Locus ipſe, quem bulbus barometri occupat, eleuatus eſt $42\frac{1}{2}$ ped. menſurae Pariſienſis ſuper pauimentum plateae *Heinenſis* in vicinia antliae publicae prope aedificia exſtructae, quorum proſpectus eſt in orientalem coeli plagam. Sub his circumſtantiis ſequens Tabula ſummam obſeruationum exponit.

Temporis annus	*ciuilis menſis*	*ſtyl. nou.* *dies*	*hora.*	*Barometri altitudo in menſura Pariſ.* *dig.*	*lin.*	*ſcrup.*	*Thermometrum.*	*Ventus ſignaturae vulgaris*	*Tempeſtatis conditiones.*
1750.	Nouembr	9.	— — —	26.	11.	13.	$126\frac{1}{2}$	S.	nubes interruptae.
	Decembr	26.	— — —	28.	4.	2.	$126\frac{1}{2}$	ONO.	ſerenum
1751.	Mart.	15.	$1\frac{1}{2}^{h}$. p. m.	26.	10.	2.	$118\frac{1}{2}$	SSO.	pluuioſum
	Nouembr	21.	— — —	28.	3.	19.	121.	W.	nubilum
1752.	Mart.	10.	— — —	28.	5.	21.	124.	NNW.	ſerenum
	— — —	11.	— — —	28.	6.	16.	$125\frac{1}{2}$	NO	ſerenum
	— — —	26.	$10\frac{1}{2}^{h}$. veſp.	26.	8.	19.	124.	WSW.	nubilum
	— — —	27	7. a m.	26.	8.	19.	130.	WSW.	nubilum
	Decembr	25.	9. a m.	26.	10.	21.	125.	NW.	nubes ſparſ.
1753.	Ianuar.	25.	— — —	28.	5.	1.	129.	W.	nubilum
	Mart.	8	8. a. m.	28.	4.	17.	$125\frac{1}{2}$	NNO	nubes ſparſ.
	April.	5.	7. a. m.	26.	11.	1.	126.	NO.	nubilum
	Decembr.	27.	— — —	26.	11.	16.	126.	N.	nubilum
1754.	Ianuar.	20.	— — —	28.	4.	6.	126.	N.	nubilum
	Februar.	18.	— — —	28.	4.	6.	$123\frac{1}{2}$	W.	nubilum
	Nouembr	26.	8. a. m.	27.	1.	23.	$124\frac{1}{2}$	WSW	nubes
1755.	Ianuar.	6.	— — —	28.	4.	10.	133.	WNW	ſerenum
	Februar.	11.	$10\frac{1}{2}$. veſp.	26.	10.	17	131.	S.	nubilum
1756.	Ianuar.	30	— — —	28.	6.	16.	$123\frac{1}{2}$	SW.	ſerenum
	Februar.	19	7. a. m.	26.	10.	17.	128.	W.	procella
	Mart.	23.	$5\frac{1}{2}$ p. m.	26.	9.	11.	124.	SSO.	pluuia et procella
1757.	Ianuar.	25.	10. veſp.	26.	9.	11	——	S.	pluuia et procella
1758.	Ianuar.	29	$10\frac{1}{2}$. a. m.	28.	5.	9	——	——	——
	Februar.	17.	$8\frac{1}{2}$. a. m.	26.	9.	19.	——	SW.	pluuia

Vbi hora nulla notatur, meridies intelligi debet.

Sic

Sic erit altitudo omnium maxima	-	$28^{dig.}$	$6^{lin.}$	$16^{ſcrup.}$
— — — — — — — — minima	-	26.	8.	19.
variatio	-	1.	9.	21.
altitudo media	-	27.	7.	$17\frac{1}{2}$.

Notandum autem eſt, omnes hactenus recenſitas altitudines numeratas eſſe a termino ad bulbum conſtanti ſupra memorato. Quodſi ergo ex ratione arearum in ſectionibus bulbi et tubi (16:1.) ad variationem iſtius termini relationis attendere, et inde altitudines corrigere velis, inuenies variationem termini a maxima ad minimam altitudinem proxime = 33. ſcrup., variationem barometricam = $1^{dig.}\ 11^{lin.}\ 6^{ſcrup.}$ altitudinem maximam = $28^{dig.}\ 7^{lin.}\ 8\frac{1}{2}^{ſcrup.}$, minimam = $26^{d.}\ 8^{l.}\ 2\frac{1}{4}^{ſcr.}$ manente media = $27^{d.}\ 7^{l.}\ 17\frac{1}{8}^{ſcr.}$ Alias concluſiones tranſeo.

OBSERVATIO
ECLIPSEOS SOLARIS
QVAE CONTIGIT Anno 1758. d. $\frac{19}{30}$. Dec. HABITA PETROPOLI

ab

A. N. GRISCHOW.

Altitudines Solis correſpondentes ad Horologium aſtronomicum examinandum captae per Quadrantem bipedalis radii d. $\frac{17}{28}$. Dec.

$\frac{17}{28}$. Dec. Ante merid. T. Hor. Aſtr.	Altit. marg. ☉ bor.	$\frac{17}{28}$. Dec. Poſt meridiem T. Horol. Aſtr	Alt. marg. ☉ bor.	Merid. ex obſeruatis altitudinib. deductus T. Horol. Aſtr.
$9^h.54'.10''$	$3^\circ.44'$ -	$1^h.55'.34''$ -	$3^\circ.44'$ -	$11^h.54'.52''$,0
55. $50\frac{1}{3}$ -	3. 49 -	53. 31 -	3. 50 -	- - - - 50, 9
57. 52 -	3. $55\frac{2}{3}$ -	51. 56 -	3. $55\frac{1}{3}$ -	- - - - 50, 5
59. 37 -	4. $0\frac{3}{4}$ -	49 $56\frac{1}{2}$ -	4. 1 -	- - - - 49, 4
10. 1. $47\frac{1}{2}$ -	4. $6\frac{1}{2}$ -	47. 27 -	4. 8 -	- - - - 53, 5
3. 50 -	4. $11\frac{2}{3}$ -	45. $15\frac{1}{2}$ -	4. 13	- - - 50, 2

Per medium igitur | $11^h.54'.51''$, 1
Aequat. merid. ſubtr. - - - - - 4, 7

Meridies verus d. $\frac{17}{28}$. Dec. - $11^h.54'.46''\frac{1}{2}$

d. $\frac{17}{28}$. Dec. veſp. $11^h.7'.35''$ Horol. Aſtr. appulſus Sirii ad fil. vert. tubi biped.

d. $\frac{19}{29}$. Dec. veſp. 11. 7. $18\frac{1}{2}$ - - - - - appulſus Sirii ad idem fil. vert.

Erit

Erit igitur reuolutio fixarum $23^h.59'.43''\frac{1}{2}$ Horol. aſtr.

d. $\frac{19}{30}$. Dec. T. Horol. aſtr.	T. verum	
mane $9^h.4'.32''$	$9^h.1'.58''$	Ortus appar. marg. ⊙ ſuper.
11. 20	8. 45	Ortus appar marg. ⊙ inferioris
39. 25	36. 45	Finis Eclipſeos per Teleſcop. Gregor. 2. pedum.
39. 40	37. 0	

Fumus focorum atque vapores ob ventum ex auſtrali plaga vehementiſſimum vndantes impediuerunt, quo minus Eclipſeos huius obſeruatio accuratius inſtitueretur. In Sole variae obſeruabantur macularum numero atque magnitudine inſignium, ſeries.

INSTRV-

INSTRVMENTORVM ASTRONOMICORVM, RETICVLO, AVT MICROMETRO, INSTRVCTORVM, NOVA EMENDATIO.

Auctore

F. V. T. AEPINO.

Obſeruationum aſtronomicarum exactitudo, quantum pendeat a commodo corporis obſeruatoris ſitu, difficulter imaginari poterunt inexperti, omnes autem ii conqueruntur, qui inſtituendis obſeruationibus ipſi ſe vnquam applicuerunt. In imaginanda itaque inſtrumentorum aſtronomicorum conſtructione, vtramque facere paginam cenſendum eſt, vt commoditati obſeruatoris, quantum fieri poteſt, proſpiciatur, neque aſſumere vnquam, aut ſeruare diu, moleſtum corporis ſitum, ipſe cogatur.

Laborant eiusmodi imperfectione, reticulo, aut micrometro, inſtructa inſtrumenta aſtronomica fere omnia, quales ſunt Quadrantes, aut fixi aut portatiles, Sectores aſtronomici, immo et ſimplices tubi, micrometro praediti. Etſi enim horum inſtrumentorum ope, obſeruationes absque magno incommodo peragantur, quamdiu altitudo obiecti, ad quod diriguntur, ſupra horizontem, 45° non tranſcendit, tamen ſi in regionibus coeli eleuatioribus, atque vertici propioribus, aliquid obſeruandum occurrit, opus eſt, vt valde reclinet caput, immo et prope Zenith ipſum, ſupinum aſſumat corporis ſitum, tubum introſpiciens obſeruator; quod quam moleſtum ſit,

ſit, et quod maius eſt, quantum obſeruationum fidelitati atque acumini noceat, vno ore conqueruntur, qui ipſi eiusmodi obſeruationibus inſtituendis vacant.

Commodiſſimus ſine dubio obſeruatori, corporis capitisque ſitus, is eſt, qui prae reliquis homini naturalis atque conſuetus eſt, erectus nempe, atque talis, vt tubum ſecundum rectam horizontalem introſpiciat. Qui itaque adaptare poſſet inſtrumenta aſtronomica, vt obſeruator, qualescunque, et in quacunque regione coeli, inſtituat obſeruationes, nunquam alium, niſi modo dictum, aſſumere cogatur corporis ſitum, hic omnino non contemnendam inſtrumentis conciliaſſe perfectionem habendus foret.

Diu eſt, ex quo tale ſe medium mihi obtulit, quod cum, in aduerſaria mea relatum, ac fere oblitum, paucos ante dies fortuito ſe rurſum oculis meis obtulerit, ſatis dignum mihi viſum eſt, cuius in Academia mentionem iniicerem. Etſi enim facile quiuis imaginari iſtud potuerit, a nemine tamen hactenus in vſum vocatum eſt, quod tamen omnino mereri videtur.

Ad ſequentia, hoc quicquid eſt inuenti mei, re ipſa maioris forſan momenti, quam ad primum intuitum videri poteſt, reducitur. Canalis orichalceus ABMP, Fig. 1. inſertum gerens a parte anteriori vitrum obiectiuum AB, aliquot pollices breuior ſit, diſtantia focali lentis AB. A parte poſteriori, ad MP, afferruminetur ipſi ad angulos rectos canalis alter HIGM, eius longitudinis, vt vtriusque canalis longitudo ſimul ſumta, ſummam diſtantiarum focalium lentis obiectiuae AB, et ocularis CD, efficiat. Vbi iun- Tab. XI. Fig. 1.

guntur ſibi inuicem cylindri hactenus deſcripti, inſeratur tubo ſpeculum planum, elliptica figura praeditum MN, quod ita ad axin canalis ABMP inclinatum ſit, vt radios a vitro obiectiuo venientes, in tubum HIGM, verſus vitrum oculare CD, reflectat. Cadat itaque focus lentis obiectiuae AB, ſiue ſuperficies, in quam cadit imago, a lente AB formata, in planum LK, atque ad LK inſeratur tubo, aut reticulum ſimplex, aut reticulum conſuetum micrometri; et euidens erit cuiuis, qui aſtronomicam praxin callet, obſeruationes omnes aeque feliciter peragi poſſe, tubo eiusmodi incuruo, ac ſi tubus omnino rectus adhiberetur. Cum vero in plerisque obſeruationibus, planum Quadrantis, aut Sectoris, eum perpetuo habere ſoleat ſitum, vt verticale ſit, cylinder HGIM horizontalem ſitum ſemper ſeruabit, neque adſtans inſtrumento, aut adſidens, obſeruator, vnquam incommodum aſſumere corporis ſitum coactus erit.

Aliqua addere placet breui huic deſcriptioni, non quod viros Aſtronomiae peritos pluribus indigere putem, quo in vſus haec ſuos conuertere queant, ſed ne ii, qui forſitan in aſtronomica praxi minus exercitati ſunt, aliquid inueniant, quod iure deſiderari poſſe, videri ipſis queat. Moneo ea propter, ſpeculum, non vitreum, ſed metallicum, adhibendum eſſe, cuiusmodi ſpeculorum conſtructionem in poteſtate eſſe, ſatis conſtat, ex quo feliciſſime in Anglia conſtructi ſunt tubi reflectentes *Newtoniani*, ad quorum quippe conſtructionem ſpeculum planum metallicum requiritur. Deinde indicandum mihi eſt, nouum hoc inſtrumentorum addita-

ditamentum, nouae verificationis Aſtronomo imponere neceſſitatem. Spectat, de qua loquor, verificatio, ſpeculi MN ſitum, qui talis eſſe debet, vt planum picturae, a lente obiectiua formatae, cum plano reticuli coincidat. Facile autem, ſi in ſpeculi ſitu peccatum fuerit, et vitium deprehenditur, et corrigitur. Si nempe erroneum habeat ſpeculum ſitum, atque ita adaptetur tubus, vt in campi centro, nulla detur filorum reticuli parallaxis, obſeruabitur, puncta imaginis, aut ſupra et infra, aut ad dextram et ſiniſtram centri, ſita, ſenſibilem habere parallaxin, quod indicio habeandum eſt, correctione indigere ſpeculi ſitum. Facile vero iudicatur, quamnam in partem inclinandum ſit ſpeculum, vt ſitus ipſius emendetur. Secto nempe tubo HGIM, Fig. 1. per axem, ſit in Fig. 2. MN ſectio per ſpeculum; LK, ſectio per planum reticuli; RS vero, ſectio per planum imaginis. Punctum iam imaginis Q, poſt planum reticuli, atque punctum P, ante iſtud ſitum, vtrumque ſenſibilem habebit parallaxin, aſt, prouti notiſſimum aſtronomis, prius punctum, dum commouetur oculus, oculi motum ſequi, poſterius in contrarias partes transferri videbitur, quod indicio eſt, pro corrigendo ſpeculi ſitu, verſus N iſtud adducendum, verſus M vero parumper retrahendum eſſe, quod ope trium, a tergo ſpeculi reperiundarum cochlearum, quarum ope in quamuis partem inclinari poteſt, facile efficitur. Tab XI. Fig. 2.

Reliquae verificationes inſtrumenti, hic deſcripta ratione conſtructi, a conſuetis nihil differunt.

OBSERVATIO ECLIPSEOS LVNAE
d. 18 Maii ſt. v. 1760. PETROPOLI HABITA

a

NICETA POPOW, ANDREA KRASILNIKOW et NICOLAO KVRGANOW.

Coelo tranquillo et ſereno, tenuiſſimis tamen vaporibus a fluuio Neua ſurgentibus.

	Tempore penduli	Tempore vero
Penumbra adeſſe videtur in diſco Lunae	$10^h.55'$	$10^h.57'.50''$
Penumbra certo adeſt	10. 58	11. 0. 49
Initium Eclipſeos adeſſe creditur	11. 7	11. 9. 48
Eclipſis certe adeſt	11. 16	11. 18. 47
Maxima obſcuratio celebrari viſa eſt	11. 31	11. 32. $45\frac{1}{3}$
Cornu Eclipſeos in Tubo ſuperius in eodem verticali cum Tychone exiſtit - - - - -	11. 45	11. 47. 44
Finis Eclipſeos factus eſſe iudicatur.	12. 2	12. 4. $42\frac{1}{3}$
Finis totalis Eclipſeos exceſſusque penumbrae e diſco Lunae factus eſſe viſus eſt, et Luna priſtino ſplendori ſuo reſtituta putabatur - - -	12. 12	12. 14. $41\frac{1}{3}$

Quan-

Quantitas Eclipſeos ad decimam ſextam circiter partem diametri Lunae extendi aeſtimabatur, ſeu aliquantum maior, quam eſt tertia pars diſtantiae Tychonis a limbo Lunae.

In vmbra terreſtri limbus Lunae per integram Eclipſin ſemper clarior, quam reliqua eiusdem pars obſcurata, eſt viſus.

Finis Eclipſeos bene eſt obſeruatus. Initii tamen et maximae obſcurationis et egreſſus penumbrae e diſco Lunae tempora ſunt dubia intra minutum temporis et amplius.

* * *

Anno 1760. Iunii 2. die mane ſt. v. Petropoli in obſeruatorio obſervata eſt Eclipſis Solis

a

N. POPOW et ANDREA KRASILNIKOW.

Initium Eclipſeos accidit
$9^h.1'.44''$ tempore vero
obſeruatio exacta.
Reliqua nubes interuenientes impediuere.
$11^h.2'$ Eclipſis non amplius iam
apparuit.

ECLIPSIS SOLIS

LIPSIAE VISA HORIS MATVTINIS d. 13. Iunii ſtyl. nou. temp. ciuilis an. 1760.

a

G. HEINSIO.

Coelum mane nubibus refertum vix ſpem Eclipſin obſeruandi relinquere videbatur; hiatus tamen poſtea agebant nubes, vt Solem verſus initium Eclipſis per interualla conſpicere liceret. Hac circumſtantia permotus Tubum minorem praetuli praeſtantiori, qui alias pro obſeruando initio certius adhiberi ſolet, vt, retinendo imaginem Solis in largiori repraeſentationis campo per longius temporis ſpatium, momentum initii tutius exſpectare poſſem. Vſus itaque ſum Tubo terreſtri longo 4. pedes Pariſinos cum digito, qui amplo repraeſentationis campo inſtructus obiecta ſecundum diametrum 13. vicibus augebat. Huius ope caſu felici *initium Eclipſis* annotare mihi licuit mane hor. 7. 25′.34″. temporis veri, tam exacte, vt ingreſſus Lunae in diſcum Solis ad inſtans quaſi in oculos incurreret. Paulo poſt initium ſpiſſae nubes Solem ſubibant, et obſeruationum continuationem per omne reliquum Eclipſis tempus impediebant, licet Sol, per pauca tamen momenta, nonnunquam e nubibus erumperet, et phaſin oculo nudo per nubes tenues oſtenderet. Correctio temporis in duobus horologiis oſcil-

oſcillatoriis facta eſt ope altitudinum Solis reſpondentium diebus ante et poſt diem eclipticum captarum. Hodie circa meridiem altitudo mercurii in barometro erat 27$^{dig.}$ 8$^{lin.}$ menſurae Pariſienſis, et thermometrum ex diuiſione de *l'Isle* oſtendebat 120. grad.; quod poſtea d 6. Iulii ſt. n. hor. 3. poſt meridiem, libero aeri in loco vmbroſo verſus orientem expoſitum, calorem inſolitum 97½ grad. eiusdem diuiſionis patefecit. Praeceſſerant plures dies valde calidi.

OBSER-

OBSERVATIO ECLIPSEOS LVNARIS,
D. $\frac{7}{18}$. MAII 1761. HABITA IN OBSERVATORIO IMPERIALI PETROPOLITANO

a

F. V. T. AEPINO.

Die $\frac{7}{18}$. Maii, An. 1761. tempore vero Petropolitano,

10^h. 4′.	Penumbrae aduentum ſatis diſtincte obſeruare poteram.
10. 22. 8″.	Eclipſin incipere iudicabam.
10. 27. 45.	Vmbra ad mare humorum.
10. 36. 23.	ad Bullialdum.
10. 37. 37.	ad Ariſtarchum.
10. 40. 48.	ad Tychonem.
10. 44. 0.	ad Copernicum.
10. 52. 13.	ad Heraclidem.
11. 0. 17.	ad Manilium.
11. 4. 3.	ad Menelaum.
11. 9. 28.	ad Promontorium acutum.
11. 14. 52.	ad Promontorium ſomnii.
11. 20. 15.	ad mare Criſium.
11. 24. 15.	mare Criſium tectum.
11. 30. 0.	Immerſio totalis.
1. 5. 20.	Initium Emerſionis.
1. 13. 19.	Ariſtarchus in limbo vmbrae.

1^h.

$1^h.19'.11''.$	Vmbra ad mare humorum.
1. 22. 37.	ad montem Helicon.
1. 24. 47.	mare humorum extra vmbram.
1. 27. 55.	Copernicus totus extra vmbram.
1. 43. 7.	Manilius.
1. 46 13.	Menelaus.
1. 49 38.	Poſſidonius.
1. 59. 22.	Vmbra tranſit per apicem Promont. acuti.
2. 1. 59.	mare Nectaris detectum.
2. 3. 25.	Vmbrae margo ad mare Criſium.
2. 8. 20.	mare Criſium totum extra vmbram.
2. 11. 42.	Finis Eclipſeos.

Vmbra telluris admodum denſa erat, ita vt, poſtquam Lunae diſcum intrauerat, ab ea tectum ſegmentum penitus euaneſceret. Cum vero ad Heraclidem circiter progreſſa eſſet vmbra, obſeruabam, a ſuperiori ſua parte, ipſam rariorem eſſe. Parti enim lunaris diſci ab vmbra non tecti, ABC, ab hoc momento, vsque ad immerſionem totalem, adnexa videbatur appendicula ADE, lacteo colore ſplendens, qui Tab. XI. fig 3.
ſplendor poſt immerſionem totalem adhuc per 10′ ſenſibilis erat, ac fallere potuiſſet rei ignarum, vt crederet, Lunam nondum totam obſcuratam eſſe. Poſt horam 11. et 42′ aut 43′ penitus euaneſcebat Luna, ita vt fere vsque ad emerſionis initium nullum ipſius veſtigium in coelo ſupereſſet.

Momenta immerſionis et emerſionis macularum, minus ſecura ſunt, quam momenta principalia, initii

et finis Eclipſeos, atque immerſionis totalis, et initii emerſionis Lunae ex vmbra. Luna nempe durante hac obſeruatione partim vaporibus horizontem cingentibus immerſa erat, partim forte crepuſculum, quod hiſce menſibus obſeruationes aſtronomicas apud nos valde turbat, tantum Lunae diſco conciliabat pallorem, vt quamprimum macula quaedam penumbrae inuoluta eſſet, cum reliquo Lunae diſco quaſi confuderetur, ac vix ac ne vix quidem ab ipſo diſtingui poſſet; vnde ipſe ego vel per minutum dimidium, immo vlterius, de vmbrae ad maculam appulſu dubius haeſi.

AD

AD NOVA ACTA
PETROP. ACADEMIAE SCIENT. TOM. III. ADDITAMENTVM EX SINIS,

P. *ANTONII GAVBIL. S. I.*

7 Maii 1736. in Ilginskoi Oſtrog. h. 14 $44'.34''$ Imm. 1^{mi} Sat. ſt.v.
Pekini - - - - - - 15.30. 15 differ. $45'.41''$
Septembr. 3. in Olekminskoi Oſtrog. $7^{h}.52'.32''$ Emerſ. 1^{mi} Sat. ♃
Pekini ſtylo nouo 21. Sept. $9^{h}.36'.12''$ 1ma Emerſ. 1^{mi} Satell. ♃
28. Sept. 11. 32. 26 1ma Emerſ. 1^{mi} Satell. ♃

Ab obſeruatione 21. Sept. ad obſeruationem 28. Sept. ſunt 4. reuolutiones = 7 dies $1^{h}.\ 56'.14''$

itaque ad obſeruat. in Olekminskoi adde 7 dies $1^{h}.\ 56'.14''$
obſ. fuiſſet in Olekminskoi Em. 1ma 21 Sept. n. ſt. $9^{h}.\ 48'.46''$
fuit obſeruata Pekini - - $9^{h}.$ 36. 12.

Ergo Pekinum occidentalius Olekminskoi arce $12'.34''$ temp.

Anno 1738. ſt. n. Pekini 11. Sept. $16^{h}.\ 0'.50''$ Imm. 1^{mi} Sat. ♃
in vrbe Iakuzk - 16. 54. 0 diff. $53'.10''$
Pekini 30. Nou. 9. 45. 25 Emerſ. 1^{mi} Satell.
Iakuzk - - - - - 10. 37. 54 diff. $52.'29''$
Pekini 9. Dec. 6. 4. 40 Emerſ. 1^{mi} Satell.
Iakuzk - - - - - 6. 58. 52 diff. $54'12''$
Pekini 29. Dec. 8. 56. 15 Imm. 3^{tii} Satell.
Iakuzk - - - - - 9. 49. 43 diff. $53.'28''$

1738. Pekini 16 Nou. - $5^{h}.59'.58''$ Emerſ. 1^{mi} Satell.
Iakuzk - - - - - - 6. 52. 1 diff. $52'.3''$
Minima differentia 52. 3
Maxima differ. - 54. 12
Media differentia 53. 7. $30'''$. quibus vrbs Iakuzk eſt Pekino orientalior.

Stylo vet. in Kamtſchatka

anno 1741. in portu SS. Petri et Pauli.
12. Febr. $10^{h}.28'.49''$ Emerſ. 1^{mi} Satell. ♃
Pekini - - - - 7. 40. 45 diff. $2^{h}.48'.4''$
30 Ian. in portu illo 12. 5. 30 Imm. 3^{tii} Satell.
Pekini - - - - 9. 16. 30 differ. $2.^{h}49''$
media differ. $2^{h}.48'.32''$ quibus portus eſt Pekino orientalior.

in Bolſcherezkoi 23. Mart. $10^{h}.55'.2''$ Emerſ. 2^{di} Satell.
Pekini - - 8. 14. differ. $2.^{h}41'.2''$

Tubus adhibitus in obſeruationibus Pekinenſibus eſt 14 ped. Pariſin. Obſeruationes ſunt factae in Collegio PP. Gallor. S. I. Pekini

Adiungo duas obſeruationes factas in ſtatione Gallica loci dicti Chandernagor in India orientali a Patre Boudier S. I.
Lat. bor. Chandernagor $22^{\circ}.51'.26''$ obſeruata.
Anno 1741. ſt. v. in portu Kamtſchatkae SS. Petri et Pauli
23. Ian. $11^{h}.7'.22''$ Emerſ. 3^{tii} Sat.
in Chandernagor — 6. 25. 40 diff. $4^{h}\ 41'.42''$
in portu SS. Petr. et Pauli } 25. Ian. 13. 44. 26 Emerſ. 2^{di} Satell.
in Chandernagor — 9. 2. 42 diff. $4.^{h}41'.44''$.

Ex

Ex altitudinibus meridianis Solis obſeruatis ante et poſt ſolſtitium hybernum anni 1756 et ſolſtitium aeſtiuum anni 1757. vidi altitudinem meridianam veram Centri ☉ ſolſtitialem hyemalem fuiſſe 26°. 36′. 19″ altitudinem ſolſtitialem aeſtiuam 73°. 32′. 58″. 31‴. inſtrum. 3 ped. ½ micrometro inſtructum. Adhibita eſt refractio notata in tabulis *Halleyi*, et parallaxis notata in Ephemeridibus Pariſienſibus. Diameter ☉ aſſignata in illis Ephemeridibus imminuta eſt 6″. hinc itaque obliquitas Eclipticae 23°. 28′. 19″. 45‴½; vnde concluditur altitudo Poli in hac noſtra Eccleſia Pekinenſi Gallica 39°. 55′. 21″. 7‴. 30⁗. Haec altitudo Poli parum differt ab ea, quae iam concluſa fuerat ex altitudinibus ſuperioribus et inferioribus meridianis ſtellae polaris et ſtellae antiquae polaris Sinicae. Notaui tertia, et quarta, quia attendi ad diuiſiones partium micrometri.

Anno 1710. PP. ſoc. Ieſu, *Regis* et *Iartoux* Galli, et Pater *Fredeli* Germanus Auſtriacus, in vrbe *Aighoun* ad fluuium *Amour*, 4 Octobr. obſeruarunt altitudinem meridianam limbi ſuperioris Solis 36°. 10′. 26″ quadrante 2 ped. 2 pollic. Exhibebat altitudines maiores quam par eſſet vno minuto primo. PP. concluſerunt loci latit bor. 50° 0′. 50″.

Ex aliis altitudinibus merid. limbi ſuperioris ☉ in praedicto loco, et aliis vicinis, PP. eandem ferme latitudinem *Aighoun* inuenere. Latitudo illa, quae videtur ſat certa, differt a latitudine notata in nouo Atlante Ruſſico.

Praedicti PP. ex locorum diſtantiis, ex rhumbis, obſeruationibus adhibitis declinationis acus, ſaepe obſeruatis ☉ merid. altitudinibus, in itinere Pekino ad vrbem *Aighoun*, determinarunt vrbem *Aighoun* Pekino orientaliorem 11°. Certior eſſet illa determinatio ſi erueretur ex aliqua obſeruatione aſtronomica, vel Eclipſeos Solis et Lunae, vel Satellitum Iouialium. Neſcio an Geographi Ruſſi determinarint latitudinem et longitudinem *Aighoun* vi obſeruationum aliquot aſtronomicarum, ſeu prope *Aighoun*, ſeu in loco, cuius diſtantia ab *Aighoun* ſit cognita.

MER-

MERCVRIVS IN SOLE OBSERVATVS *PEKINI* SINARVM ANNO 1756. DIE 7. NOVEMBRIS MANE

a P. *AVGVSTINO HALLERSTEIN* S. I.

	$9^h.29'.15''$. ☿	primum viſus in limbo ortiuo Solis, Teleſcopio 14. pedum.
	30. 30.	Ingreſſus totus
	1. 15.	
I.	9. 41. 7.	☿ in horario
	21.	☉lis limbus ortiuus in horario, et tum limbus boreus ☉lis borealior ☿^{io} $23'. 9''. 16'''$.
	14.	
II.	9. 49. 14½.	☿
	29.	☉ - - 22. 59. 28.
	14½.	
III.	9. 56. 46.	☿
	57. 4.	☉ - - 22. 39. 9.
	18.	
IV.	10. 2. 30.	☿
	50.	☉ - - 22. 26. 3.
	20.	
V.	10. 5. 48.	☿
	6. 9.	☉ - - 22. 18. 2.
	21.	

VI.

VI.	$10^h. 8'.51''.$	☿	
	9.15.	☉	- $22'. 2''.30'''.$
	24.		
VII.	10.11.56.	☿	
	12.20.	☉	- 22. 1.11.
	24.		
VIII.	10,19.21.	☿	
	48.	☉	- 21. 43. 30.
	27.		
IX.	10.22.46.	☿	
	23.14.	☉	- 21. 36. 18.
	28.		
X.	10.25.55.	☿	
	26 24.	☉	
	29.		
XI.	10.29.10.	☿	
	41.	☉	- 21. 19. 17.
	31.		
XII.	10.32.30½.	☿	
	33. 1½.	☉	- 21. 8. 10.
	31.		
XIII.	10.37.14.	☿	
	47.	☉	- 20.59.38.
	33.		

XIV.

XIV.	$10^h.53'.47''$	☿			
	54 26.	☉	-	$20'.13''.49'''$.
	39.				
XV.	10.57.22½.	☿			
	58. 3.	☉	-	20. 5. 57.
	40½.				
XVI.	11. 0.28.	☿			
	1 10.	☉	-	19. 58. 6.
	42.				
XVII.	11. 5.51.	☿			
	6.35.	☉	-	19. 46. 58.
	44.				
XVIII.	11. 9.21.	☿			
	10. 6.	☉	-	19. 41. 5.
	45.				
XIX.	11.15.11.	☿			
	58½.	☉	-	19. 21. 26.
	47½.				
XX.	11.18.44.	☿			
	19.33.	☉	-	19. 13. 35.
	49.				
XXI.	11.22.35.	☿			
	23.25.	☉	-	19. 5.43.
	50.				

XXII.	$11^h.29'.19''$.	☿		
	30. 12.	☉	–	$18'.48''.42'''$.
	53.			
XXIII.	11.32.26.	☿		
	33.20.	☉	–	18. 42. 9.
	54.			
XXIV.	11.40. 3.	☿		
	59.	☉	–	18. 16. 37.
	56.			
XXV.	11.43. 6.	☿		
	44. 3.	☉		
	57.			
XXVI.	11.46 40.	☿		
	47. 39.	☉	–	18. 3. 32.
	59.			
XXVII.	11.49.43.	☿		
	50.44.	☉	–	17. 57. 38.
	1. 1.			
XXVIII.	$11.52.45\frac{1}{2}$.	☿		
	53.47.	☉	–	18. 3. 32.
	$1. 1\frac{1}{2}$.			

$11^h.58'.52''$. ☉lis limb. occ. }
12. 0. 3. ☿ } in Meridiano.
12. 1. 7. ☉lis limb. ort. }

XXIX.

XXIX.	$12^h.18'.50''.$	☿		
	20. 2.	☉	–	16′. 36″. 27‴.
	1. 12.			
XXX.	12. 22. 11.	☿		
	23. 24.	☉	–	16. 29. 54.
	1. 13.			
XXXI.	12. 24. 37.	☿		
	25. 51.	☉	–	16. 27. 17.
	1. 14.			
XXXII.	12. 31. 0½	☿		
	32. 17½	☉	–	16. 6. 20.
	1. 17.			
XXXIII.	12. 34. 52.	☿		
	36. 9.	☉	–	16. 10. 16.
	1. 18.			
XXXIV.	12. 44. 9.	☿		
	45. 30.	☉	–	et limbus auſtralis ☉lis auſtralior ☿io 16′.58″.43‴.
	1. 21.			
XXXV.	12. 46. 48.	☿		
	48. 9.	☉	–	17. 5. 15.
	1. 21.			
XXXVI.	12. 49. 29.	☿		
	50. 51.	☉	–	17. 10. 30.
	1. 22.			

XXXVII.	$12^h.53'.49''$.	☿		
	55. 13.	☉	–	$17^h.20'.20''$
	1. 24.			
XXXVIII.	12. 56. 30.	☿		
	57. 55.	☉	–	17. 27. 31.
	1. 25.			
XXXIX.	1. 1. 36.	☿		
	3. 3.	☉	–	17. 41. 55.
	1. 27.			
XL.	1. 4. 35.	☿		
	6. 3.	☉	–	17. 51. 5.
	1. 28.			
XLI.	1. 23. 16.	☿		
	24. 51.	☉	–	18. 34. 28.
	1. 35.			
XLII.	1. 27. 15.	☿		
	28. 52.	☉	–	18. 48. 42.
	1. 37.			
XLIII.	1. 30. 23.	☿		
	32. 0.	☉	–	18. 52. 38.
	1. 37.			
XLIV.	1. 34. 58.	☿		
	36. 37.	☉	–	19. 5. 43.
	1. 39.			

XLV.	$1^{h}.38'.45''.$	☿	
	40. 27.	☉	– 19. 18. 49.
	1. 42.		
XLVI.	1. 48. 50.	☿	
	50. 35.	☉	– 19. 41. 5.
	1. 45.		
XLVII.	1. 52. 1.	☿	
	53. 46.	☉	– 19. 50. 15.
	1. 45.		
XLVIII.	1. 55. 56.	☿	
	57. 44.	☉	– 19. 56. 47.
	1. 48.		
XLIX.	1. 59. 4.	☿	
	2. 0. 53.	☉	– 20. 5. 57.
	1. 49.		
L.	2. 5. 7.	☿	
	6. 58.	☉	– 20. 22. 20.
	1. 51.		
LI.	2. 9. 52.	☿	
	11. 45.	☉	– 20. 32. 48.
	1. 53.		
LII.	2. 13. 30.	☿	
	15. 25.	☉	– 20. 46. 33.
	1. 55.		

LIII.	2^h. 20′ 4″.	☿		
	22. 0.	☉	-	20′.59″.38‴.
	1. 56.			
LIV.	2. 23. 38.	☿		
	25. 26	☉	-	21. 11. 25.
	1. 58.			
LV.	2. 26. 46.	☿		
	28. 45.	☉	-	21. 17. 58.
	1. 59.			
LVI.	2. 30. 8.	☿		
	32. 9.	☉	-	21. 25. 40.
	2. 1.			
LVII.	2. 33. 21.	☿		
	35. 22.	☉	-	21. 32. 22.
	2. 1.			
LVIII.	2. 36. 36.	☿		
	38. 39.	☉	-	21. 36. 18.
	2. 3			

2. 54 22. ☿ coepit egredi ex ☉
56. 6. Egreſſus totus
1. 44.

Noto: Ingreſſus ☿rii in Solem, et Egreſſus ex eodem obſeruati ſunt Teleſcopio 14. pedum bono. Tranſitus ☉lis et ☿rii per meridianum obſeruati inſtrumento

mento, quod vocant, Culminatorio, pedum trium. Id nobis ante hos annos obuenit dono Cl. Viri Domini *Antonii Ribeiro Sanchez*, et nos illud diligenter et accurate, firmiter et feliciter, in Meridiano conſtituimus. Reliquae Phaſes obſeruatae ſunt Teleſcopio 8. pedum, cui applicatum Micrometrum Anglicum Grahamianum, tribus filis argenteis inſtructum, vno horario et duobus parallelis, altero mobili, fixo altero, cuius cum horario interſectio orthogona eſt centrum, circa quod tota machina ope cochleae infinitae volui, et ad ſitum Aequatori parallelum conſtitui poteſt.

Tempora Phaſium omnia ſunt vera, reducta ſcilicet ex temporibus penduli, quod geminum habeo opere Gallico, vtrumque optimae notae. Differentiae declinationum reductae ſunt ex reuolutionibus Micrometri, prout et has et illa inter obſeruandum adnotaui, ſine correctione vlla errorum quorundam inter obſeruandum commiſſorum. Malui numeros obſeruationum, vt ſua his fides conſtet, candide et fideliter referre, praeſertim cum cuiuis facile fuerit, eos ex calculo vel typo emendare, ſi in hoc operationum numero opus, aut operae pretium putauerit.

Cum autem totus in eo eſſem, vt quam plurima puncta viae Mercurii determinarem, diametri Solis adeo oblitus fui, vt ne in mentem quidem veniret, eius Micrometro metiendae, vt adeo iſta ex Ephemeridibus vel tabulis Solaribus petenda ſit. Caeterum quantitates reuolutionum Micrometri, alias aliunde determinatae fuerunt, tutius etiam multo, quam ex diametro Solis.

Porro

Porro obſeruatio haec facta eſt in Collegio noſtro, quod vocamus, auſtrali, cuius latitudo recens conſtituta eſt $39^{\circ}\ 54'.\ 0''$. praeciſe, et differentia a Meridiano obſeruatorii Petropolitani $5^{h}.\ 44'.\ 16''$, puto item ſatis praeciſe, quae fuſius videre erit in libro obſeruationum Pekinenſium, qui lucem expectat.

Fig. 1.

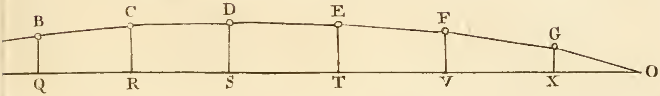


Fig. 2.

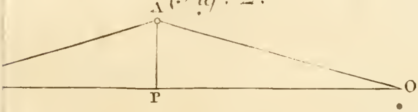


Fig. 3.

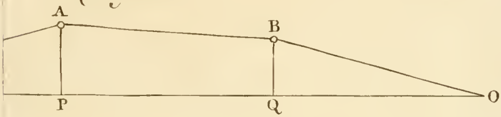


Fig. 4.

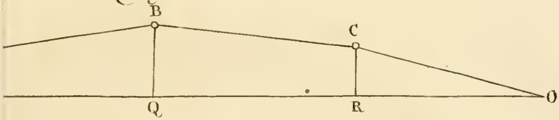


Fig. 5.

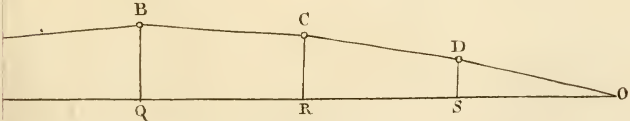


Fig. 1.

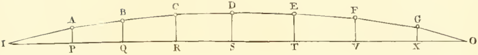


Fig. 2.

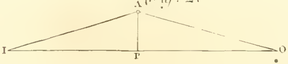


Fig. 3.

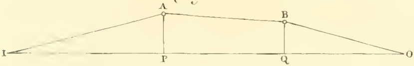


Fig. 4.

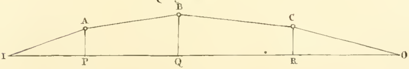


Fig. 5.

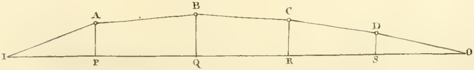
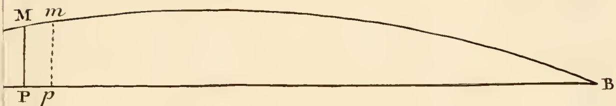


Fig. 1.



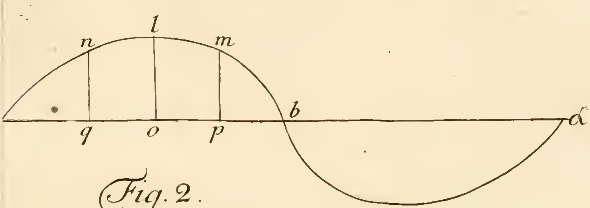


Fig. 2.



Fig. 3.

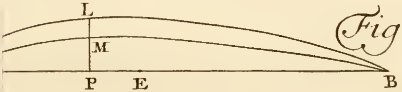


Fig. 4.

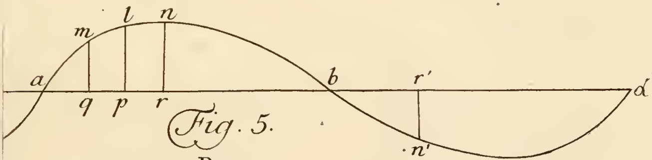


Fig. 5.

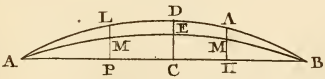


Fig. 6.

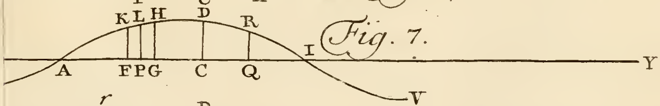


Fig. 7.

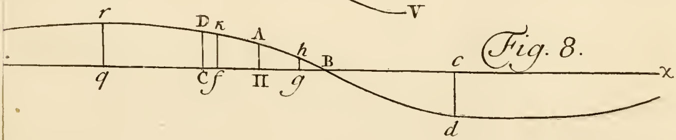
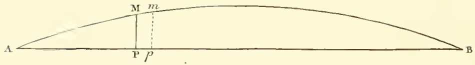


Fig. 8.

Fig. 1



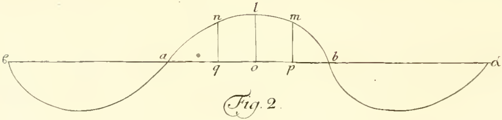


Fig. 2.

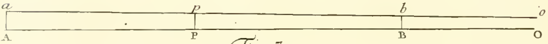


Fig. 3.

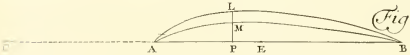


Fig. 4.

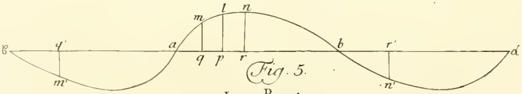


Fig. 5.

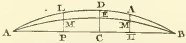


Fig. 6.

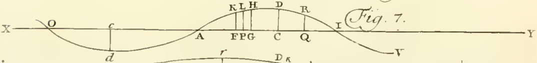


Fig. 7.

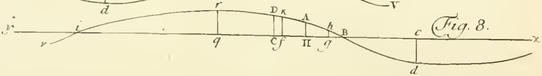


Fig. 8.

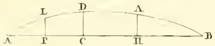


Fig 1. (9)

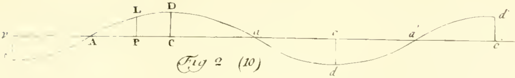


Fig 2 (10)

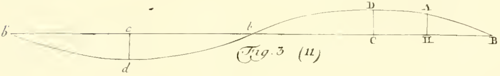


Fig. 3 (11)

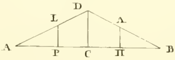


Fig 4 (12)

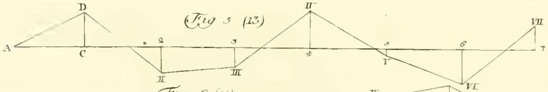


Fig 5 (13)

Fig 6. (14)

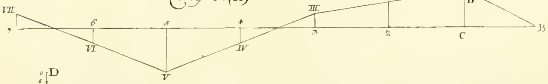
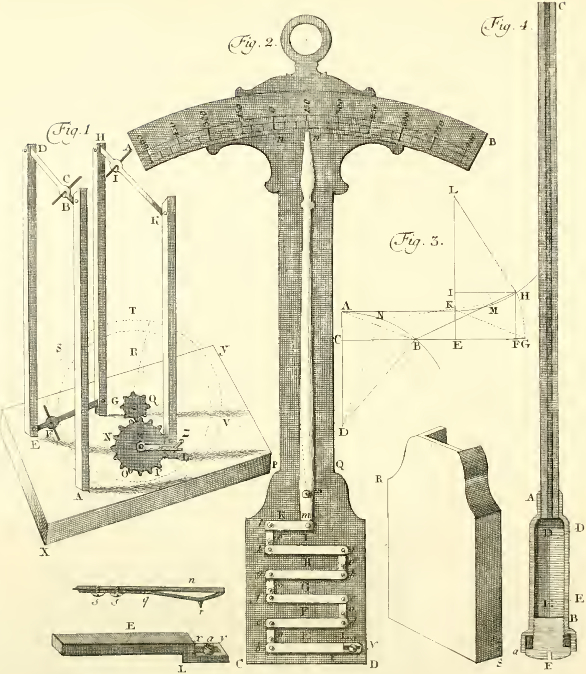




Fig. 7. (15)


Fig. 1
Fig. 2
Fig. 3
Fig. 4



II.

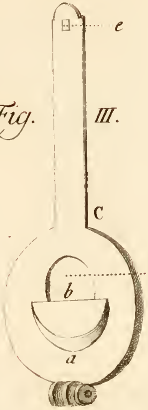
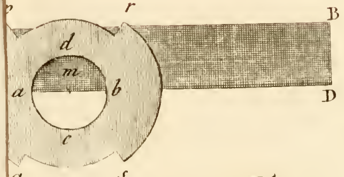


Fig. III.



Fig. IV.

Fig. V.



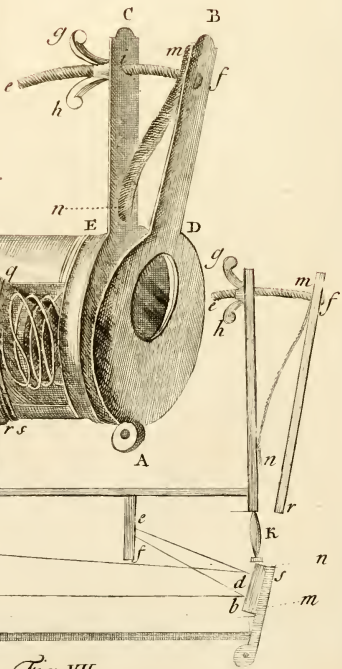
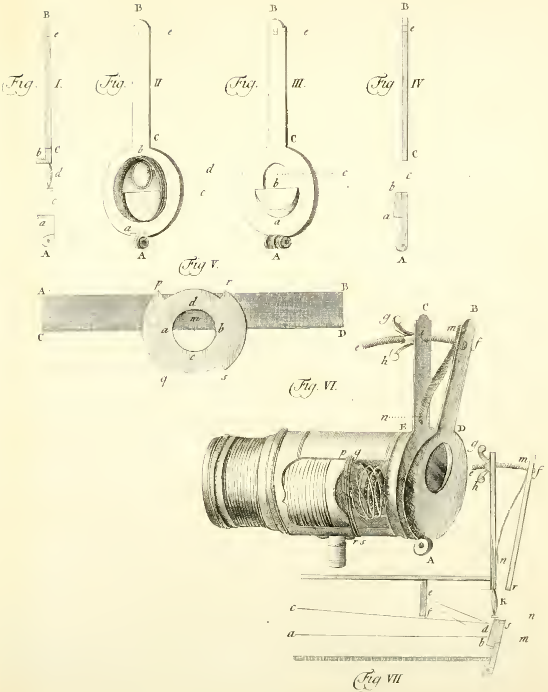


Fig. VI.

Fig. VII.


Fig. I.
Fig. II
Fig. III.
Fig IV
Fig V.
Fig. VI.
Fig VII

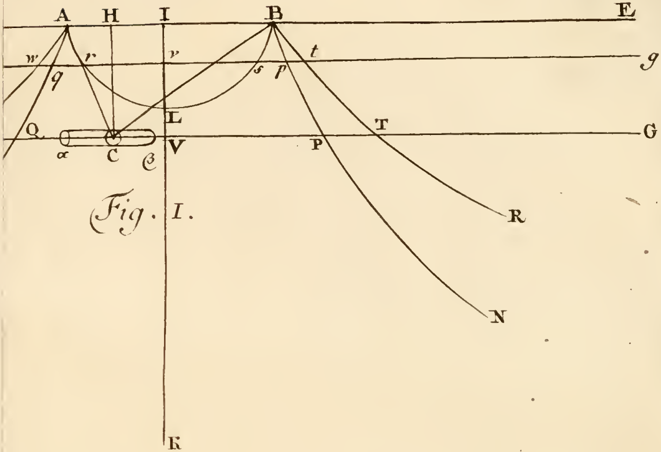


Fig. I.

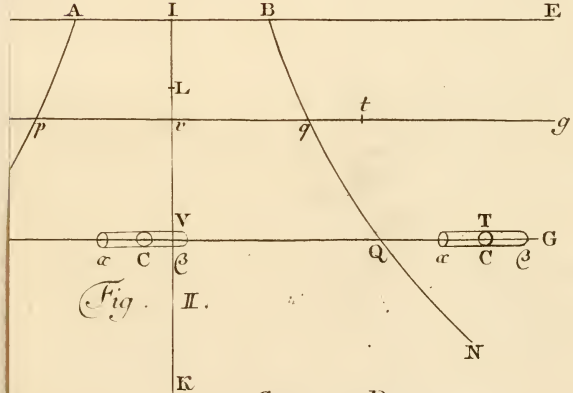


Fig. II.

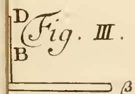


Fig. III.

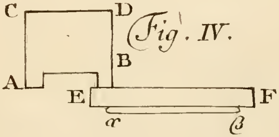


Fig. IV.

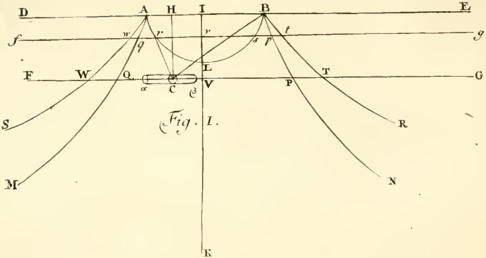


Fig. I.

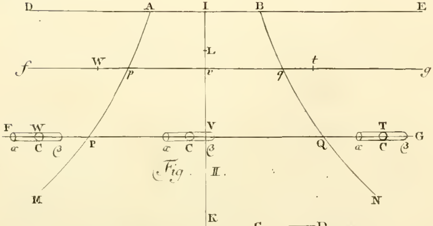


Fig. II.

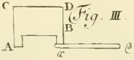


Fig. III.

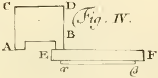


Fig. IV.

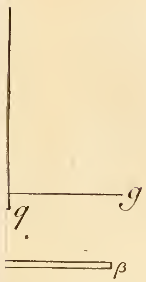
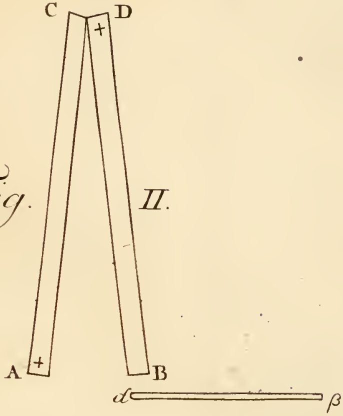


Fig. II.



III.

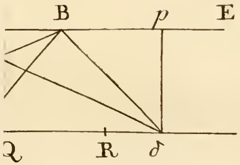


Fig. IV.

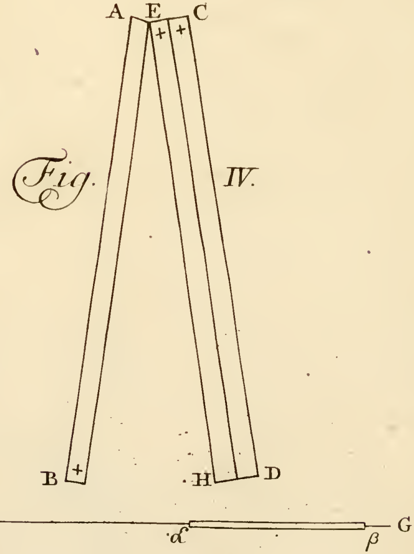
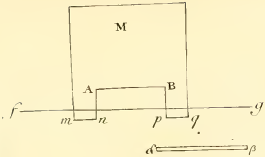


Fig. I.


M
A
B
f
g
m
n
p
q
α
β

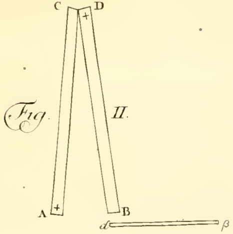
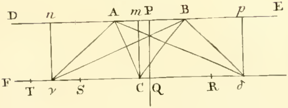
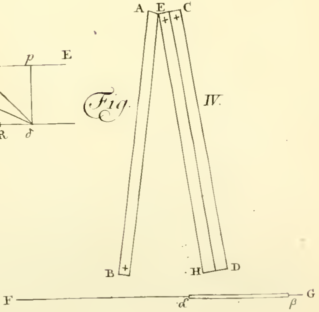
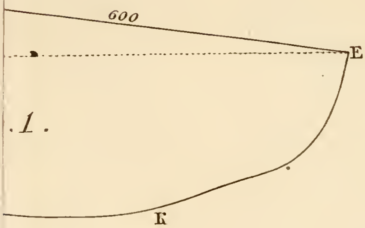

C
D
Fig. II.
A
B
α
β

Fig. III.


D
n
A
m
P
B
p
E
F
T
γ
S
C
Q
R
δ


A
E
C
Fig. IV.
B
H
D
F
α
β
G



.1.

Fig. 2.

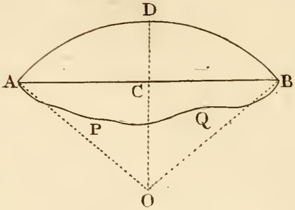
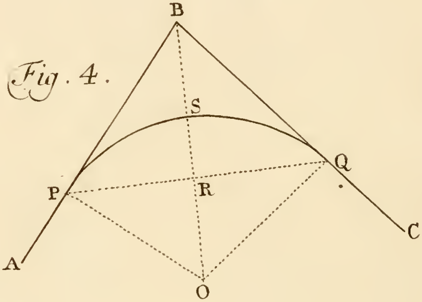


Fig. 4.



.5.

Fig. 6.

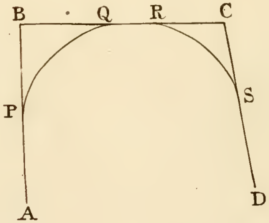


Fig. 7.

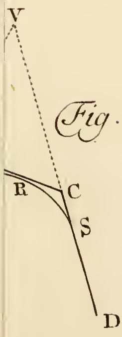
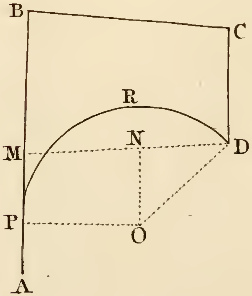


Fig. 8.



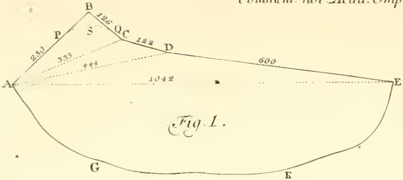
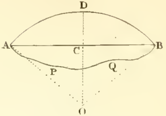


Fig. 1.

Fig. 2.



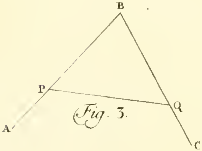
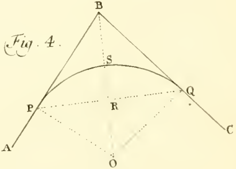


Fig. 3.

Fig. 4.



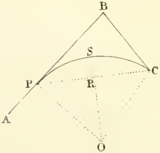
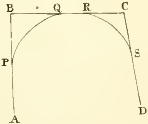


Fig. 5.

Fig. 6.



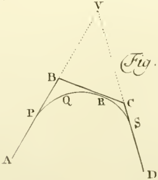
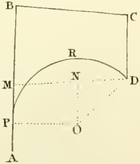


Fig. 7.

Fig. 8.



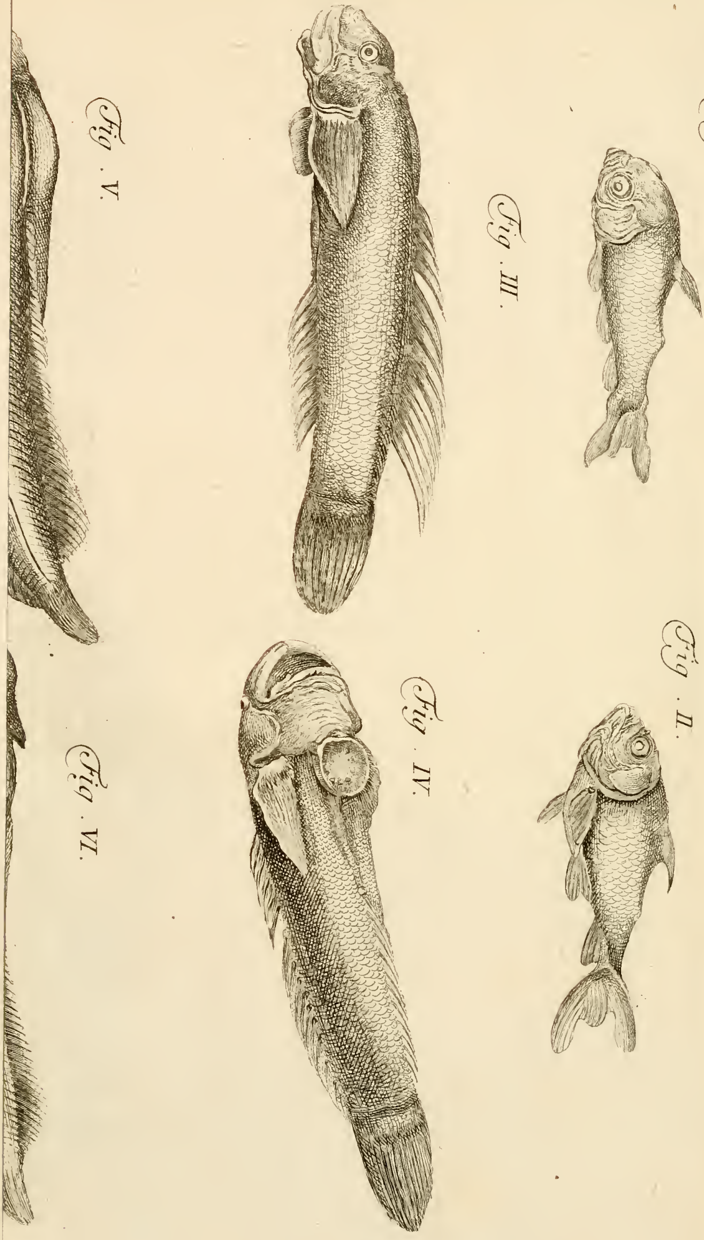
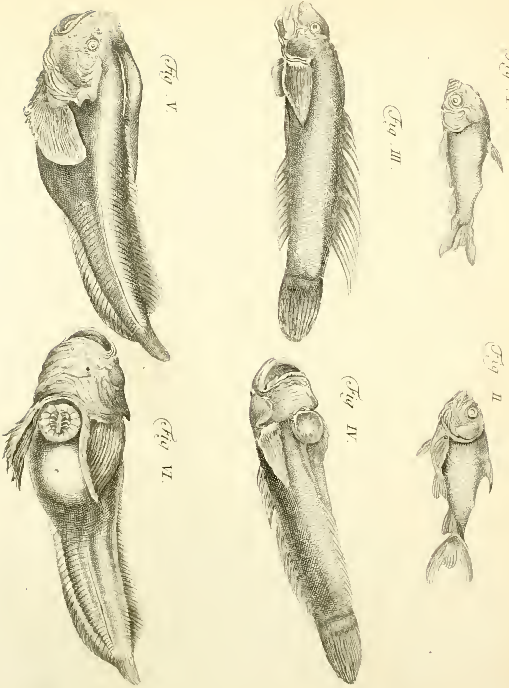


Fig. I. Fig. II. Fig. III. Fig. IV. Fig. V. Fig. VI.


Fig. I.
Fig. II
Fig. III.
Fig. IV.
Fig. V.
Fig. VI.

Comment. nov. Acad. Imp. Sc. Petrop. Tom. IX. Tab. X.

Fig. I.

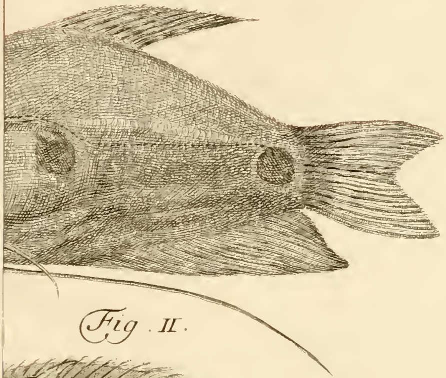


Fig. II.

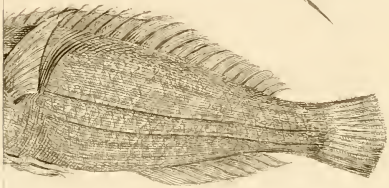


Fig. III.

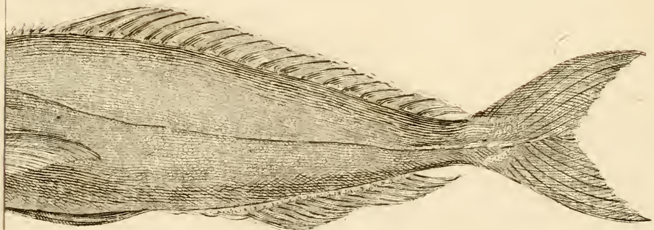


Fig. IV.



Fig I.

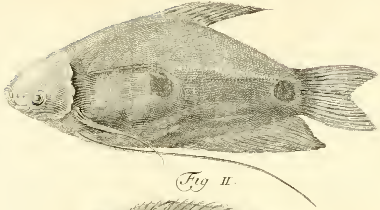


Fig II.

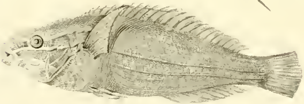


Fig. III.



Fig. IV

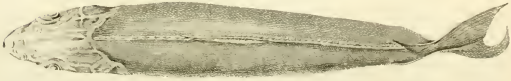


Fig. 1.



Fig. 2.

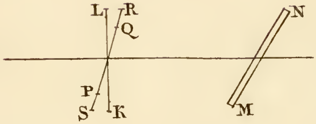


Fig. 3.

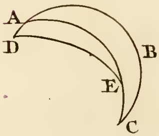


Fig. 1.

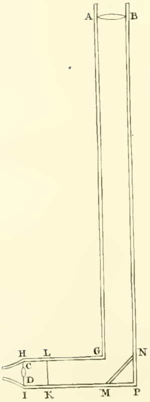


Fig. 2.

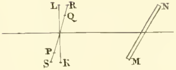
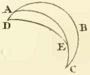


Fig. 3.



AMNH LIBRARY
100125107